

# تأثیر حرارت بر روی ارتعاشات آزاد پوسته های استوانه‌ای هیبریدی

رشید محمدی<sup>۱</sup>، محمد مسکینی<sup>۲\*</sup>، حشمت اله محمد خانلو<sup>۳</sup>

۱- دانشجو کارشناسی ارشد هوافضا، دانشگاه شهید ستاری، تهران، ایران  
۲- استادیار، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه شهید ستاری، تهران، ایران  
۳- دانشیار، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه شهید ستاری، تهران، ایران  
(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۱۰/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۱/۳۱)

## چکیده

در این مقاله، تحلیل و بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز) تحت تأثیر دما مورد بررسی قرار گرفته است. تأثیر حرارت می‌تواند تغییرات قابل توجهی در رفتار ارتعاشی و پاسخ دینامیکی سازه ایجاد کند. هدف این تحقیق، بررسی تغییر شکل و رفتار سازه در شرایط حرارتی مختلف است. شرایط مرزی را برای پوسته استوانه‌ای به صورت آزاد، گیردار و ساده در نظر گرفته شده است، معادلات حاکم بر ساختار پوسته استوانه‌ای هیبریدی بر اساس میدان جابجایی و روابط تنش و کرنش به صورت ماتریسی با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پوسته‌ها و اصل همپولتون به دست آمده و با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، معادلات حاکم بر سازه حل گردیده و تأثیر مواد کامپوزیتی، درجه حرارت، طول استوانه و ابعاد هندسی روی فرکانس طبیعی سازه بررسی و تحلیل شده است. نتایج عددی با نتایج تحقیقات انجام شده مورد مقایسه و صحت سنجی قرار گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهند که پوسته هیبریدی با توزیع مواد مرکب و در نسبت حجمی خاص، رفتار بهتری در برابر تغییرات دما نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، پوسته‌های استوانه‌ای، هیبرید، محیط حرارتی، کامپوزیت، تئوری برشی تغییر شکل مرتبه اول

## Thermal effect on the free vibration of hybrid circular cylindrical shells

1<sup>st</sup> rashid mohammadi, 2<sup>nd</sup> mohammad meskini, 3<sup>th</sup> heshmatolla mohammad khanloo

### Abstract

In this article, the analysis and research of the free vibrations of the fiber metal laminate(FML) cylindrical shell under the influence of temperature is investigated. The influence of heat can cause significant changes in the vibration behavior and dynamic response of the structure. The purpose of this research is to investigate the deformation and behavior of the structure in different thermal conditions. The boundary conditions for the cylindrical shell are considered as free, clamped and simple. The equations governing the structure of the hybrid cylindrical shell are obtained based on the displacement field and the stress and strain relations in the form of a matrix using the first order shear theory of shells and Hamilton's principle and using the Generalized Differential Quadrature numerical Method(GDQM), the governing equations of the structure are solved and the effect of composite materials, temperature, cylinder length and geometric dimensions on the natural frequency of the structure has been investigated and analyzed. The numerical results have been compared and verified with the results of the research. The results show that the hybrid shell with the distribution of composite materials and in a specific volume ratio shows better behavior against temperature changes.

**Key words:** Free vibrations, cylindrical shells, Fiber metal laminate(FML), Thermal environment, Composite, FSDT

## مقدمه

سازه‌های هیبریدی (کامپوزیت-فلز)، سازه‌هایی هستند که از ترکیب دو یا بیشتر از مواد سازه‌ای مختلف برای انجام وظایف خاصی استفاده می‌شوند. این سازه‌ها مزایای زیادی نسبت به سازه‌های تک‌ماده دارند. هیبریدها دارای ویژگی‌های منحصر به فردی هستند که از ترکیب مزایای فلزات و الیاف کامپوزیتی بهره می‌برند. الیاف کامپوزیتی، مقاومت بالا و سختی را به ساختار اضافه می‌کنند، در حالی که فلزات قدرت و مقاومت بالایی را ارائه می‌دهند. این ترکیب، میزان استحکام و مقاومت به شکست در سازه را افزایش می‌دهد و در عین حال وزن سازه را کاهش می‌دهد. برخی از مزایای پوسته‌های هیبریدی عبارت است از: بهینه‌سازی وزن، انعطاف‌پذیری طراحی، بهبود خواص مکانیکی و... پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی به‌عنوان سازه‌ای سبک و مقاوم در صنایع مختلفی همچون صنایع هوافضا، خودروسازی، صنعت دریایی، خطوط لوله انتقال سایر صنایع مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. آن‌ها می‌توانند به‌عنوان پوسته‌ها، پنل‌ها، بال‌ها و برخی قطعات ساختاری دیگر در سازه‌های مرکب استفاده شود. همچنین می‌توانند برای استفاده در شرایط محیط‌های حرارتی طراحی شوند. به‌منظور طراحی یک پوسته استوانه هیبریدی لازم است که در شرایط مرزی و محیطی خاص، رفتار مکانیکی سازه شناسایی شود. اطلاعات درباره رفتار دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای در محیط‌های حرارتی پیوسته، کمک فراوانی را برای طراحی ایمن و مقرون به‌صرفه ایجاد می‌کند.

در زمینه ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای می‌توان به تحقیقات لام و لوی<sup>۱</sup> [۱]، اشاره نمود. آن‌ها تأثیر شرایط مرزی و جهت‌گیری لایه‌های کامپوزیتی را در فرکانس‌های طبیعی پوسته کامپوزیتی چندلایه ارتوتروپیک بررسی کردند. آن‌ها از تئوری لاو<sup>۲</sup> و روش ریتز استفاده نمودند. این تحقیقات در اواخر قرن نوزدهم توسط لاو [۲] ادامه یافت. لاو اولین محقق بود که برای اولین بار نظریه پوسته خطی را بر اساس فرضیه کیر شهف صفحات ارائه کرد. سایر نظریه‌ها در این مورد بر اساس نظریه لاو استوار بوده و فقط شامل تغییر در برخی از شرایط فیزیکی هستند.

خدیر و ردی<sup>۳</sup> [۳]، مطالعه را در زمینه ارتعاش، خمش و کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای مدور با استفاده از تئوری کلاسیک مرتبه اول، مرتبه سوم و روش فضای حالت انجام دادند. در سال ۱۹۷۳ لشکری و وینگاتن<sup>۴</sup> [۴] به‌صورت تحلیلی و تجربی اندازه‌گیری فرکانس طبیعی و شکل موده‌های پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای را مورد تحقیق و بررسی قرار دادند و از روش المان محدود برای پیش‌بینی فرکانس و شکل مود پوسته‌های به هم وصل شده استفاده کردند. نتیجه مطالعه آن‌ها نشان داد که ممکن است یک بخش به‌صورت مجزا ارتعاش داشته باشد؛ یعنی اینکه یک بخش ارتعاش کند بدون اینکه در بخش دیگر ارتعاش به وجود بیاورد. در سال ۱۹۹۸ مصطفی و علی<sup>۵</sup> [۵]، تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های طولی و محیطی را با استفاده از روش انرژی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها ابتدا انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی تقویت‌کننده‌ها را به‌صورت مجزا محاسبه نموده و به‌منظور دستیابی به معادله انرژی کل ترم‌های مربوط به هر کدام را با هم جمع نموده و با استفاده از روش ریلی ریتز معادله فرکانسی را استخراج کردند. ژانگ<sup>۶</sup> [۶] آنالیز ارتعاشی مقطع پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی لایه‌ای را برای شرایط مرزی مختلف و بر اساس تئوری ساندرز، با استفاده از روش انتشار موج انجام داد. ژانگ با روش گفت شده اثر پارامترهای پوسته بر فرکانس را مورد تحقیق و بررسی قرار داد. شن<sup>۶</sup> و همکاران [۷]، در یک پژوهش در سال ۲۰۰۷، خصوصیات حرارتی کامپوزیت پلیمر-نانولوله کربنی تک‌لایه را ارائه کردند. لیانگ<sup>۷</sup> و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۱ با روش المان محدود و تحلیل نرم‌افزاری علاوه بر بررسی کمانش پوسته مشبک کامپوزیتی استوانه‌ای به بررسی رفتار دینامیکی سازه پرداختند. لانگ ژائو و جی‌وو<sup>۸</sup> [۹] با استفاده از فرضیه لیروایز فرکانس‌های طبیعی و رفتارهای ارتعاشی ورق‌های چندلایه کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند و نتایج حاصله را با نتایج تحلیل تجربی مقایسه نمودند و با ترکیب روش‌های تحلیلی و تجربی به‌پیش‌بینی رفتار ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های چندلایه پرداختند.

<sup>3</sup> . Khdeir and reddy  
<sup>4</sup> .Lashkari and Weingarten  
<sup>5</sup> .Zhang  
<sup>6</sup> .Shen  
<sup>7</sup> .Liang  
<sup>8</sup> .Zhao and J. Wu

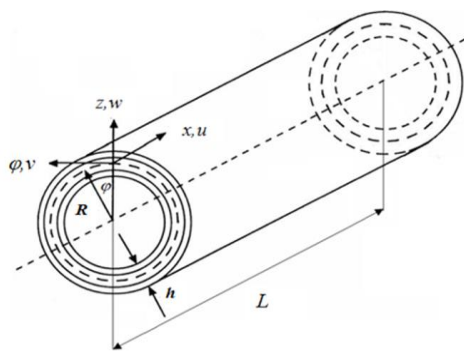
<sup>1</sup> .lam and loy  
<sup>2</sup> .love

روی خواص ارتعاش آزاد و تصادفی پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم پرداختند. در این تحقیق، آن‌ها از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی بهره‌برداری کردند و برای تحلیل خود، از روش ریلی-ریتز استفاده نمودند. نتایج به‌دست‌آمده از این روش با نتایج حاصل از روش المان محدود مورد تأیید و مقایسه قرار گرفت. پژوهش آن‌ها به بررسی اثر ابعاد هندسی و ویژگی‌های مواد بر فرکانس‌های ذاتی و پاسخ‌های تصادفی پوسته‌های ساندویچی سه‌بعدی پرداخت.

باتوجه به تحقیقات انجام‌شده در سال‌های اخیر، کارهای تحقیقاتی در حوزه پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی و هیبریدی عمدتاً به رفتار ارتعاشی بدون در نظر گرفتن تأثیر حرارت بر روی فرکانس طبیعی است. در این مقاله، با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پوسته و روش دیفرانسیلی مربعات تعمیم‌یافته، اثر حرارت بر روی رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای از جنس کامپوزیت - فلز بررسی شده است.

### معادلات حاکم

پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با مختصات استوانه‌ای در شکل ۱ نشان داده شده است. ماده تشکیل‌دهنده این کامپوزیت از گلس/اپوکسی، آرامید/اپوکسی و برن/اپوکسی می‌باشد و تحت درجه حرارت خاصی قرار گرفته است.



شکل ۱- پوسته استوانه‌ای به همراه محورهای مختصات

### میدان جا بجایی

برای به‌دست‌آوردن میدان جا بجایی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است.

رحیمی و همکارانش [۱۰] در سال ۲۰۱۴ رفتار ارتعاشی استوانه تقویت‌شده ایزوتروپ و کامپوزیتی را مورد بررسی قرار داده‌اند و برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف فرکانس طبیعی سازه را به دست آوردند. حل تحلیلی بر پایه نظریه ساندرز و به کمک روش معادل‌سازی کیدانه انجام شده است. همچنین از نرم‌افزار المان محدود آباکوس نیز برای اعتبارسنجی نتایج استفاده شده است. آن‌ها اثر پارامترهای هندسی، شرایط مرزی و زاویه تقویت‌کننده‌ها را بر فرکانس طبیعی مورد مطالعه قراردادند. سان<sup>۹</sup> و همکاران [۱۱]، مطالعات خود را بر روی ارتعاشات موج‌های غیرخطی در پوسته‌های استوانه‌ای نازک چرخان انجام دادند. در سال ۲۰۱۹ یانو<sup>۱۰</sup> و همکاران [۱۲] با پیش‌بینی تأثیر کاهش ارتعاش در جزئیات، پیشنهاد افزایش جرم و میرایی اضافه برای بررسی تأثیر ارتعاش در یک لوله را دادند. آن‌ها از روش انرژی و اصل همیلتون و همچنین روش ناویر و گلرکین استفاده کردند. بر اساس روش المان محدود سیگنا<sup>۱۱</sup> و همکارانش [۱۳] در سال ۲۰۲۰، تأثیر افزایش دما و جذب رطوبت بر روی رفتار ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی ساندویچی دوار از پیش پیچ‌خورده را مورد بررسی قراردادند. جیانگ وو<sup>۱۲</sup> و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۲۳ به بررسی ویژگی‌های ارتعاش-اکوستیک پوسته استوانه‌ای چندلایه پر از مایع تحت فشار هیدرواستاتیک اولیه پرداخته‌اند. در این تحقیقات، از تئوری لاو برای استخراج معادلات مربوطه استفاده کردند. یافته‌ها نشان داد که شرایط مرزی و زاویه الیاف تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی دارند و همچنین افزایش فشار هیدرواستاتیک داخل پوسته، منجر به افزایش سفتی و فرکانس‌های طبیعی می‌شود. در سال ۲۰۲۳، جی چو<sup>۱۳</sup> [۱۵] به بررسی ارتعاشات پنل‌های استوانه‌ای متخلخل که با صفحه‌های گرافن تقویت شده‌اند پرداخت. او از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش المان طبیعی برای تحلیل این سیستم‌ها استفاده کرد. نتایج این مطالعه نشان داد که ارتعاشات آزاد این پوسته‌های استوانه‌ای به‌طور چشمگیری تحت تأثیر الگوی توزیع و میزان تخلخل قرار دارد. در سال ۲۰۲۴، منگ<sup>۱۴</sup> و همکاران [۱۶] به انجام یک تحلیل عددی بر

9. Sun

10. Yano

11. Singha

12. J. Wu

13. J. R. Cho

14. meng

$$\begin{cases} \gamma_{xz}^0 = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{\theta z}^0 = \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ k_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \\ k_{x\theta} = \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} \end{cases} \quad (۳)$$

که در این روابط  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب، مؤلفه‌های تغییر مکان لایه میانی پوسته در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی می‌باشند و  $\varphi_x$  و  $\varphi_\theta$  به ترتیب شیب در صفحه  $X-Z$  و شیب در صفحه  $Z-\theta$  می‌باشند.

### روابط تنش- کرنش

با اضافه کردن مشخصات برشی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، روابط تنش و کرنش برای پوسته استوانه‌ای در محیط حرارتی به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_{11} \Delta T \\ \varepsilon_\theta - \alpha_{22} \Delta T \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (۴)$$

ماتریس  $[\bar{Q}]$  همان ماتریس سختی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{22} n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q) m^2 n^2 + Q_{12} (m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{22} m^4 \\ \bar{Q}_{16} &= -Q_{22} m n^3 + Q_{11} m^3 n - (Q_{12} + 2Q_{66}) m n (m^2 - n^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) + z \varphi_x \\ v(x, \theta, z) &= v_0(x, \theta) + z \varphi_\theta \\ w(x, \theta, z) &= w_0(x, \theta) \end{aligned} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varphi_\theta &= \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

که در آن  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  تغییر مکان‌های لایه میانی پوسته،  $Z$  موقعیت نقطه مورد بررسی نسبت به لایه میانی و  $\varphi_\theta$ ،  $\varphi_x$  چرخش حول محورهای  $X$  و  $\theta$  می‌باشد.

### روابط کرنش و انحناء

با داشتن میدان جابجایی برای پوسته در تئوری برشی مرتبه اول در دستگاه استوانه‌ای (روابط ۱) و روابط سینماتیکی می‌توان مؤلفه‌های میدان کرنش‌ها را به صورت زیر بیان کرد: [۱۷]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^0 + z k_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^0 + z k_{x\theta} \\ \varepsilon_{xz} &= \gamma_{xz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0 \end{aligned} \quad (۲)$$

در این روابط  $\varepsilon_x$  و  $\varepsilon_\theta$  به ترتیب، کرنش‌ها در جهت‌های محوری و محیطی و  $\varepsilon_{x\theta}$ ،  $\varepsilon_{xz}$  و  $\varepsilon_{\theta z}$  کرنش‌های برشی در فاصله  $Z$  از سطح میانی می‌باشند.  $\varepsilon_x^0$ ،  $\varepsilon_\theta^0$ ،  $\gamma_{x\theta}^0$ ،  $\gamma_{xz}^0$  و  $\gamma_{\theta z}^0$  کرنش‌های سطح میانی و  $k_x$ ،  $k_\theta$  و  $k_{x\theta}$  انحناءهای سطح میانی می‌باشند و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\theta}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (۸)$$

$$\delta U = \int_v (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dv \quad (۹)$$

### انرژی جنبشی پوسته

انرژی جنبشی [۲۱] پوسته به صورت رابطه (۱۰) و (۱۱) محاسبه می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R dz dx d\theta \quad (۱۰)$$

تغییرات انرژی جنبشی برای پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود:

$$\delta T = \int_v \rho v \delta v dv = \int_v \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dv \quad (۱۱)$$

### کار نیروی خارجی

برای یک پوسته استوانه‌ای هیبریدی که در محیط حرارتی قرار دارد، فرض می‌شود که دما می‌تواند به صورت خطی در ضخامت آن توزیع شود؛ بنابراین تغییر کار انجام شده مربوط به تغییر دما را می‌توان به صورت رابطه (۱۲) بیان کرد [۲۲].

$$W_1 = \int \left[ N^T \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{N^T}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right] dA \quad (۱۲)$$

$N^T$  نیروهای اعمالی ناشی از تغییرات دما هستند.

$$N^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\bar{Q}_{11} \alpha_{11} + \bar{Q}_{12} \alpha_{22}) \Delta T dz \quad (۱۳)$$

با قراردادن روابط (۹)، (۱۱) و (۱۲) در رابطه (۷) می‌توانیم معادلات تعادل را به صورت روابط (۱۴)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) به دست آوریم.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{26} &= -Q_{22} m^3 n + Q_{11} m n^3 + \\ & (Q_{12} + 2Q_{66}) m n (m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} m^2 + Q_{55} n^2 \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} m^2 + Q_{44} n^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) m n \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) m^2 n^2 \\ & + Q_{66} (m^2 - n^2)^2 \end{aligned} \quad (۵)$$

و داریم

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} = \frac{\nu_{21} E_1}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \\ Q_{66} &= G_{12} \\ Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13} \\ m &= \cos \theta \\ n &= \sin \theta \end{aligned} \quad (۶)$$

$E_1$  و  $E_2$  مدول‌های الاستیسیته،  $\alpha_{11}$  و  $\alpha_{22}$  ضرایب حرارتی،  $G_{12}$ ،  $G_{13}$ ،  $G_{23}$  مدول‌های برشی،  $\nu_{12}$  و  $\nu_{21}$  ضرایب پواسون هستند.

### اصل همیلتون

معادلات حاکم بر حرکت پوسته در بازه زمانی  $(t_1, t_2)$  باید اصل همیلتون را ارضا کنند. بر اساس اصل همیلتون [۱۸].

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta U - \delta T + \delta W) dt = 0 \quad (۷)$$

### انرژی کرنشی پوسته

انرژی کرنشی [۱۹]، [۲۰] پوسته به صورت زیر بیان می‌شود.

که  $M, N, Q$  و  $I$  به ترتیب نشان‌دهنده نیروی منتجه، ممان منتجه، نیروی برشی و ممان اینرسی بوده است،  $K_s$  بیانگر ضریب تصحیح برشی بوده که برابر با مقدار  $5/6$  است.

### گسسته‌سازی معادلات حرکت

ضرایب  $A_{ij}$ ،  $B_{ij}$  و  $C_{ij}$  به صورت روابط (۲۳) تعریف می‌شود:

$$\int \bar{Q}_{ij} dz = A_{ij}$$

$$\int z \bar{Q}_{ij} dz = B_{ij} \quad (23)$$

$$\int z^2 \bar{Q}_{ij} dz = D_{ij}$$

با قراردادن روابط جا بجایی و روابط تنش-کرنش در معادلات تعادل روابط (۲۴)، (۲۵)، (۲۶)، (۲۷) و (۲۸) به دست آمده است.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + A_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) +$$

$$B_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} \right) + A_{16} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) +$$

$$B_{16} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} \right) + A_{26} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (24)$$

$$+ B_{26} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) + A_{66} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} \right) +$$

$$B_{66} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta \partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} +$$

$$A_{26} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) +$$

$$B_{26} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) +$$

$$A_{66} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) +$$

$$A_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} \right) + B_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) \quad (25)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} Q_{\theta z} = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta - N^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -$$

$$N^T \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} + N_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_\theta^0 \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \quad (16)$$

$$I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_{xz} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (17)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - Q_{\theta z} = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \quad (18)$$

شرایط مرزی مختلف برای پوسته استوانه‌ای در دو انتهای آن به صورت زیر از اصل همپلتون به دست می‌آید.

شرط مرزی ساده

$$V = W = N_x = M_x = M_{x\theta} = 0 \quad (19)$$

شرایط مرزی آزاد

$$N_x = N_{x\theta} = M_x = M_{x\theta} = \varphi_{xz} = 0 \quad (20)$$

شرایط مرزی گیردار

$$U = V = W = \varphi_x = \varphi_\theta = 0 \quad (21)$$

### برآیند نیروها و ممان‌ها در چند لایه

تمامی نیروها و ممان‌هایی که بر یک چند لایه استوانه‌ای وارد می‌شود، به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\int \sigma_i dz = N_i \quad (i = x, \theta, x\theta)$$

$$\int \sigma_i z dz = M_i \quad (i = x, \theta, x\theta)$$

$$\int K_s \sigma_i dz = Q_i \quad (i = xz, \theta z) \quad (22)$$

$$\int \rho(1, z, z^2) dz = I_0, I_1, I_2$$

$$\begin{aligned}
& D_{66} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) - A_{45} \left( \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v \right) - \\
& I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0 \\
& B_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial x} + D_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta \partial x} + B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\
& B_{22} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\
& D_{22} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \right) + \\
& B_{26} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} \right) + B_{26} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \\
& D_{26} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta \partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} \right) - A_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \quad (۲۸) \\
& B_{66} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) - \\
& A_{44} \left( \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v \right) - \\
& I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}$$

### روش حل معادلات (روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته)

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته به منظور گسسته‌سازی معادلات حاکم و شرایط مرزی به کار رفته، برای بهبود روش مربعات دیفرانسیلی<sup>۱۵</sup> و نیز محاسبه ضرایب وزنی ارائه شده است. در سال‌های اخیر این روش به دلیل دقت و نرخ همگرایی بالا مورد توجه پژوهشگران شاخه‌های گوناگون علوم قرار گرفته است. ماهیت روش مربعات دیفرانسیلی مشتق جزئی تابع یکنواخت نسبت به متغیری هست که توسط مجموع وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط گسسته در آن جهت تقریب زده شده است. ضرایب وزنی مربوط به آن، به مسئله خاصی مربوط نیست و تنها به نقاط شبکه و مرتبه مشتق بستگی دارد. در این روش نقاط شبکه به صورت اختیاری و بدون هیچ محدودیتی انتخاب شده است.

$$\begin{aligned}
& A_{22} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + B_{22} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \right) + \\
& A_{44} \left( \frac{1}{R} \varphi_\theta + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} v \right) + \\
& A_{45} \left( \frac{1}{R} \varphi_x + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} = 0 \\
& A_{45} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\
& A_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - A_{11} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\
& A_{44} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \\
& B_{11} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) - A_{12} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R^2} \right) - \\
& B_{12} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) - A_{16} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \quad (۲۶) \\
& B_{16} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} \right) - \\
& \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (A_{11} \alpha_{11} \Delta T + A_{12} \alpha_{22} \Delta T) - \\
& \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} (A_{11} \alpha_{11} \Delta T + A_{12} \alpha_{22} \Delta T) - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \\
& B_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + A_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\
& B_{16} \left( \frac{2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + D_{26} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} + \quad (۲۷) \\
& D_{16} \left( \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + \\
& B_{26} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \\
& B_{66} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} \right) +
\end{aligned}$$

<sup>15</sup>. Generalized Defferential Quadrature Method

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}, i \neq j \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(1)}, i = j \end{cases} \quad (30)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N$

که در رابطه (۳۰) داریم:

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (31)$$

از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته می‌توان برای تقریب مشتق مراتب بالاتر نیز استفاده کرد. برای مشتق مرتبه  $n$ ام تابع  $f(x)$  در نقطه  $x_i$  به صورت رابطه (۳۲) بیان می‌گردد.

$$\left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^M C_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad (32)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, N$

که در آن  $C_{ij}$  ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه  $n$ ام،  $N$  تعداد نقاط شبکه و  $x_i$  مختصات نقطه  $n$ ام است. رابطه کلی برای ضرایب وزنی تقریب مشتقات مراتب بالاتر مطابق رابطه (۳۳) است:

$$C_{ij}^{(n)} = \begin{cases} n \left( C_{ij}^{(1)} C_{ii}^{(n-1)} - \frac{C_{ii}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right), i \neq j \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(n)}, i = j \end{cases} \quad (33)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N; \quad n = 2, 3, \dots, N-1$

با توجه به قانون مربعات رابطه (۳۲) ماتریسی به فرم رابطه (۳۴) است:

$$\{f(x)^n\}_j = [C^{(n)}] \{f(x)\}_j \quad (34)$$

روش مربعات دیفرانسیلی، یکی از روش‌های قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیل جزئی است که علی‌رغم استفاده از تعداد گره کم، از دقت بالایی برخوردار است. اساس این روش بر تخمین مشتق جزئی یک تابع نسبت به یک جهت مختصاتی به صورت مجموع وزنی مقادیر آن تابع در برخی نقاط مشخص استوار است.

$$f_x(x_i) = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} f(x_j) \quad (29)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, N$

در رابطه (۲۹)،  $f_x(x_i)$  مشتق تابع  $f$  نسبت به جهت مختصاتی  $x$  در نقطه  $x_i$  است و  $c_{ij}^{(1)}$  ضرایب وزنی برای تقریب مشتق اول هستند. نکته اساسی در این روش، نحوه تعیین ضرایب وزنی مناسب است. محققین مختلفی برای تعیین این ضرایب به شیوه مناسب تلاش کرده‌اند. بلمن و همکارانش [۲۳] در سال ۱۹۷۲ بر اساس دو تابع آزمون مختلف، دو شیوه برای تعیین این ضرایب پیشنهاد کردند که هر یک با محدودیت‌هایی همراه بود.

در سال ۲۰۱۱ بوچکارو و متونکو [۲۱] برای رفع این محدودیت‌ها، رابطه دیگری برای ضرایب وزنی پیشنهاد دادند، اما استفاده از این روش برای مشتقات مراتب بالاتر با دشواری‌هایی همراه بود. چانگ و شو به کمک تقریب چندجمله‌ای و آنالیز خطی فضای برداری روش مربعات تفاضلی را گسترش داده و روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته را ارائه کرد [۲۴]، وی همچنین با بکارگیری روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی را با استفاده از تئوری پوسته کلاسیک لاو مطالعه کرد [۲۵]. روشی که شو ارائه کرد، تمامی روش‌های قبل از جمله روش ارائه‌شده توسط کان و چانگ را شامل می‌شود. در روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته که در کتاب شو آمده از توابع درون‌یابی لاگرانژ برای ضرایب وزنی و به دست آوردن رابطه بازگشتی، که از نقاط شبکه و محل قرارگیری نقاط نمونه مستقل است، استفاده می‌شود.

استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته ماتریس  $K$  به صورت روابط (۳۷) الی (۴۱) به دست آمده است.

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_{11}U^{(2)} - A_{16}\frac{2n}{R}U^{(1)} - A_{66}\frac{n^2}{R^2}U + I_0\omega^2U \\ K_{12} &= A_{12}\frac{n}{R}V^{(1)} + A_{16}V^{(2)} + A_{66}\frac{n}{R}V^{(1)} - A_{26}\frac{n^2}{R^2}V \\ K_{13} &= A_{12}\frac{1}{R}W^{(1)} - A_{26}\frac{n}{R^2}W \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} K_{14} &= B_{11}\varphi_x^{(2)} - B_{16}\frac{2n}{R}\varphi_x^{(1)} - B_{66}\frac{n^2}{R}\varphi_x + I_1\omega^2\varphi_x \\ K_{15} &= B_{12}\frac{n}{R}\varphi_\theta^{(1)} + B_{16}\varphi_\theta^{(2)} + B_{66}\frac{n}{R}\varphi_\theta^{(1)} - B_{26}\frac{n^2}{R^2}\varphi_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{21} &= A_{16}U^{(2)} - A_{26}\frac{n^2}{R^2}U - A_{66}\frac{n}{R}U^{(1)} - A_{12}\frac{n}{R}U^{(1)} \\ K_{22} &= A_{66}V^{(2)} - A_{26}\frac{2n}{R}V^{(1)} - A_{22}\frac{n^2}{R^2}V - A_{44}\frac{1}{R^2}V + I_0\omega^2V \\ K_{23} &= A_{26}\frac{1}{R}W^{(1)} - A_{22}\frac{n^2}{R}W - A_{44}\frac{n}{R^2}W + A_{45}\frac{1}{R}W \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} K_{24} &= B_{16}\varphi_x^{(2)} - B_{26}\frac{n^2}{R^2}\varphi_x - B_{66}\frac{n}{R}\varphi_x^{(1)} - B_{12}\frac{n}{R}\varphi_x^{(1)} + A_{45}\frac{1}{R}\varphi_x \\ K_{25} &= B_{26}\frac{2n}{R}\varphi_\theta^{(1)} + B_{66}\varphi_\theta^{(2)} - B_{22}\frac{n^2}{R^2}\varphi_\theta + A_{55}\frac{1}{R}\varphi_\theta + I_1\omega^2\varphi_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{31} &= -A_{12}\frac{1}{R}U^{(1)} - A_{26}\frac{n}{R^2}U \\ K_{32} &= -A_{54}\frac{1}{R}V^{(1)} - A_{55}\frac{n}{R^2}V - A_{22}\frac{n}{R^2}V - A_{26}\frac{1}{R}V^{(1)} \\ K_{33} &= -A_{54}\frac{1}{R}W^{(1)} + A_{44}W^{(2)} - A_{55}\frac{n^2}{R^2}W - A_{22}\frac{1}{R}W - \\ &A_{54}\frac{1}{R}W^{(1)} + A_{11}\alpha_{11}\Delta TW^{(2)} + A_{12}\alpha_{22}\Delta TW^{(2)} - \\ &\frac{n^2}{R^2}A_{11}\alpha_{11}\Delta TW - \frac{n^2}{R^2}A_{12}\alpha_{22}\Delta TW + I_0\omega^2W \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} K_{34} &= -A_{45}\frac{n}{R}\varphi_x + A_{44}\varphi_x^{(1)} - B_{12}\frac{1}{R}\varphi_x^{(1)} + B_{26}\frac{n}{R^2}\varphi_x \\ K_{35} &= A_{55}\frac{n}{R}\varphi_\theta - B_{22}\frac{n}{R^2}\varphi_\theta - B_{26}\frac{1}{R}\varphi_\theta^{(1)} + A_{54}\frac{n}{R}\varphi_\theta^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{41} &= B_{11}U^{(2)} - B_{16}\frac{2n}{R}U^{(1)} - B_{66}\frac{n^2}{R^2}U - I_1\omega^2U \\ K_{42} &= B_{16}V^{(2)} + B_{12}\frac{n}{R}V^{(1)} - B_{26}\frac{n^2}{R^2}V + B_{66}\frac{n}{R}V^{(1)} + \\ &A_{45}\frac{1}{R}V \end{aligned} \quad (40)$$

هرچند انتخاب مختصات گره‌ها در این روش کاملاً اختیاری است و هیچ محدودیتی ندارد، اما نحوه توزیع گره‌ها بر پایداری نتایج و روند همگرایی آن‌ها تأثیرگذار است. شو نشان داد که توزیع نقطه‌ای غیریکنواخت یا همان چبیشف-گوس-لوباتو، که به انحصار توزیع چبیشف نامیده می‌شود، نتایج پایدارتری نسبت به توزیع یکنواخت خواهد داشت. این توزیع با تعداد گره‌های کم و محاسبات کمتر قادر است جواب‌هایی با دقت بیشتر به دست بیاورد. نقاط نمونه چبیشف-گوس-لوباتو:

$$X_i = \frac{L}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right) \quad (45)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N$$

در این مقاله توزیع نقاط چبیشف-گوس-لوباتو انتخاب شده و از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته استفاده شده است.

### حل معادلات پوسته استوانه‌ای با استفاده از GDQM:

میدان جابجایی در پوسته استوانه بر اساس روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{cases} u(x, \theta, t) = U(x) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ v(x, \theta, t) = V(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \\ w(x, \theta, t) = W(x) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \varphi_x(x, \theta, t) = \varphi_x(x) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \varphi_\theta(x, \theta, t) = \varphi_\theta(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \end{cases} \quad (46)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی پوسته و  $n$  شماره موج محیطی است.

### گسسته‌سازی معادلات حرکت با استفاده از روش

#### GDQM:

با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته، به صورت تبدیل هر مشتق به مجموع وزنی مقادیر گرهی از متغیرهای وابسته، می‌توان معادلات حرکت را به شکل گسسته بیان کرد، با جایگذاری روابط (۳۶) در روابط (۲۴) الی (۲۸) و

بیانگر فرکانس طبیعی سازه،  $\Omega$  فرکانس بی‌بعد سازه،  $E$  مدول الاستیسیته و  $\rho$  بیانگر چگالی مواد است. خواص مواد مکانیکی استفاده‌شده در این پژوهش در جدول ۱ ارائه‌شده است [۲۶].

### اعتبارسنجی روش حاضر با روش عددی و المان محدود

این پژوهش که از روش تحلیلی حاصل‌شده، جهت اعتبارسنجی با نتایج تحقیقات انجام‌شده مقایسه می‌گردد. بدین منظور در جدول ۲، نتایج حاصل برای فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک با نتایج ارائه‌شده در مقاله پرادهان [۲۷]، لام [۲۸] و وانگ [۲۹] مقایسه شده است. شرایط مرزی مسئله در دو انتهای پوسته گیردار، آزاد و ساده بوده و پنج مود اول فرکانس طبیعی ارائه گردیده است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، مطابقت قابل قبولی در نتایج وجود دارد. اختلاف اندک در بین جواب‌ها به علت استفاده از تئوری‌های مختلف و روش حل متفاوت می‌باشد. لام و لوی در پژوهش خودشان از تئوری تقریب لاو و روش ریلی ریتز استفاده کردند، همچنین وانگ از تئوری تغییر شکل سینوسی همراه با روش ریلی ریتز استفاده کرده است. در جدول ۳ مقایسه نتایج حاصل برای فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی ۶ لایه با زاویه الیاف متفاوت در شرایط مرزی گیردار با روش المان محدود (نرم‌افزار آباکوس) و روش تحلیلی (متلب) ارائه گردیده است، که نشان می‌دهد نتایج به‌دست‌آمده تطابق خوبی با یکدیگر دارند. در شکل ۲ یک پوسته استوانه‌ای (کامپوزیت-فلز) با لایه چینی [۳۰-۴۵-۴۵-۳۰] تحت دما ترسیم شده است. همچنین لایه چینی، مود فرکانسی اول، دوم و سوم پوسته استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز) به روش المان محدود (آباکوس) در شکل‌های ۳ و ۴ نشان داده‌شده است.

$$\begin{aligned}
 K_{43} &= B_{12} \frac{1}{R} W^{(1)} - B_{26} \frac{n}{R^2} W + A_{45} \frac{n}{R} W - A_{44} W^{(1)} \\
 K_{44} &= D_{11} \varphi_x^{(2)} - D_{16} \frac{2n}{R} \varphi_x^{(1)} - D_{66} \frac{n^2}{R^2} \varphi_x - A_{44} \varphi_x + \\
 &I_2 \omega^2 \varphi_x \\
 K_{45} &= D_{12} \frac{n}{R} \varphi_\theta^{(1)} + D_{16} n \varphi_\theta^{(1)} - D_{26} \frac{n^2}{R^2} \varphi_\theta + D_{66} \frac{n^2}{R} \varphi_\theta - \\
 &A_{45} \varphi_\theta \\
 K_{51} &= -B_{12} \frac{n}{R} U^{(1)} - B_{26} \frac{n^2}{R^2} U - B_{16} U^{(2)} - B_{66} \frac{n}{R} U^{(1)} \\
 K_{52} &= -B_{22} \frac{n^2}{R^2} V + B_{26} \frac{2n}{R} V^{(1)} + B_{66} V^{(2)} - A_{55} \frac{1}{R} V + \\
 &I_1 \omega^2 V \\
 K_{53} &= -B_{22} \frac{n}{R^2} W - D_{22} \frac{n}{R^2} W + B_{66} \frac{1}{R} W^{(1)} + A_{55} \frac{n}{R} W - \\
 &A_{45} W^{(1)} \\
 K_{54} &= -D_{12} \frac{n}{R} \varphi_x^{(1)} - D_{26} \frac{n^2}{R^2} \varphi_x - D_{16} \varphi_x^{(2)} - D_{66} \frac{n}{R} \varphi_x^{(1)} - \\
 &A_{45} \varphi_x \\
 K_{55} &= -D_{22} \frac{n^2}{R^2} \varphi_\theta + D_{26} \frac{2n}{R} \varphi_\theta^{(1)} + D_{66} \varphi_\theta^{(2)} - A_{55} \varphi_\theta + \\
 &I_2 \omega^2 \varphi_\theta
 \end{aligned} \tag{41}$$

در روابط بالا  $\varphi_x^i$ ،  $\varphi_\theta^i$ ،  $W^i$ ،  $V^i$ ،  $U^i$  مشتقات مرتبه  $i$  جابجایی‌ها می‌باشد.

### نتایج

در این بخش ارتعاش پوسته استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز)، که ساختار قسمت فلز از جنس آلومینیوم و ساختارهای کامپوزیتی مطالعه شده در این پژوهش گلس/اپوکسی، آرامید/اپوکسی و برن/اپوکسی هستند. تحلیل ارتعاش آزاد سازه برای فرکانس بی‌بعد

$$\Omega = \omega \times R \times \sqrt{\rho \times (1 - \nu^2) / E_x}$$

جدول ۱: خواص مکانیکی مواد استفاده‌شده در پوسته استوانه‌ای هیبریدی

Material	$E_x$ (Gpa)	$E_y$ (Gpa)	$G$ (Gpa)	$\nu_x$	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\alpha_{11}$	$\alpha_{22}$
Aluminium	۷۲/۴	۷۲/۴	۲۸	۰/۳۳	۲۷۰۰	۲۳	۲۳
Glass/epoxy	۳۸/۶	۸/۲۷	۴/۱۴	۰/۲۶	۱۸۰۰	۸/۶	۲۲/۱
Boron/epoxy	۲۰۴	۱۸/۵۰	۵/۵۹	۰/۲۳	۱۹۷۶	۶/۱	۳۰/۳
Aramid/epoxy	۷۶	۵/۵	۲/۳	۰/۳۴	۱۴۶۰	-۴	۷۹

واحد ضریب حرارتی (coefficients of thermal expansion) به صورت  $(\mu m / m \cdot ^\circ C)$  است

جدول ۲: مقایسه پنج فرکانس طبیعی اول  $\Omega = R\omega\sqrt{(1-\nu^2)\frac{\rho}{E}}$  برای پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک

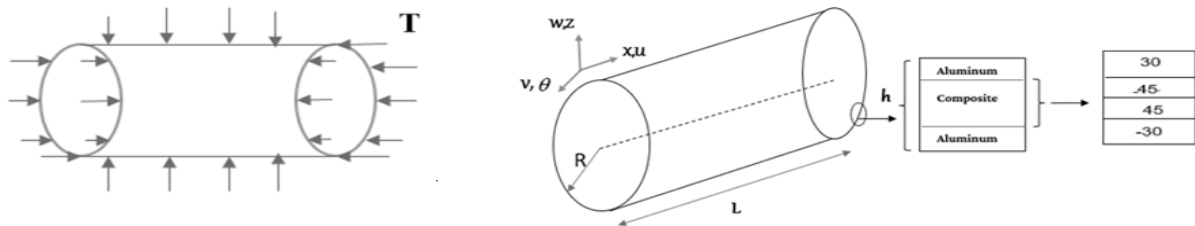
S-S (L/R=۲۰m H/R=۰,۰۱m)		C-C (L/R=۲۰m H/R=۰,۰۰۲m)				C-S (L/R=۲۰m H/R=۰,۰۰۲m)			n		
درصد خطا	Pradhan [۲۷]	نتایج حاضر	درصد خطا	Pradhan [۲۷]	Wang [۲۹]	نتایج حاضر	درصد خطا	Lam [۲۸]		Wang [۲۹]	
٪۱.۱	۰/۰۱۶۸	۰/۰۱۶۸	٪۲.۱	۰/۰۳۴۲	۰/۰۳۴۰	۰/۰۳۳۳	٪۲.۴	۰/۰۲۴۷	۰/۰۲۴۸	۰/۰۲۴۲	۱
٪۱	۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۹۵	٪۰	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۱۹	٪۱.۴	۰/۰۰۸۴	۰/۰۰۸۴	۰/۰۰۸۵۳	۲
٪۰.۴	۰/۰۲۳	۰/۰۲۲۲	٪۰	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۷۲	٪۰.۶	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۵۹	۳
٪۰.۷	۰/۰۴۳۹	۰/۰۴۲۱	٪۰	۰/۰۰۹	۰/۰۰۹	۰/۰۰۹	٪۰	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۸۷۳	۴
٪۰.۱۴	۰/۰۹۷۰	۰/۰۶۷۹	٪۰	۰/۰۱۳۷	۰/۰۱۳۷	۰/۰۱۳۷	٪۰	۰/۰۱۳۶	۰/۰۱۳۶	۰/۰۱۳۶۸	۵

$(\rho = 1600 \frac{kg}{m^3}, \nu = 0.3, E = 70Gpa)$

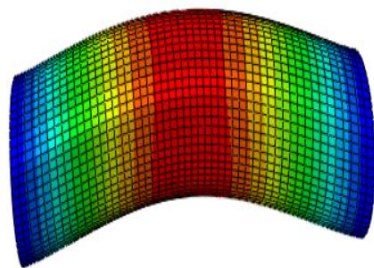
جدول ۳: مقایسه فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز) چندلایه با زاویه الیاف متفاوت در شرایط گیردار-گیردار با روش المان محدود و روش تحلیلی

زاویه الیاف		[۳۰ -۴۵ ۴۵ -۳۰]		[۶۰ -۴۵ ۴۵ -۶۰]		[۰ ۹۰ ۹۰ ۰]		m
المان محدود	نتایج حاضر	المان محدود	نتایج حاضر	المان محدود	نتایج حاضر	المان محدود	نتایج حاضر	
۱۸۰۰/۸	۱۸۴۵/۰۶	۱۸۰۸/۵	۱۷۷۳/۳۱	۱۸۲۵/۹	۱۸۹۰/۳	۱۶۴۹	۱۶۷۰	۱
۳۵۴۲/۱	۳۵۷۳/۳۱	۳۵۶۵/۶	۳۵۳۰/۶	۳۵۸۷/۲	۳۶۳۱/۷	۳۲۵۵/۶	۳۲۲۶/۸	۲

$(\frac{h}{R} = 0.02m, \rho = 2700 \frac{kg}{m^3}, \nu = 0.26, \frac{L}{R} = 5m, E_1 = 38.6 \times 10^9, E_2 = 8.27 \times 10^9, \alpha_{11} = 6.5 \times 10^{-6}, \alpha_{22} = 20.6 \times 10^{-6}, G_{12} = 4.14 \times 10^9)$

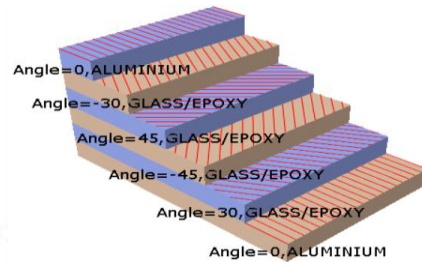


شکل ۲- پوسته استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز) تحت دما



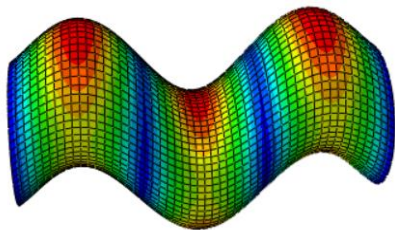
Mode 1: Value = 1.29116E+08 Freq = 1808.5 (cycles/time)

(ب)



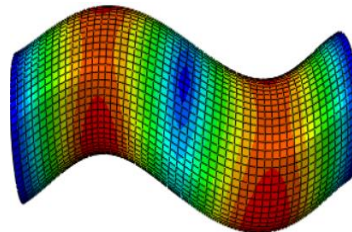
(الف)

شکل ۳- شکل مود طولی اول پوسته استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز) ۶ لایه [۳۰ -۴۵ ۴۵ -۳۰]



Freq = 5377.8 (cycles/time)

(ب)



Freq = 3565.6 (cycles/time)

(الف)

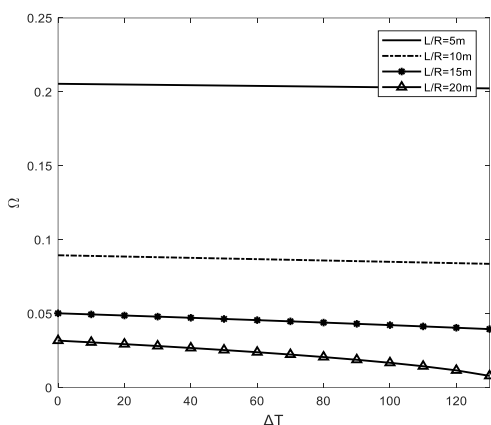
شکل ۴- شکل مود دوم پوسته استوانه‌ای هیبریدی (کامپوزیت-فلز) ۶ لایه با زاویه [۳۰-۴۵ ۴۵-۳۰]

### تأثیر دما

در طراحی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز از ۲ لایه آلومینیوم و ۴ لایه گلس/اپوکسی با زاویه الیاف [0 90 0 90] که لایه‌های کامپوزیتی در وسط و لایه فلزی شامل لایه داخلی و خارجی هست استفاده شده است. همچنین شرایط مرزی در ابتدا و انتها سازه گیردار است.

در شکل ۵ تأثیر افزایش تعداد نقاط شبکه در همگرایی جواب بررسی شده است. با توجه به نمودار با افزایش تعداد نقاط انتخابی شبکه نتایج به همگرایی خوبی رسیده است. همچنین با توجه به نمودار تعداد نقاط شبکه انتخابی برای این پژوهش ۱۵ است.

استوانه‌ای هیبریدی کاهش می‌یابد. در اثر افزایش دما خواص مکانیکی مواد فلزی و کامپوزیتی کاهش می‌یابد و به دلایل ریزساختاری خواص مواد متمایل به فلز بیشتر از مواد متمایل به کامپوزیت کاهش می‌یابد که در نتیجه استحکام کل سازه را کم می‌کند که مسئله مهمی در کاهش میزان فرکانس بی‌بعد است. اما نکته قابل توجه اینجاست که هرچه نسبت طول به شعاع بزرگ‌تر باشد، تغییرات فرکانس بیشتر تحت تأثیر بارگذاری حرارتی اولیه قرار می‌گیرد همچنین شکل ۶ نشان می‌دهد که در دمای ثابت با افزایش نسبت طول به شعاع فرکانس طبیعی بی‌بعد شده کاهش پیدا می‌کند، که در نتیجه باعث کاهش استحکام سازه می‌شود.

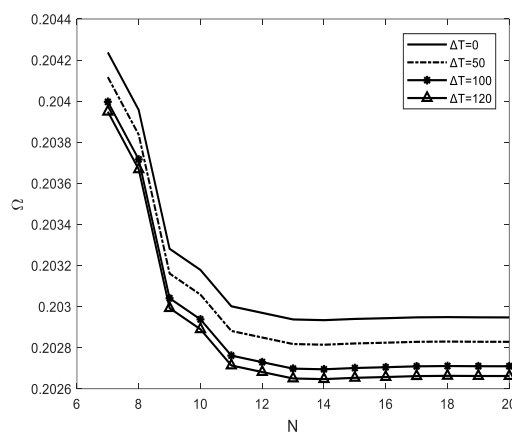


شکل ۶- تأثیر تغییرات دما بروی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده به

ازای نسبت طول به شعاع مختلف

$$\Omega = R\omega \sqrt{(1-\nu^2)} \frac{\rho}{E_1}, \frac{h}{R} = 0.002m, V_{composite} = \frac{4}{6}$$

در شکل ۷ تأثیر افزایش تعداد لایه کامپوزیت نسبت به فلز بر فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی نشان داده شده است. با توجه به شکل ۶ با افزایش تعداد لایه‌های کامپوزیت نسبت به فلز به علت کاهش سفتی سازه،



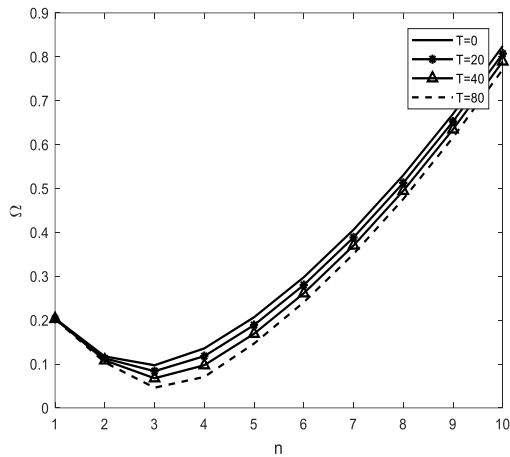
شکل ۵- تأثیر افزایش تعداد نقاط شبکه

$$\Omega = R\omega \sqrt{(1-\nu^2)} \frac{\rho}{E_1}, \frac{L}{R} = 5m, \frac{h}{R} = 0.05m$$

در شکل ۶ تأثیر دما و نسبت طول به شعاع بر روی فرکانس طبیعی بدون بعد مود جانبی اول (n=1) پوسته استوانه‌ای کامپوزیت-فلز نشان داده شده است. نتایج نشان داده است که با افزایش دما فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته

استوانه‌ای هیبریدی برحسب مود جانبی به ازای مدهای  
فرکانسی مختلف

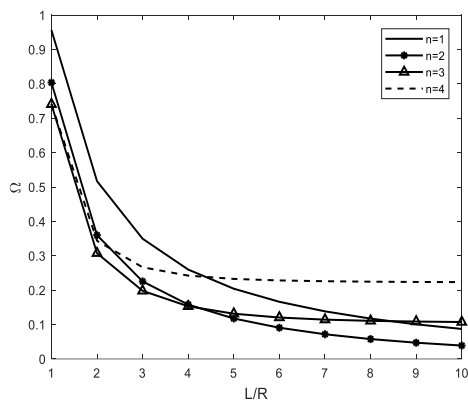
$$\Omega = R\omega \sqrt{(1-\nu^2)} \frac{\rho}{E_1}, \Delta T = 50^\circ K$$



شکل ۹- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته استوانه‌ای  
هیبریدی برحسب مود جانبی به ازای دمای مختلف

$$\Omega = R\omega \sqrt{(1-\nu^2)} \frac{\rho}{E_1}, \frac{L}{R} = 5m, \frac{h}{R} = 0.05m, V_{composite} = \frac{4}{6}$$

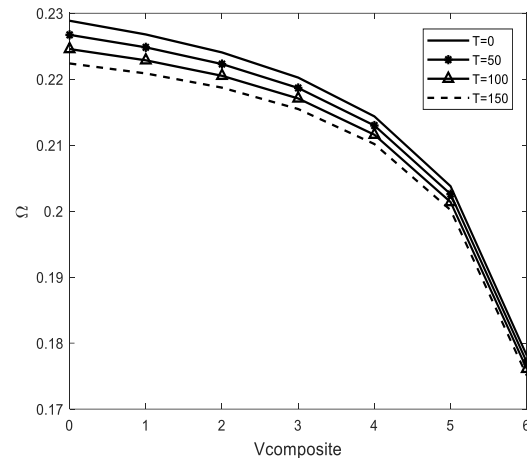
همان‌طور که در شکل ۱۰ مشخص است با افزایش نسبت طول به شعاع در شرایط مرزی گیردار-گیردار فرکانس طبیعی بی‌بعد شده، در ابتدا سریع کاهش پیدا می‌کند اما در ادامه در نسبت  $L/R > 4$  با شیب کمتری کاهش پیدا می‌کند. همان‌طور که در شکل ۱۰ مشخص است کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد در مدهای جانبی پایین‌تر بیشتر است، در نتیجه تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد در استوانه‌های بلند کمتر از استوانه‌های کوتاه است.



شکل ۱۰- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته استوانه‌ای  
هیبریدی برحسب مدهای جانبی به ازای نسبت طول به شعاع

$$\Omega = R\omega \sqrt{(1-\nu^2)} \frac{\rho}{E_1}, \frac{h}{R} = 0.05m, \Delta T = 50^\circ K, V_{composite} = \frac{4}{6}$$

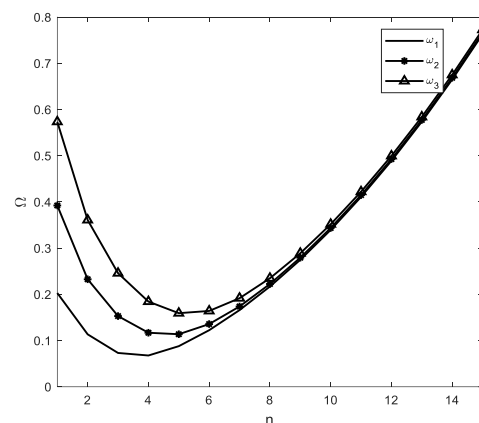
فرکانس طبیعی بی‌بعد سازه کاهش پیدا کرده است. همچنین با افزایش نسبت کامپوزیت به فلز تأثیر حرارت بر فرکانس طبیعی سازه کاهش پیدا کرده است.



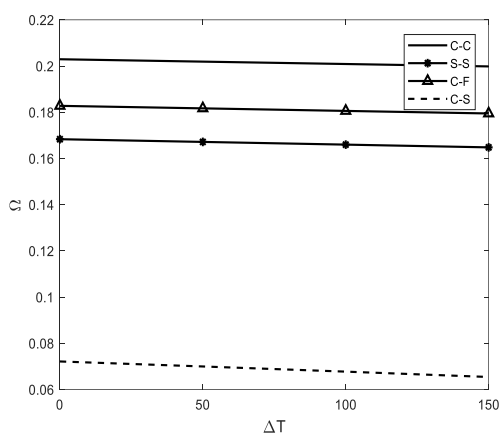
شکل ۷- تأثیر افزایش تعداد لایه کامپوزیتی نسبت فلز به ازای  
دماهای مختلف

$$\Omega = R\omega \sqrt{(1-\nu^2)} \frac{\rho}{E_1}, \frac{L}{R} = 5m, \frac{h}{R} = 0.05m$$

همان‌طور که از شکل ۸ و شکل ۹ مشخص است در مدهای  $n \leq 3$  فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و سپس در  $n > 3$  فرکانس طبیعی افزایشی می‌شود. این پدیده به این علت است که در ابتدا برای تغییر شکل سازه به نیروی کمتری احتیاج است ولی در ادامه برای تغییر شکل سازه به نیروی بیشتری نیاز هست. همان‌طور که در شکل ۸ مشخص است با افزایش مود فرکانسی، فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند، همچنین با توجه به شکل ۹ با افزایش دما فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد شده کاهش بیشتری نسبت به دماهای پایین‌تر دارند.



شکل ۸- تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد شده پوسته

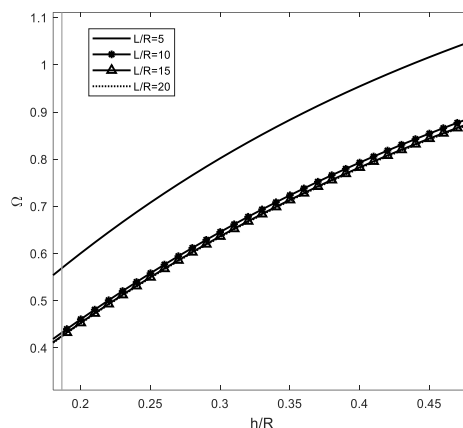


شکل ۱۲- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی بر حسب افزایش دما به ازای شرایط مرزی مختلف

$$\frac{L}{R} = 5m, \frac{h}{R} = 0.05m, \Delta T = 50^{\circ}K, V_{composite} = \frac{4}{6}$$

در جدول ۴ تأثیر مواد کامپوزیتی بکار رفته در پوسته استوانه‌ای هیبریدی روی فرکانس طبیعی بدون بعد به ازای دمای مختلف نشان داده شده است. در هر سه ماده کامپوزیتی با افزایش دما فرکانس طبیعی بی‌بعد شده کاهش پیدا کرده است. همچنین مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی در حالت برن-اپوکسی به دلیل بالا بودن مدول الاستیسیته برن، بیشتر از سایر مواد کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفته شده است.

همان‌طور که در شکل ۱۱ مشخص شده با افزایش نسبت ضخامت به شعاع فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد سازه افزایش پیدا می‌کند، همچنین در نسبت طول به شعاع کمتر فرکانس طبیعی بیشتر می‌شود که این امر باعث افزایش پایداری سازه می‌شود. در نتیجه هرچه قدر نسبت ضخامت به شعاع کمتر باشد پایداری سازه کمتر می‌شود.



شکل ۱۱- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته استوانه‌ای هیبریدی بر حسب نسبت ضخامت به شعاع ازای نسبت طول به شعاع مختلف.

$$\Delta T = 50^{\circ}K, V_{composite} = \frac{4}{6}$$

باتوجه به شکل ۱۲ با افزایش دما فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش پیدا می‌کند، همچنین در شکل مشخص است که با شرایط مرزی گیردار-گیردار فرکانس طبیعی بی‌بعد بیشتر از دیگر از شرایط مرزی مختلف است و با شیب کمتری کاهش پیدا می‌کند. بنابراین استوانه هیبریدی تحت دما با شرایط مرزی گیردار-گیردار بیشترین پایداری را نسبت به شرایط مرزی دیگر دارد.

جدول ۴: تأثیر افزایش دما بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده با به ازای الیاف‌های مختلف

Glass/epoxy	Aramid/epoxy	Boron/epoxy	$\Delta T$
۰/۰۹۳۷۹۹۴	۰/۱۰۰۷۷۴	۰/۱۶۵۵۵۵	۰
۰/۰۷۶۷۳۹۴	۰/۰۸۸۷۰۴۶	۰/۱۴۲۰۷۱	۴۰
۰/۰۵۴۵۸۵۶	۰/۰۷۴۷۰۹۲	۰/۱۱۳۸۳۹	۸۰
۰/۰۰۸۳۸۷۹۵	۰/۰۵۷۳۹۶۶	۰/۰۷۵۷۲۳۶	۱۲۰

$$(\Omega = R\omega\sqrt{1-\nu^2})\frac{\rho}{E_1}, \frac{L}{R} = 5m, \frac{h}{R} = 0.05m, V_{composite} = \frac{4}{6}$$

### نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای هیبریدی تحت تأثیر حرارت در شرایط مرزی مختلف بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته شده است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپلتون به دست آمده و با روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته حل شده است. تجزیه و تحلیل بر تأثیر افزایش دما، افزایش نسبت کامپوزیت به فلز، شرایط مرزی مختلف، الیاف مختلف، نسبت طول به شعاع، شعاع به ضخامت، مودهای محیطی و جنس کامپوزیت بکار رفته روی فرکانس طبیعی انجام شده است. نتیجه این پژوهش را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

۱. با افزایش دما فرکانس طبیعی بدون بعد کاهش پیدا می‌کند.
۲. با افزایش نسبت کامپوزیت به فلز در سازه، تأثیر حرارت بر فرکانس طبیعی سازه کمتر می‌شود.
۳. افزایش مقدار نسبت طول به شعاع پوسته همواره موجب کاهش فرکانس طبیعی سازه شده که در ابتدا این کاهش با شیب تندتری شروع شده و در ادامه با شیب کمتری کاهش می‌یابد.
۴. با افزایش مود جانبی فرکانس طبیعی بی‌بعد سازه در ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.
۵. در شرایط مرزی گیردار-گیردار پوسته استوانه‌ای هیبریدی دارای بیشترین فرکانس طبیعی پایه است.
۶. بیشترین مقدار فرکانس برای پوسته استوانه‌ای هیبریدی برای حالتی که لایه‌های کامپوزیتی از مواد برن/اپوکسی ساخته شده‌اند اتفاق می‌افتد.
۷. افزایش نسبت شعاع به ضخامت پوسته باعث کاهش فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای می‌شود.

ماتریس سختی	$K$
ممان منتهجه	$M_i$
نیروی منتهجه	$N_i$
اختلاف دما	$\Delta T$
ممان اینرسی	$I_i$
فاصله از سطح میانی	$z$
مدول برشی	$G$
مدول یانگ	$E$
نیروی برشی	$Q_i$
شمارنده مود جانبی	$n$
مود فرکانسی	$m$
زاویه الیاف کامپوزیت	$\theta$

### علائم یونانی

کرنش	$\epsilon_{ij}$
تنش	$\sigma_{ij}$
فرکانس طبیعی	$\omega$
فرکانس طبیعی بدون بعد	$\Omega$
ضریب پواسون	$\nu$
ضریب حرارتی	$\alpha_{ii}$

### منابع و مراجع

[1] K. Y. Lam and C. T. Loy, "Influence of boundary conditions and fibre orientation on the natural frequencies of thin orthotropic laminated cylindrical shells," *Compos Struct*, vol. 31, no. 1, pp. 21–30, 1995, doi: 10.1016/0263-8223(94)00054-9.

[2] A. E. H. Love, "XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell," *Philos Trans R Soc Lond A*, vol. 179, pp. 491–546, Dec. 1888, doi: 10.1098/rsta.1888.0016.

[3] A. A. Khdeir, J. N. Reddy, and D. Frederick, "A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories," *Int J Eng Sci*, vol.

### لیست علائم

ضخامت	$h$
طول استوانه	$L$
شعاع استوانه	$R$
انرژی کرنشی	$U$
انرژی جنبشی	$T$
کار نیروی خارجی	$W$
ضریب تصحیح برشی	$K_s$

Mech, vol. 225, no. 2, pp. 421–422, Sep. 2014, doi: 10.1007/s00707-013-0976-1.

[11] Y. Sun, T. Yang, and Y. Chen, “Sound radiation modes of cylindrical surfaces and their application to vibro-acoustics analysis of cylindrical shells,” *J Sound Vib*, vol. 424, pp. 64–77, 2018, doi: 10.1016/j.jsv.2018.03.004.

[12] D. Yano, S. Ishikawa, K. Tanaka, S. K.-J. of S. and Vibration, and undefined 2019, “Vibration analysis of viscoelastic damping material attached to a cylindrical pipe by added mass and added damping,” Elsevier, Accessed: Aug. 23, 2022. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X19302342>

[13] T. D. Singha, M. Rout, T. Bandyopadhyay, and A. Karmakar, “Free vibration analysis of rotating pretwisted composite sandwich conical shells with multiple debonding in hygrothermal environment,” *Eng Struct*, vol. 204, 2020, doi: 10.1016/j.engstruct.2019.110058.

[14] J. Wu, R. Liu, Y. Duan, Y. S.-I. J. of P. V. and, and undefined 2023“ ,Free and forced vibration of fluid-filled laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure ”,Elsevier , Accessed: Apr. 29, 2024. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030801612300042X>

[15] J. R. Cho, “Free Vibration Analysis of Functionally Graded Porous Cylindrical Panels Reinforced with Graphene Platelets,” *Nanomaterials* 2023, Vol. 13, Page 1441, vol. 13, no. 9, p. 1441, Apr. 2023, doi: 10.3390/NANO13091441.

[16] S. Meng, R. Zhong, Q. Wang, X. Shi, B. Q.-C. Structures, and undefined 2024 , “Vibration characteristic analysis of three-dimensional sandwich cylindrical shell based on the Spectro-Geometric method ”,Elsevier , Accessed: Feb. 10, 2024. [Online]. Available:

27, no. 11, pp. 1337–1351, 1989, doi: 10.1016/0020-7225(89)90058-X.

[4] M. Lashkari and V. I. Weingarten, “Vibrations of segmented shells - Paper discusses the results of an experimental and analytical program on the vibrations of segmented shells,” *Exp Mech*, vol. 13, no. 3, pp. 120–125, Mar. 1973, doi: 10.1007/BF02323969.

[5] B. A. J. Mustafa and R. Ali, “An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells,” *Comput Struct*, vol. 32, no. 2, pp. 355–363, 1989, doi: 10.1016/0045-7949(89)90047-3.

[6] L. Zhang, Y. Xiang, and G. W. Wei, “Local adaptive differential quadrature for free vibration analysis of cylindrical shells with various boundary conditions,” *Int J Mech Sci*, vol. 48, no. 10, pp. 1126–1138, 2006, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2006.05.005.

[7] H.-S. Shen, “Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments,” *Compos Struct*, vol. 91, pp. 9–19, doi: 10.1016/j.compstruct.2009.04.026.

[8] W. Liang, Y. He, L. L. Yang, and L. Sha, “The buckling and dynamic analysis of composite grid stiffened structure,” in *Applied Mechanics and Materials*, 2011, pp. 1794–1799. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.52-54.1794.

[9] L. Zhao and J. Wu, “Natural frequency and vibration modal analysis of composite laminated plate,” in *Advanced Materials Research*, 2013, pp. 396–400. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.711.396.

[10] M. Hemmatnezhad, G. H. Rahimi, and R. Ansari, “On the free vibrations of grid-stiffened composite cylindrical shells,” *Acta*

- [25] C. Shu and H. Du, "Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM," *Compos B Eng*, vol. 28, no. 3, pp. 267–274, 1997, doi: 10.1016/S1359-8368(96)00052-2.
- [26] R. Wishart, "Lamina and Laminate Mechanical Testing," *Composites*, pp. 766–777, Dec. 2001, doi: 10.31399/ASM.HB.V21.A0003443.
- [27] S. C. Pradhan, C. T. Loy, K. Y. Lam, and J. N. Reddy, "Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions," *Applied Acoustics*, vol. 61, no. 1, pp. 111–129, 2000, doi: 10.1016/S0003-682X(99)00063-8.
- [28] K. Y. Lam and C. T. Loy, "Effects of boundary conditions on frequencies of a multi-layered cylindrical shell," *J Sound Vib*, vol. 188, no. 3, pp. 363–384, Dec. 1995, doi: 10.1006/JSVI.1995.0599.
- [29] Y. Wang and D. Wu, "Free vibration of functionally graded porous cylindrical shell using a sinusoidal shear deformation theory," *Aerosp Sci Technol*, vol. 66, pp. 83–91, Jul. 2017, doi: 10.1016/J.AST.2017.03.003.
- [17] R. T. Wang and Z. X. Lin, "Vibration analysis of ring-stiffened cross-ply laminated cylindrical shells," *J Sound Vib*, vol. 295, no. 3–5, pp. 964–987, Aug. 2006, doi: 10.1016/j.jsv.2006.01.061.
- [18] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*. 2019. doi: 10.1002/9781119424284.
- [19] L. H. Donnell, "stability of thin-walled tubes under torsion," 1935.
- [20] M. Amabili, *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*, vol. 9780521883. 2008. doi: 10.1017/CBO9780511619694.
- [21] S. A. Bochkarev and V. P. Matveenko, "Natural vibrations and stability of a stationary or rotating circular cylindrical shell containing a rotating fluid," *Comput Struct*, vol. 89, no. 7–8, pp. 571–580, 2011, doi: 10.1016/j.compstruc.2010.12.016.
- [22] H. Chen, H. Song, Y. Li, and M. Safarpour, "Hygro-thermal buckling analysis of polymer-CNT-fiber-laminated nanocomposite disk under uniform lateral pressure with the aid of GDQM," *Eng Comput*, vol. 38, no. 2, pp. 1793–1817, Apr. 2022, doi: 10.1007/S00366-020-01102-Y.
- [23] R. Bellman and J. Casti, "Differential quadrature and long-term integration," *J Math Anal Appl*, vol. 34, no. 2, pp. 235–238, 1971, doi: 10.1016/0022-247X(71)90110-7.
- [24] S. Chang, "Generalized differential-integral quadrature and application to the simulation of incompressible viscous flows including parallel computation," 1991. Accessed: Oct. 16, 2022. [Online]. Available: <https://search.proquest.com/openview/bf17cbc5bd8c5dfb535afe2bcf7fd35d2/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2026366&diss=y>