

ارتعاشات آزاد میکروپوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته متخلخل و رویه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

هادی تیموری^{۱*}، علی نوری^۲، عنایت الله حسینیان^۳

۱- دانشجوی دکتری تخصصی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران
۲- دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران
(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۵/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۲۸)

چکیده

در این مقاله، رفتار ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته متخلخل از جنس مواد مدرج تابعی که رویه‌های آن با نانولوله‌های کربنی (CNT) تقویت شده‌اند، مورد بررسی قرار گرفته شده است. ترکیب هسته متخلخل با سطوح تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی و وصله پیزوالکتریک یک ماده ترکیبی منحصربه‌فرد ایجاد می‌کند که خواص مکانیکی را افزایش می‌دهد و وزن را کاهش می‌دهد، که ارتعاشات آزاد این مواد در میکروپوسته استوانه‌ای برای اولین بار در این مقاله مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته شده است. این مطالعه از نظریه تغییرشکل برشی و نرمال مرتبه‌ی بالا و همچنین نظریه تنش کوپل توسعه یافته (MCST) استفاده می‌کند و پوسته‌ی ساندویچی تحت تأثیر میدان یکنواخت الکتریکی قرار گرفته شده است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون بدست می‌آیند و روش نیمه‌تحلیلی ناویر برای حل آن‌ها استفاده شده است. به منظور بررسی صحت و دقت نتایج به‌دست آمده، مقایسه‌ای با جواب‌های موجود برای حالات خاص ارائه می‌گردد. تأثیر پارامترهای مختلف مانند تأثیر نسبت حجمی‌های مختلف، پارامترهای هندسی، شاخص توان، تأثیر ضریب تخلخل بر فرکانس طبیعی استوانه‌ای ساندویچی بررسی می‌شود. از جمله نتایج مهم حاصل از این تحقیق این است که با افزایش درصد نانولوله‌ها، سیستم سفت‌تر شده و به تبع آن فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد و همچنین برای سرامیک خالص فرکانس طبیعی با افزایش ضریب تخلخل به صورت صعودی افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: میکرو پوسته استوانه ساندویچی، هسته متخلخل، نانولوله‌های کربنی، تئوری تغییرشکل نرمال و برشی مرتبه‌ی بالا

Free vibrations of a sandwich cylindrical microshell with a porous core and carbon nanotube-reinforced facesheets

Hadi Teymouri^{1*}, Ali Nouri², Enayatollah Hosseinian³

Abstract

In this paper, the free vibration behavior of the sandwich cylindrical structure with a porous core composed of functionally graded materials, whose tips are reinforced with carbon nanotubes (CNT), is examined. The integration of a porous core with carbon nanotube-reinforced surfaces and a piezoelectric patch results in a distinctive composite material that enhances mechanical capabilities while minimizing weight; the free vibrations of these materials inside a cylindrical microshell have been examined for the first time in this paper. High-order shear and normal deformation theory (HSNDT), as well as modified couple stress theory (MCST), are employed in this investigation. The sandwich shell is subjected to a uniform electric field. Hamilton's principle is employed to derive the governing equations, which are then resolved using Navier's semi-analytical method. Comparisons are made with the existing answers for special cases to verify the veracity of the results we have obtained. The sandwich cylindrical natural frequency is examined in relation to a variety of parameters, including the effect of varying volumetric ratios, geometrical parameters, power index, and the porosity coefficient. One of the significant findings of this research is that the natural frequency increases as the percentage of nanotubes increases, which in turn makes the system stiffer. Similarly, the natural frequency of pure ceramics increases as the porosity coefficient increases.

Key words: Cylindrical sandwich micro shell, Porous core, Carbon nanotubes, HSNDT theory

مقدمه

یک ساختار ساندویچی متشکل از دو رویه کامپوزیتی قوی و نازک و یک هسته سبک و ضخیم و یک فیلم چسبنده می‌باشد. هرچه هسته ضخیم‌تر باشد، پنل ساندویچی سخت‌تر خواهد بود، اما این افزایش در سفتی به هیچ وجه با افزایش وزن پنل قابل مقایسه نیست [۱]. میکروپوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی، پوسته‌هایی هستند که از چندین لایه از مواد با خواص مختلف تشکیل شده‌اند و کاربردهای متعددی در زمینه‌هایی مانند هوافضا و مهندسی پزشکی دارند که در زیر به چندین مورد از آن‌ها اشاره شده است:

- طراحی سازه‌های سبک و مقاوم
- کنترل ارتعاشات
- پایش سلامت سازه
- طراحی زره‌ها و سپرهای محافظ

ساختار میکروساندویچی می‌تواند انعطاف‌پذیری و استحکام بیشتری را به پوسته ببخشد و مقاومت آن را در برابر کم‌انرژی افزایش دهد. خواص این پوسته‌ها می‌توانند با انتخاب مواد مناسب برای هر لایه سفارشی‌سازی شوند. به عنوان مثال، می‌توان از مواد سخت مانند سرامیک یا فلزات برای رویه‌های خارجی استفاده کرد تا استحکام و سختی بالا فراهم شود، در حالی که می‌توان از مواد سبک مانند فوم یا لانه زنبوری برای لایه مرکزی استفاده کرد تا وزن را کاهش دهد. به طور مشابه، می‌توان از مواد نرم مانند پلیمرها یا الاستومرها برای لایه داخلی استفاده کرد تا اثر بافری ایجاد شود. به طور کلی، میکروپوسته‌های ساندویچی استوانه‌ای به دلیل خواص منحصر به فرد خود، یک راه حل چند منظوره و موثر برای بسیاری از کاربردهای مهندسی هستند. یکی از مهمترین مزایای میکروپوسته‌ها ساندویچی استوانه‌ای، توانایی سازگاری با کاربردهای خاص بر اساس مواد انتخابی برای هر لایه است [۲]. لیو و وانگ [۳] انتشار موج در نانولوله‌های کربنی را با استفاده از تئوری پوسته الاستیک و بررسی تأثیر پارامترهای هندسی با در نظر گرفتن اثر واندروالسی بررسی کردند. اکبری و خرسند [۴] رفتار پوسته‌های استوانه‌ای گرادایانی عملکردی که بر روی لایه‌های پیزوالکتریکی قرار گرفته بود را تحت بارگذاری حرارتی و دینامیکی قرار دادند و با استفاده از روش چندجمله‌ای تفاضل (DQM)^۱ برای شرایط مرزی مختلف

بررسی کردند و نتیجه گرفتند بار الکتریکی نقش بیشتری نسبت به سایر پارامترها در توزیع تنش دارد. مورمو و همکاران [۵] رفتار مکانیکی نانولوله‌های دوجداره کربنی در حضور یک میدان مغناطیسی را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی بررسی کردند و اثبات کردند که فرکانس‌های طبیعی سیستم در حضور یک میدان مغناطیسی افزایش می‌یابد. تأثیر دما و حضور میدان الکتریکی بر فرکانس‌های طبیعی نانولوله‌های بورن نیتريد توسط قربان‌پور و امیر مورد تجزیه و بررسی قرار گرفت [۶]. بهادری و نجفی‌زاده [۷] با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول برای پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم ساخته شده از مواد گرادایانی عملکردی که خواص آنها در هر دو جهت شعاعی و محوری تغییر می‌کند، نشان دادند که در این حالت فرکانس طبیعی بیشتر از حالتی است که خواص فقط در یک جهت تغییر می‌کند. تدی بنی و همکاران [۸] نقش مقیاس طول کوچک در نانوپوسته‌های استوانه‌ای را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده، مورد تحلیل و بررسی قرار دادند؛ آنها نشان دادند که در مواد گرادایانی، افزایش پارامتر مقیاس طول کوچک، فرکانس‌های طبیعی سیستم را افزایش می‌دهد.

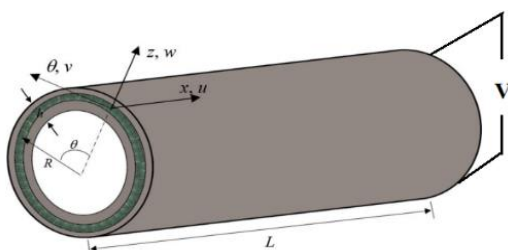
دهروه-سمنانی و همکاران [۹] نوسانات میکروتیرهای ساندویچی را با استفاده از تئوری تنش کوپل تغییر یافته، اصل همیلتون و روش حل تحلیلی ناویر مورد تحقیق و بررسی قرار دادند. محمدی‌مهر و همکاران [۱۰] رفتار انعطاف‌پذیری، کم‌انرژی و ارتعاش آزاد میکروصفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک لایه در محیط رطوبت حرارتی را مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که افزایش دما و رطوبت، سختی میکروساختارها را کاهش می‌دهد. سونگ و همکاران [۱۱] ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای مرکب گرادایانی تابع از دما تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را در محیط حرارتی بررسی کرده و نتیجه گرفتند که افزایش شماره موج مماسی (n)، فرکانس طبیعی را افزایش می‌دهد. رضوی و همکاران [۱۲] نوسانات آزاد سیلندرهای نانوپوسته پیزوالکتریکی گرادایانی (FGP)^۲ را بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده مورد بررسی قرار دادند و نتیجه گرفتند که تنظیم فرکانس، دستورالعمل‌های مفیدی برای طراحی نانوپوسته‌های پیزوالکتریکی را فراهم می‌کند. تحلیل رفتاری ارتعاشات آزاد

اساسی و مهم این سازه‌ها در ساخت اجزای مختلف صنایع نظامی مانند بدنه، بال‌ها و اجزای داخلی پرنده‌ها و همچنین در صنایع دیگر مانند مهندسی پزشکی و مهندسی برق، اهمیت مطالعه و تحقیق روی این موضوع را نشان می‌دهد. در این پژوهش، رفتار ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته‌ی متخلخل از جنس مواد مدج تابعی که رویه‌های آن با نانولوله‌ی کربنی (CNT) تقویت شده‌اند، مورد بررسی قرار گرفته شده است. این مطالعه از نظریه‌ی تغییرشکل برشی و نرمال مرتبه‌ی بالا و همچنین نظریه‌ی تنش کوپل توسعه یافته (MCST^۵) استفاده می‌کند و پوسته‌ی ساندویچی تحت تأثیر میدان یکنواخت الکتریکی قرار گرفته است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون بدست می‌آیند و روش ناور برای حل آن‌ها استفاده شده است.

مدل سازی میکروپوسته استوانه‌ای

شکل ۱ ویژگی‌های هندسی یک میکروپوسته ساندویچی را نشان می‌دهد که تحت میدان الکتریکی قرار گرفته شده است. پوسته دارای طول L ، شعاع متوسط R و ضخامت h می‌باشد که در آن h مجموع ضخامت هسته h_c و دو برابر ضخامت پوسته h_f است. هر دو سطح داخلی و خارجی پوسته تحت ولتاژ الکتریکی قرار دارند. از تئوری تنش کوپل اصلاح شده (MCST) استفاده کرده و با بکارگیری روش انرژی، معادلات حاکم بر سیستم بدست می‌آیند.

هسته پوسته ساندویچی h_c متخلخل FG است، در حالی که رویه‌های پوسته استوانه ساندویچی صفحه $(2h_f)$ با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌اند. در این پژوهش فرضیات زیر برای مدل سازی سازه مدنظر در نظر گرفته شده است:



شکل ۱- شماتیک میکروپوسته استوانه‌ای

پوسته‌های استوانه‌ای FGP^۲ براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، توسط قدیری و صفرپور [۱۳] مورد تحقیق واقع گردید. عارفی و زنکور [۱۴] انتشار امواج مغناطیسی-الکتریکی یک نانوبیم تابعتی با استفاده از مدل تیموشنکو را بررسی کرده و اثبات کردند که افزایش شاخص غیرهمگنی و شماره موج، سرعت فاز انتشار موج را کاهش می‌دهد. کماریان و شاکری [۱۵] ارتعاشات آزاد صفحات تعبیه شده با آلیاژهای حافظه‌دار را تحت بارگذاری حرارتی مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. محمدی‌مهر و همکاران [۱۶] ارتعاشات آزاد پنل استوانه‌ای مرکب تقویت شده با مقادیر مختلف نانولوله‌های کربنی را در حضور یک میدان الکتریکی-مغناطیسی مورد بررسی قرار دادند. حجلادی و همکاران [۱۷] تحلیل کمانش حرارتی سه بعدی سازه‌های مواد مدرج تابعی را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی اولیه اصلاح شده انجام دادند و متوجه شدند که پوسته‌های کاملاً سرامیکی بیشینه دمای بحرانی کمانش را دارا هستند. فن و همکاران [۱۸] مطالعه‌ای درباره نوسانات هندسی غیرخطی مبتنی بر تنش کوپل اصلاح شده میکرو ورق‌های متخلخل از جنس مواد مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند. آنها چهار مدل برای الگوهای توزیع تخلخل، به نام‌های O ، X ، U و V را بررسی کرده و متوجه شدند که وابستگی اندازه تنش کوپل بر فرکانس‌های غیرخطی برای الگوهای O و X به ترتیب ضعیف‌ترین و قوی‌ترین تأثیر را دارد. لوری دهرجی و همکاران [۱۹-۲۱] از تئوری جدید انحراف برشی و تغییرشکل عمودی بالاتر برای محاسبه اثر کشش ضخامت در تحلیل کمانش و ارتعاش آزاد میکرونانو پوسته استوانه‌ای بر مبنای تئوری تغییرشکل کوپل شده و تئوری غیرمحللی استفاده کردند و پارامترهای مهمی هم‌چون نسبت ضخامت به شعاع را مورد بررسی قرار دادند. قرقانی و همکاران [۲۲] تجزیه و تحلیل کمانش یک میکروپوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر اساس تئوری تنش جفت اصلاح شده و مدل کوپر-ناقدی را مورد بررسی قرار دادند. آنها متوجه شدند که وقتی نسبت h/L بالا است، تأثیر پارامتر مقیاس طولی مواد بر ساختار میکرو می‌تواند نادیده گرفته شود.

تا به حال، تحقیق جامعی درباره ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای با رویه‌های نانولوله کربنی و هسته متخلخل FGM، مورد بررسی قرار نگرفته شده است که با توجه به کاربردهای

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{13} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial Q}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (۵)$$

به ترتیب Q و K_{ij} ، E_m ، e_{mij} ، D_i ، Q_{ijkl} ، ε_{ij} ، σ_{ij} نشان دهنده مولفه‌های تنش و کرنش، ضرایب سفتی، مولفه‌های بردار میدان الکتریکی، ثابت‌های پیزوالکتریک، مولفه‌های میدان الکتریکی، ثابت‌های دی‌الکتریک و تابع پتانسیل الکتریکی می‌باشد. در حالت کلی روابط نسبت حجمی برای نانولوله‌ها و ماتریس تشکیل دهنده کامپوزیت‌ها بصورت زیر بیان می‌شود [۲۴]:

$$V_{NT} + V_m = 1 \quad (۶)$$

که در رابطه (۶) V_m و V_{NT} به ترتیب نسبت حجمی نانو لوله‌ها و ماتریس هستند. ضرایب سفتی با استفاده از ویژگی‌های

- از ترم‌های غیرخطی صرف نظر شده است.
- رویه‌ها، هسته و هم‌چنین وصله‌های پیزوالکتریک پوسته استوانه‌ای ساندویچی بصورت کامل بر روی هم چسبیده شده‌اند.
- برای استخراج معادلات از اصل همیلتون استفاده شده است.
- رویه‌های پوسته ساندویچی مورد نظر با CNT تقویت شده‌اند.
- از روش نیمه‌تحلیلی ناویر برای حل معادلات استفاده شده است.

با توجه به فشردگی ضخامت و استفاده از تئوری تغییر شکل نرمال و برشی مرتبه بالا، تئوری میدان جابجایی را می‌توان به صورت (۱) توصیف کرد [۲۳]:

$$\begin{cases} U(x, \theta, z) = u_0(x, \theta) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, \theta) - \psi_1 \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \theta) \\ V(x, \theta, z) = v_0(x, \theta) - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}(x, \theta) - \psi_1 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x, \theta) \\ W(x, \theta, z) = w(x, \theta) + \phi(x, \theta) + \psi_2 \chi(x, \theta) \end{cases} \quad (۱)$$

در روابط فوق، محورهای مختصات x و θ به ترتیب در امتداد طول استوانه و در امتداد محیط استوانه روی سطح میانی استوانه قرار دارند. علاوه بر این، محور z در جهت ضخامت (شعاع) استوانه قرار دارد. $u_0(x, \theta)$ و $v_0(x, \theta)$ نشان دهنده جابجایی‌های در راستای طولی و عرضی صفحه میانی است، $w_0(x, \theta)$ و $\phi_0(x, \theta)$ نشان دهنده مولفه‌های جابجایی و برش سطح میانی در جهت ضخامت هستند. همچنین $\chi(x, \theta)$ یک تابع اضافی از متغیرهای x و θ است. دو تابع مرتبط با این نظریه به صورت رابطه (۲) در نظر گرفته می‌شود [۲۳]:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \\ \psi_2 &= \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \end{aligned} \quad (۲)$$

به طور کلی، برای یک سازه با وصله‌های پیزوالکتریکی معادلات پیوستگی و جابجایی الکتریکی می‌توانند به شکل روابط زیر بیان می‌گردد [۲۳]:

$$Q(x, \theta, z, t) = -\cos(\beta \bar{z}) Q_0(x, \theta, t) + \frac{2\bar{z}V_0}{h_f} \quad (9)$$

$$\beta = \frac{\pi \bar{z}}{h_f}, \quad \bar{z} = z - \frac{h_c}{2} - \frac{h_f}{2}$$

$Q_0(x, \theta, z)$ نشان‌دهنده تغییرات پتانسیل الکتریکی در صفحه میانی و V_0 نشان‌دهنده ولتاژ الکتریکی خارجی می‌باشد. نسبت حجمی نانو لوله‌ها برای چهار ترتیب مختلف به شکل زیر تعریف می‌گردند [۲۶]:

$$V_{NT}(z) = \begin{cases} V_{NT}^* & (UD-NT) \\ (1 + \frac{2z}{H})V_{NT}^* & (FG-V-NT) \\ 2(1 - \frac{|2z|}{H})V_{NT}^* & (FG-O-NT) \\ 2\frac{|2z|}{H}V_{NT}^* & (FG-X-NT) \end{cases} \quad (9)$$

که در رابطه (۹):

$$V_{NT}^* = \frac{w_{NT}}{w_{NT} + (\rho^{NT}/\rho^m) - (\rho^{NT}/\rho^m)w_{NT}} \quad (10)$$

w_{NT} نسبت جرمی نانو لوله‌های کربنی، ρ^{NT} و ρ^m به ترتیب چگالی ماده ماتریس و نانو لوله‌های تقویت کننده هستند [۲۶]. ضرایب سفتی هسته از رابطه (۱۱) بدست می‌آید [۲۷]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{x\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{x\theta} \end{cases} \quad (11)$$

که در رابطه (۱۱) [۲۷]:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \quad (12)$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu_c E_c}{1-\nu_c^2}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G_c$$

در شکل ۲ دو مدل برای هسته ساختار نشان داده شده است که از FGM تشکیل شده است.

ماتریس (m) و نانو لوله‌ها (NT) می‌توانند به شکل زیر به دست آیند [۲۴]:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{Q_{11}^{NT} Q_{11}^m}{V_{NT} Q_{11}^m + (1-V_{NT}) Q_{66}^m} \\ Q_{12} &= Q_{11} \left(\frac{V_{NT} Q_{12}^{NT}}{Q_{11}^{NT}} + (1-V_{NT}) \frac{Q_{12}^m}{Q_{11}^m} \right) \\ Q_{13} &= Q_{11} \left(\frac{V_{NT} Q_{13}^{NT}}{Q_{11}^{NT}} + (1-V_{NT}) \frac{Q_{13}^m}{Q_{11}^m} \right) \quad (V) \\ Q_{22} &= V_{NT} Q_{22}^{NT} + (1-V_{NT}) Q_{22}^m \\ Q_{33} &= V_{NT} Q_{33}^{NT} + (1-V_{NT}) Q_{33}^m \\ Q_{66} &= \frac{Q_{66}^{NT} Q_{66}^m}{V_{NT} Q_{66}^{NT} + (1-V_{NT}) Q_{66}^m} \\ Q_{44} = Q_{55} &= \frac{Q_{66}^{NT} Q_{66}^m}{V_{NT} Q_{66}^{NT} + (1-V_{NT}) Q_{66}^m} \end{aligned}$$

و همچنین ثابت‌های پیزوالکتریک و دی‌الکتریک بصورت زیر تعریف می‌گردند [۲۵]:

$$\begin{aligned} e_{24} &= V_{NT} e_{24}^{NT} + (1-V_{NT}) e_{24}^m \\ e_{32} &= V_{NT} e_{32}^{NT} + (1-V_{NT}) e_{32}^m \\ e_{31} &= Q_{11} \left(\frac{(1-V_{NT}) e_{31}^{NT}}{Q_{11}^{NT}} + \left(\frac{V_{NT} e_{31}^m}{Q_{11}^m} \right) \right) \\ e_{15} &= \frac{e_{15}^{m, NT}}{V_{NT} e_{15}^m + (1-V_{NT}) e_{15}^{NT}} \quad (8) \end{aligned}$$

$$K_{11} = (1-V_{NT}) K_{11}^m + V_{NT} k_{11}^{NT}$$

$$K_{22} = (1-V_{NT}) K_{22}^m + V_{NT} k_{22}^{NT}$$

$$K_{33} = (1-V_{NT}) K_{33}^m + V_{NT} K_{33}^{NT}$$

با توجه به مرجع [۲۵]، توابع پتانسیل الکتریکی نیز بصورت زیر تعریف می‌گردد:

پیزوالکتریک و هسته متخلخل FGM به کمک اصل همیلتون بدست آمده است. اصل همیلتون برای به دست آوردن معادلات حرکت حاکم بر ارتعاشات آزاد سیستم استفاده شده است که شامل انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروهای خارجی است. اصل همیلتون در حالت کلی بصورت زیر نوشته می شود [۲۸]:

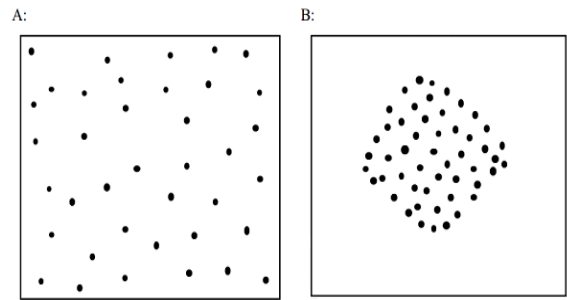
$$\int_{t_1}^{t_2} (-\delta T + \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (15)$$

که در رابطه (۱۵) δW ، δU ، δT به ترتیب تغییرات انرژی جنبشی، پتانسیل و کار حاصل از نیروهای خارجی می باشد. برای نشان دادن تأثیر اندازه نانوکامپوزیت ها، از نظریه تنش کوپل اصلاح شده استفاده شده است. بر اساس این نظریه، انرژی کرنش به صورت زیر بیان می گردد [۲۹]:

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + m_{ij} \delta \chi_{ij} - D_i \delta E_i \} dV \\ m_{ij} &= 2l^2 Q_{66} \chi_{ij} \\ \chi_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla \theta + \nabla \theta^T) \\ \theta &= \frac{1}{2} (\text{curl } \vec{u}) \end{aligned} \quad (16)$$

که m_{ij} نشان دهنده اجزای تانسور تنش مرتبه بالا است، χ_{ij} نشان دهنده بخش همسان تانسور فشردگی است و l پارامتر تنش کوپل توسعه یافته است. بخش اول تغییر انرژی کرنش برابر است با:

$$\begin{aligned} \delta U_1 &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dV = \iiint \{ \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_x \delta \varepsilon_x + \\ &\tau_{z\theta} \delta \gamma_{z\theta} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta} \} rdz d\theta dx = \\ &\iint_A \left\{ \delta u_0 \left[-\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_{x\theta}}{\partial \theta} \right] + \right. \\ &\delta v_0 \left[-\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_{\theta z} \right] + \\ &\delta \chi \left[N_{3z} + Q_{2\theta} - \frac{\partial Q_{2\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\partial N_{2xz}}{\partial x} \right] + \\ &\delta w \left[-\frac{\partial^2 M_{2\theta}}{\partial \theta^2} + Q_\theta - \frac{\partial^2 M_{3x}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial M_{2\theta z}}{\partial \theta} \right] + \\ &\delta \phi \left[-\frac{\partial^2 Q_{3\theta}}{\partial \theta^2} + Q_\theta - \frac{\partial^2 M_{4x}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{4x\theta}}{\partial x \partial \theta} - \right. \\ &\left. \left. \frac{\partial Q_{2\theta z}}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial Q_{3\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\partial N_{2xz}}{\partial x} \right] \right\} dx d\theta \end{aligned} \quad (17)$$



شکل ۲- A: توزیع یکنواخت تخلخل ها (FGM-I)، B: توزیع ناهموار تخلخل ها (FGM-II)

هسته به صورت تابع درجه بندی شده و متخلخل است. E ، مدول الاستیسیته یانگ، ν ، نسبت پواسون، G ، مدول برشی و ρ چگالی جرمی می باشد. معادلات پوسته ناقص برای توزیع تراکم یکنواخت (FGM-I) به صورت زیر بیان می گردند [۲۷]:

$$\begin{aligned} E_c(z) &= E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_c} \right)^N - \frac{\alpha}{2} (E_c + E_m) \\ \nu_c(z) &= \nu_m + (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_c} \right)^N - \frac{\alpha}{2} (\nu_c + \nu_m) \\ \rho_c(z) &= \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_c} \right)^N - \frac{\alpha}{2} (\rho_c + \rho_m) \\ G_c &= \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)} \end{aligned} \quad (13)$$

α نشان دهنده ضریب تراکم است. برای توزیع ناهمواری تراکمی نوع II متخلخل FG معادلات به صورت زیر تعریف می شود [۲۷]:

$$\begin{aligned} E_c(z) &= E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_c} \right)^N - \frac{\alpha}{2} (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h_c} \right) \\ \nu_c(z) &= \nu_m + (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_c} \right)^N - \frac{\alpha}{2} (\nu_c + \nu_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h_c} \right) \\ \rho_c(z) &= \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_c} \right)^N - \frac{\alpha}{2} (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h_c} \right) \\ G_c &= \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)} \end{aligned} \quad (14)$$

اصل همیلتون و معادلات حاکم بر سازه

در این بخش معادلات میکروپوسته استوانه ای با رویه های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی تحت وصله های

$$\begin{aligned}
 m_{ij} &= 2Q_{66}l^2\chi_{ij}, Y_{0ij} = \int_{-H/2}^{H/2} m_{ij}dz, (i, j = x, \theta, z) \\
 Y_{ij} &= \int_{-H/2}^{H/2} r m_{ij}dz, Y_{1ij} = \int_{-H/2}^{H/2} \frac{1}{r} m_{ij}dz, \\
 T_{0ij} &= \int_{-H/2}^{H/2} \psi_2 m_{ij}dz, T'_{0ij} = \int_{-H/2}^{H/2} \psi_2' m_{ij}dz \\
 T_{1ij} &= \int_{-H/2}^{H/2} r \psi_2 m_{ij}dz, T'_{1ij} = \int_{-H/2}^{H/2} r \psi_2' m_{ij}dz \\
 T_{2ij} &= \int_{-H/2}^{H/2} \frac{1}{r} \psi_2 m_{ij}dz, T_{3ij} = \int_{-H/2}^{H/2} (1+\psi_1') m_{ij}dz \\
 T'_{3ij} &= \int_{-H/2}^{H/2} \psi_1'' m_{ij}dz, T_{4ij} = \int_{-H/2}^{H/2} \frac{1}{r} (1+\psi_1') m_{ij}dz \\
 T_{5ij} &= \int_{-H/2}^{H/2} r \psi_1'' m_{ij}dz, T'_{4ij} = \int_{-H/2}^{H/2} r (1+\psi_1') m_{ij}dz
 \end{aligned} \quad (20)$$

و برای بخش سوم انرژی کرنشی داریم:

$$\begin{aligned}
 \delta U_3 &= \frac{1}{2V} \int -(D_i \delta E_i) dV = \\
 -\iiint \{ -D_x \delta E_x - D_\theta \delta E_\theta - D_z \delta E_z \} rdz d\theta dx &= \\
 \iint_A \left[\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta} + p_z \right] dx d\theta
 \end{aligned} \quad (21)$$

که در رابطه (۲۱) داریم:

$$\begin{aligned}
 \delta U_3 &= \frac{1}{2V} \int -(D_i \delta E_i) dV = \\
 -\iiint \{ -D_x \delta E_x - D_\theta \delta E_\theta - D_z \delta E_z \} rdz d\theta dx &= \\
 \iint_A \left[\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta} + p_z \right] dx d\theta \\
 (p_x, p_\theta, p_z) &= \int_{-h_c/2}^{-h_c/2-h_f} (D_x r \cos(\beta\bar{z}), \\
 D_\theta \cos(\beta\bar{z}), r \beta D_z \sin(\beta\bar{z})) dz + \\
 \int_{h_c/2+h_f}^{h_c/2} (D_x r \cos(\beta\bar{z}), D_\theta \cos(\beta\bar{z}), \\
 r \beta D_z \sin(\beta\bar{z})) dz
 \end{aligned} \quad (22)$$

که در رابطه (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned}
 N_{ij} &= \int_{-H/2}^{H/2} r \sigma_{ij} dz = \int_{-h_c/2}^{-h_c/2-h_f} r \sigma_{ij} dz + \\
 \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_f} r \sigma_{ij} dz + \int_{h_c/2}^{h_c/2} r \sigma_{ij} dz & \quad (i, j = x, \theta, z) \\
 Q_{ij} &= \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{ij} dz, M_{ij} = \int_{-H/2}^{H/2} z \sigma_{ij} dz, \\
 N_{2ij} &= \int_{-H/2}^{H/2} r \psi_2 \sigma_{ij} dz, N_{3ij} = \int_{-H/2}^{H/2} r \psi_2 \sigma_{ij} dz
 \end{aligned} \quad (18)$$

بخش دوم تغییر انرژی کرنش برابر است با:

$$\begin{aligned}
 \delta U_2 &= \frac{1}{2V} \int (m_{ij} \delta \chi_{ij}) dV = \\
 \iiint \{ m_z \delta \varepsilon \chi_z + m_\theta \delta \varepsilon \chi_\theta + m_x \delta \chi_x + 2m_z \theta \delta \chi_z \theta + \\
 2m_{zx} \delta \chi_{zx} + m_{x\theta} \delta \chi_{x\theta} \} rdz d\theta dx &= \\
 \iint_A \left\{ \delta u_0 \left[-\frac{\partial Y_{1z}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 Y_{1\theta z}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 Y_{0xz}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial Y_{1\theta}}{\partial \theta} \right] + \right. \\
 \delta v_0 \left[\frac{\partial^2 Y_{0\theta z}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x^2} + Y_{1xz} \right. \\
 \left. - \frac{\partial Y_{0\theta}}{\partial x} + \frac{\partial Y_{1x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial Y_{0x}}{\partial x} \right] + \\
 \delta \chi \left[\frac{\partial T'_{1\theta z}}{\partial x} - \frac{\partial T_{0\theta z}}{\partial x} + \frac{\partial T_{2xz}}{\partial \theta} - \frac{\partial T'_{0xz}}{\partial \theta} - \right. \\
 \left. \frac{\partial^2 T_{0\theta}}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial^2 T_{1x\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{2x\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T_{0x}}{\partial x \partial \theta} \right] \\
 + \delta w \left[-2 \frac{\partial Y_{0\theta z}}{\partial x} + 2 \frac{\partial Y_{1xz}}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial^2 Y_{0\theta}}{\partial x \partial \theta} - \right. \\
 \left. 2 \frac{\partial^2 Y_{x\theta}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 Y_{1x\theta}}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 Y_{0x}}{\partial x \partial \theta} \right] \\
 \left. \delta \phi \left[-\frac{\partial T'_{3xz}}{\partial \theta} - \frac{\partial T_{3\theta z}}{\partial x} + \frac{\partial T_{5\theta z}}{\partial x} + \frac{\partial T_{4xz}}{\partial \theta} - \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{\partial^2 T_{3\theta}}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial^2 T'_{4x\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{4x\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T_{3x}}{\partial x \partial \theta} \right] \right\} dx d\theta
 \end{aligned} \quad (19)$$

در رابطه (۱۹):

که در رابطه (۲۶) داریم:

$$N_x = N_{Ex}, N_\theta = N_{E\theta}$$

$$N_{Ex} = N_{E\theta} = - \int_{-h_c/2}^{-h_c/2-h_f} \frac{2e_{31}V_e}{h_f} dz - \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_f} \frac{2e_{31}V_e}{h_f} dz \quad (27)$$

در رابطه (۲۷) N_E نیروی الکتریکی در راستای x و θ می‌باشد. با قرار دادن ترم‌های تغییرات انرژی جنبشی، پتانسیل و کار حاصل از نیروهای خارجی در معادله ۱۵ و انتگرال‌گیری‌های لازم معادلات ارتعاشات آزاد میکروپوسته استوانه‌ای بدست می‌آیند.

روش حل معادلات

در این بخش، روش حل برای میکروپوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با هسته متخلخل مدرج تابعی و صفحات روبه‌روی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تحت وصله‌های پیزوالکتریک داده شده است. با توجه به اینکه پوسته استوانه‌ای بر روی تکیه‌گاه‌های ساده سوار شده است، از روش نیمه تحلیلی ناویر برای حل معادلات ارتعاشات آزاد استفاده شده است که بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$u_o = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{0mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) e^{i\omega t}$$

$$v_o = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{0mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t}$$

$$w = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \quad (28)$$

$$\phi = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) e^{i\omega t}$$

$$\chi = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) e^{i\omega t}$$

$$Q_o = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{0mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) e^{i\omega t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T = \delta u_0 \left[I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} \right] + \delta v_0 \left[I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - S_0 \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial t^2} - S_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta \partial t^2} \right] + \delta \chi \left[I_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right] + \delta w \left[I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + S_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - I_6 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} + S_0 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} - S_2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} - S_3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right] + \delta \phi \left[I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_6 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - I_7 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} + S_1 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} - S_3 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} - S_4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right] \quad (24)$$

در رابطه (۲۴):

$$(I_0, I_1, I_2, I_3) = \int_{-H/2}^{H/2} \rho r(1, z, \psi_1, \psi_2) dz =$$

$$(I_4, I_5, I_6, I_7) = \int_{-H/2}^{H/2} \rho r(\psi_2^2, z^2, z\psi_1, \psi_1^2) dz$$

$$(S_0, S_1, S_2) = \int_{-H/2}^{H/2} \rho(z, \psi_1, \frac{z^2}{r}) dz, \quad (25)$$

$$(S_3, S_4) = \int_{-H/2}^{H/2} \rho(\frac{z}{r}\psi_1, \frac{\psi_1^2}{r}) dz$$

کار نیروی خارجی به شرح زیر است:

$$\delta W = \iint_A -[N_x R \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - N_\theta \frac{\partial^2 W}{R \partial \theta^2}] \delta W dx d\theta =$$

$$\delta w \left[-N_x R \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{N_\theta}{R} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} - N_x R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{N_\theta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - N_x R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{N_\theta}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] \quad (26)$$

$$+ \delta \phi \left[-N_x R \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{N_\theta}{R} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} - N_x R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{N_\theta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - N_x R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{N_\theta}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right]$$

جدول ۱- مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعدی برای پارامترهای اندازه

مختلف			مراجع
(l=h)	(l=0)		
-	۰/۹۱۳		[۲۹]
۱/۱۲۲	-	n=1	[۲۴]
۱/۱۷۸۵	۰/۹۷۸۴		تحقیق حاضر
-	۰/۷۶۲		[۲۹]
۱/۰۴۶	-	n=2	[۲۴]
۱/۱۴۳۸	۰/۸۱۹۷		تحقیق حاضر
-	۰/۶۹۹		[۲۹]
۱/۱۳۶	-	n=3	[۲۴]
۱/۳۰۷۵	۰/۷۴۶۴		تحقیق حاضر

جدول ۲- مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعدی برای ضرایب تخلخل مختلف و اعداد موج محیطی مختلف برای نوع یکنواخت

n=2	n=1	α
۱/۲۳۸۷	۱/۲۴۲۹	[۳۰]
۱/۲۱۸۴	۱/۲۲۳۱	تحقیق حاضر
۱/۲۱۱۸	۱/۲۱۵۵	[۳۰]
۱/۱۹۱۲	۱/۱۹۵۴	تحقیق حاضر
۱/۱۸۶۲	۱/۱۸۹۳	[۳۰]
۱/۱۶۵۱	۱/۱۶۸۷	تحقیق حاضر

نتایج عددی

در این قسمت به تحلیل نتایج عددی مربوط به میکروپوسته استوانه‌ای با هسته متخلخل FG تشکیل شده از سرامیک (Si3N4) و فلز (SUS304) و همچنین رویه‌ها با ماتریس BiTiO3-CoFe2O4 تقویت شده با CNT ارائه می‌گردد. که در جداول ۳ و ۴، مشخصات این مواد آورده شده است. شکل ۳، تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعدی به نسبت شعاع به ضخامت (R/H) پوسته استوانه‌ای میکروساندویچی برای تخلخل‌های نوع I و II را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت شعاع به ضخامت میکروپوسته، فرکانس طبیعی بی‌بعدی افزایش می‌یابد. با افزایش نسبت شعاع به ضخامت، سازه سفت‌تر می‌شود و مقدار فرکانس طبیعی سیستم افزایش می‌یابد و همچنین مقادیر فرکانس طبیعی برای نفوذپذیری نوع II بیشتر

در رابطه (۲۸) ω نشان دهنده فرکانس طبیعی سیستم است. با جایگذاری روابط بالا در معادلات حاکم ارتعاشات آزاد سازه مدنظر که بصورت معادلات دیفرانسیل جزئی می‌باشند به معادلات جبری همگن تبدیل می‌شوند، که به عنوان معادلات خصوصیت شناخته می‌شوند و در آخر به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \quad (29)$$

در اینجا، K و M به ترتیب نشان دهنده ماتریس‌های سختی و جرم سیستم هستند. با حل معادله بالا فرکانس‌های طبیعی سیستم بدست آمده و هم‌چنین با استفاده از رابطه (۳۰) بی‌بعد می‌گردند:

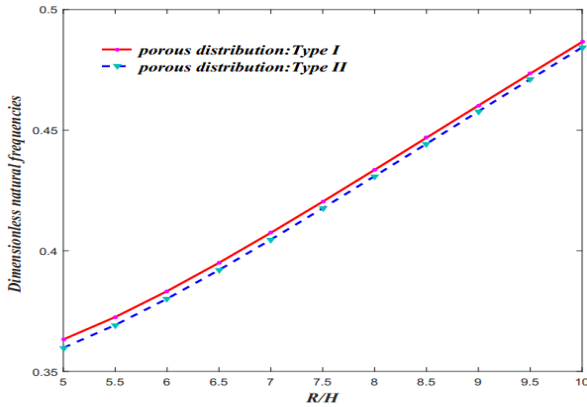
$$\Omega = R\omega \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \quad (30)$$

نتایج

معادلات تحلیلی مربوط به رفتار ارتعاشی میکروپوسته استوانه‌ای ساندویچی تحت میدان الکتریکی ارائه گردید. نکته قوت هر پژوهش ارائه نتایج درست و دقیق می‌باشد که برای ارائه این نتایج، ملزم به صحت سنجی معادلات ارائه شده مربوط به ارتعاشات آزاد با نتایج موجود در ادبیات فن است. سپس بررسی پارامترهای موثر بر پاسخ میکروپوسته در قالب نتایج جدید ارائه خواهد شد.

صحت سنجی نتایج

قبل از ارائه نتایج عددی ارتعاشات آزاد سازه، اعتبارسنجی با مقالات قبلی در جدول ۱ و جدول ۲ آورده شده است. مقایسه‌ای از فرکانس طبیعی بی‌بعدی در جداول برای یک پوسته نانو استوانه‌ای همگن همسانگرد به ازای اعداد موج محیطی و نسبت‌های ضخامت به شعاع مختلف در جدول ۱ بررسی شده است. هم‌چنین در جدول ۲ اعتبارسنجی بر اساس تخلخل هسته از نوع یکنواخت (نوع I) ارائه شده است. این مقایسه‌ها نشان می‌دهد که نتایج عددی بدست آمده در این پژوهش، هم‌خوانی قابل قبولی با مقالات دیگر دارد.



شکل ۳- تأثیر نسبت R/H بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته

استوانه‌ای میکروساندویچی برای تخلخل نوع I و II

تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع L/R پوسته استوانه‌ای میکروساندویچی در شکل ۴ نشان داده شده است. با افزایش نسبت طول به شعاع پوسته استوانه‌ای ساندویچی، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد و این کاهش برای هسته سرامیکی غنی بیشتر از سایر هسته‌های متخلخل FG می‌باشد. به طور کلی، با افزایش این نسبت، ضخامت پوسته کاهش می‌یابد. هنگامی که ضخامت پوسته کاهش می‌یابد، سفتی انعطافی پوسته نیز کاهش یافته که منجر به کاهش فرکانس طبیعی سازه می‌گردد.

شکل ۵ نشان می‌دهد که با افزایش درصد نانو لوله‌ها، سیستم سفت‌تر شده و به تبع آن، فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد. افزودن نانولوله‌های کربنی (CNTs) به ماتریس پلیمری می‌تواند خواص مکانیکی ماده کامپوزیت حاصل را به‌طور قابل توجهی تغییر دهد. وقتی نسبت حجمی نانولوله‌ها در یک کامپوزیت افزایش یابد، به این معنی است که بیشتر نانولوله‌ها در سراسر ماتریس پلیمری پخش شده‌اند. این منجر به افزایش سفتی ماده کامپوزیت می‌شود، زیرا لوله‌های نانویی به مراتب سفت‌تر از ماتریس پلیمری هستند. با این حال، افزایش سفتی می‌تواند منجر به افزایش فرکانس طبیعی ماده کامپوزیت شود.

از نوع I است. نسبت بی‌بعد شعاع به ضخامت یک پارامتر مهم در مطالعه مکانیک سازه، به ویژه در تحلیل سازه‌های نازک مانند پوسته‌ها و صفحه‌ها می‌باشد.

جدول ۳- ویژگی‌های مکانیکی نانولوله کربنی (CNT) [۳۱]

$Q_{11}=5/8249, Q_{22}=Q_{33}=7/3037, Q_{12}=Q_{13}=1/01937,$ $Q_{44}=Q_{55}=Q_{66}=1/9445$	ضرایب الاستیسیته (Gpa)
۱۴۰۰	چگالی kg/m3
۰/۱۷۵	ضریب پواسون
۰/۱۷۵	نسبت حجمی

جدول ۴- ویژگی‌های مکانیکی و الکتریکی برای ماتریس صفحه

روبرو $BiTiO_3-CoFe_2O_4$ هسته [۳۰ و ۳۱]

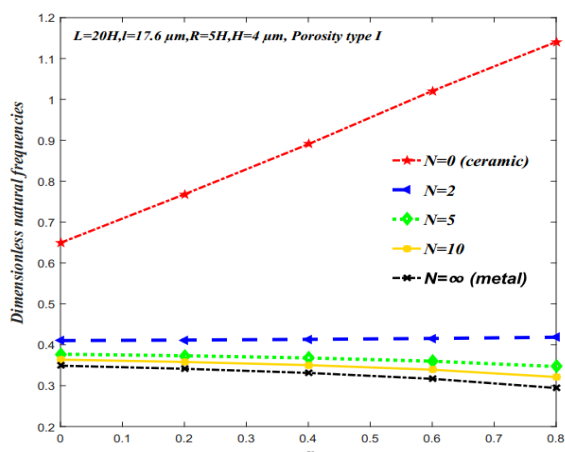
نوع ماده	
$Q_{11}=Q_{22}=226, Q_{33}=216,$ $Q_{12}=125, Q_{13}=124,$ $Q_{44}=Q_{55}=44/2,$ $Q_{66}=50/5$	ضرایب الاستیسیته (Gpa)
$5/55 * 10^{-3}$	(kg/m3) چگالی
۰/۲۵	ضریب پواسون
$e_{31}=e_{32}=-2/2, e_{24}=5/8,$ $e_{15}=5/5, e_{33}=3/9$	ضرایب پیزوالکتریک (c.m2)
$k_{11}=k_{22}=5/64 * 10^{-9};$ $k_{33}=6/35 * 10^{-9}$	ضرایب دی‌الکتریک
۳۲۲/۲۷	مدول الاستیسیته Ceramic (Gpa)
۲۳۷۰	چگالی Ceramic (kg/m3)
۲۰۷/۷۹	مدول الاستیسیته Metal (Gpa)
۸۱۶۶	چگالی Metal (kg/m3)

(BiTiO₃-CoFe₂O₄)

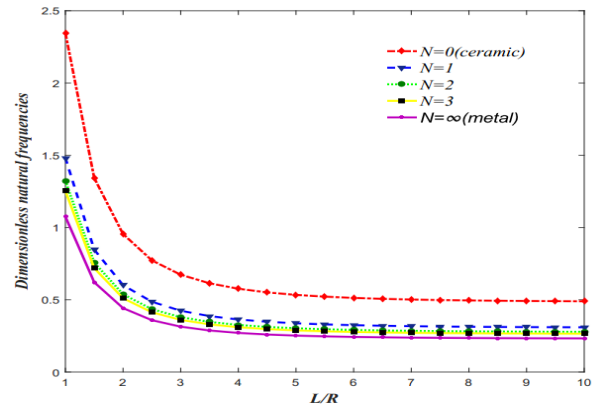
Ceramic (Si₃N₄)
Metal (SUS304)

صعودی یا نزولی تغییر کند. شکل ۷ تأثیر تغییر در ضریب تخلخل بر دو نوع توزیع یکنواخت تخلخل نوع (I) و توزیع نایکنواخت تخلخل نوع (II) را مقایسه می‌کند. با توجه به شکل ۷، مشاهده می‌شود که تخلخل نوع یکنواخت نسبت به نوع نایکنواخت تحت تأثیر ضریب تخلخل بیشتری قرار می‌گیرد. تأثیر پارامتر بی‌بعد و تغییر شاخص توان مواد FG بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برای تئوری تنش‌های مرتبط به اندازه با توجه به میزان تخلخل نوع I در شکل ۸، نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد، با افزایش پارامتر بی‌بعد اندازه، فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد و بیشترین فرکانس طبیعی برای مواد سرامیکی غنی با $N=0$ و کمترین فرکانس مربوط به مواد فلزی با $N=\infty$ می‌باشد.

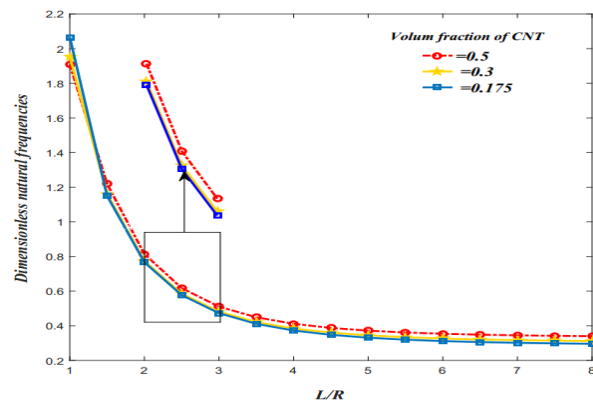
تأثیر ضخامت ورق بر روی فرکانس طبیعی سیستم در شکل ۹ نشان داده شده است. طبق نمودار نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت صفحه روبرو، سازه سفت‌تر شده و بنابراین فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. اگر ضخامت صفحه‌های رویه افزایش یابد، سختی ساختار کامپوزیت نیز افزایش می‌یابد. شکل ۱۰ فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای میکروساندویچی را برای توزیع مختلف CNTها در لایه‌های صفحه نشان می‌دهد. با توجه به نمودار می‌توان مشاهده کرد که توزیع نوع FG-X از CNTها بیشترین فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد را دارد، در حالی که توزیع نوع FG-V و FG-O مقادیری نزدیک به هم دارند و کمترین فرکانس طبیعی نرمال شده را دارا می‌باشند. بنابراین، شکل توزیع تقویت کننده‌ها می‌تواند بر سفتی سیستم تأثیر بگذارد.



شکل ۶- تأثیر ضریب تخلخل بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای میکروساندویچی برای شاخص‌های مختلف

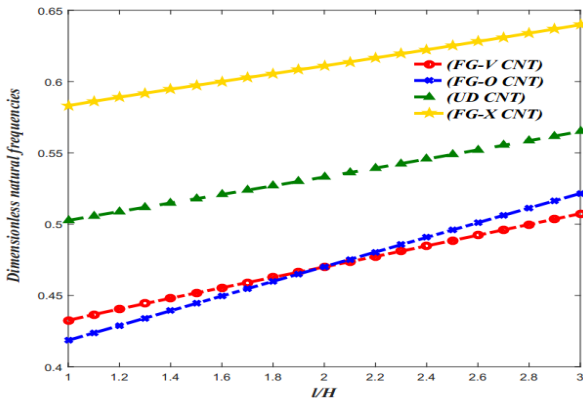


شکل ۴- تأثیر نسبت L/R بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای میکروساندویچی برای شاخص‌های مختلف تخلخل نوع I

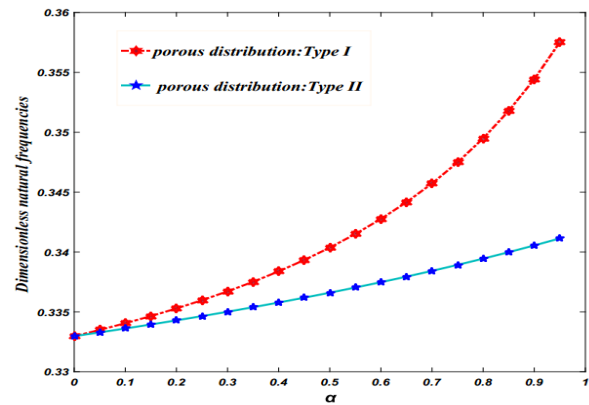


شکل ۵- تأثیر نسبت حجمی CNT بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای میکروساندویچی

شکل ۶ و شکل ۷ تأثیر ضریب حجمی تخلخل α بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد میکروپوسته استوانه‌ای ساندویچی را نشان می‌دهند. نتایج نشان می‌دهد که برای $N=0$ (سرامیک خالص)، فرکانس طبیعی با افزایش ضریب تخلخل به صورت صعودی افزایش می‌یابد، دلیل این رفتار این است که با افزایش ضریب تخلخل هسته، حفره‌ها بزرگتر می‌شوند و سختی میکروپوسته استوانه‌ای کاهش می‌یابد، از طرفی جرم میکروپوسته نیز کاهش می‌یابد و اثر این کاهش جرم میکروپوسته نسبت به کاهش سختی آن بیشتر می‌باشد، بنابراین فرکانس سیستم افزایش می‌یابد؛ اما برای $N=2$ ، فرآیند افزایش فرکانس با افزایش ضریب تخلخل بسیار کند و تقریباً ثابت می‌ماند. برای $N=5$ ، $N=10$ و فلز خالص، روند تغییر فرکانس طبیعی برعکس می‌شود و با شیبی کمتر از سرامیک خالص کاهش می‌یابد. بنابراین، بسته به نمایه توان، فرکانس طبیعی ممکن است با تغییرات در ضریب تخلخل به صورت



شکل ۱۰- تأثیر توزیع نانولوله‌های کربنی بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد میکرو پوسته استوانه‌ای ساندویچی

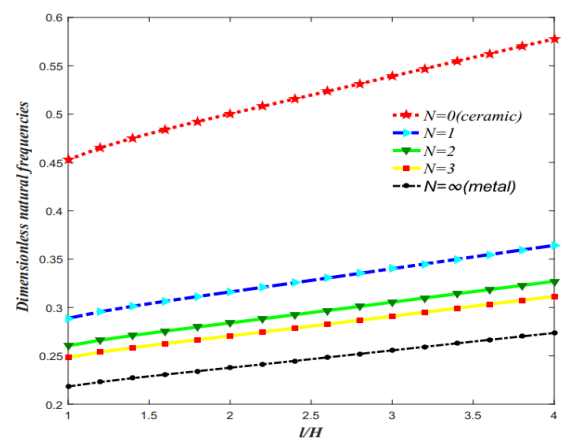


شکل ۷- مقایسه تغییرات فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد در دو نوع توزیع تخلخل برای ضرایب تخلخل

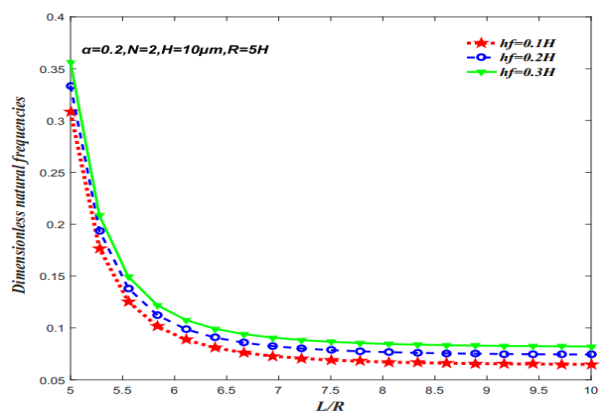
نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تحلیل و بررسی ارتعاشات آزاد میکرو پوسته استوانه‌ای ساندویچی با استفاده از نظریه تغییرشکل برشی و نرمال مرتبه بالا با در نظر گرفتن اثرات فشردگی ضخامت و همچنین نظریه‌ی تنش کوپل توسعه یافته (MCST)، بررسی شده است. پوسته‌های استوانه‌ای ساختارهای ساده، مفید و بسیار مهمی هستند که در صنایع مختلف و جنبه‌های مختلف مهندسی به طور گسترده استفاده می‌شوند. میکروپوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی، پوسته‌هایی هستند که از چندین لایه از مواد با خواص مختلف تشکیل شده‌اند و کاربردهای متعددی در زمینه‌هایی مانند هوافضا و مهندسی پزشکی دارند. ساختار میکروساندویچی می‌تواند انعطاف‌پذیری و استحکام بیشتری را به پوسته ببخشد و مقاومت آن را در برابر کماتش افزایش دهد. در سال‌های اخیر، برای عملکرد بهتر این ساختارها در فشار و دمای بالا نیاز به موادی با خواص مکانیکی و استحکام بالا بوجود آمده است. به همین دلیل از مواد مدرج تابعی برای ساخت آنها استفاده شده است. به طور کلی مواد مدرج تابعی از ترکیب مؤلفه‌های فلزی و سرامیکی تشکیل شده‌اند.

در این تحقیق ابتدا معادلات ارتعاشی سازه با استفاده از تئوری نرمال و برشی مرتبه بالا و نظریه‌ی تنش کوپل توسعه یافته و با کمک اصل همیلتون بدست آمدند. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل نیز با کمک روش ناویر که دارای دقت قابل قبولی بوده و در علوم مهندسی به فراوانی استفاده می‌شود، حل گردیدند. به منظور بررسی صحت و دقت نتایج به دست آمده، مقایسه‌ای با جواب‌های موجود برای حالات خاص ارائه



شکل ۸- تأثیر نسبت L/H بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای میکروساندویچی برای تخلخل نوع اول



شکل ۹- تأثیر ضخامت ورق روی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای میکرو ساندویچی

2011.

[5] Murmu, T., McCarthy, M.A., Adhikari, S., "Vibration response of double-walled carbon nanotubes subjected to an externally applied longitudinal magnetic field: a nonlocal elasticity approach", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 331, No 23, pp. 5069-5086, 2012.

[6] Arani, A.G., Amir, S., "Electro-thermal vibration of visco-elastically coupled BNNT systems conveying fluid embedded on elastic foundation via strain gradient theory", *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 419, pp. 1-6, 2013.

[7] Bahadori, R., Najafizadeh, M.M., "Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded axisymmetric cylindrical shell on Winkler-Pasternak elastic foundation by First-order Shear Deformation Theory and using Navier-differential quadrature solution methods", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 16, pp. 4877-4894, 2015.

[8] Beni, Y.T., Mehralian, F., Razavi, H., "Free vibration analysis of size-dependent shear deformable functionally graded cylindrical shell on the basis of modified couple stress theory", *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 65-78, 2015.

[9] Dehrouyeh-Semnani, A.M., Dehrouyeh, A.M., Torabi-Kafshgari, M., Nikkhab-Bahrami, M. A., "damped sandwich beam model based on symmetric-deviatoric couple stress theory", *International of Engineering Science*, Vol. 92, pp. 83-94, 2015.

[10] Mohammadimehr, M., Salemi, M., Navi, B.R., "Bending, buckling, and free vibration analysis of MSGT microcomposite Reddy plate reinforced by FG-SWCNTs with temperature-dependent material properties under hydro-thermo-mechanical loadings using DQM", *Composite Structures*, Vol. 138, pp. 361-380, 2016.

[11] Song, Z.G., Zhang, L.W., Liew, K.M., "Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded composite cylindrical shells in thermal environments", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 115-116,

گردید. مهم‌ترین نتایج حاصل از این پژوهش را می‌توان به شکل زیر جمع‌بندی نمود:

- مقادیر فرکانس طبیعی برای نفوذپذیری نوع II بیشتر از نوع I است.
- با افزایش درصد نانو لوله‌ها، سیستم سفت‌تر شده و به تبع آن، فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد.
- برای سرامیک خالص فرکانس طبیعی با افزایش ضریب تخلخل به صورت صعودی افزایش می‌یابد و برای فلز خالص، روند تغییر فرکانس طبیعی برعکس می‌شود و با شبیهی کمتر از سرامیک خالص کاهش می‌یابد.
- افزایش پارامتر بی‌بعد اندازه، فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد.
- با افزایش ضخامت صفحه روبرو، سازه سفت‌تر شده و بنابراین فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. این به این دلیل است که صفحه‌های رویه، اجزای اصلی کامپوزیت هستند و به طرز قابل توجهی در سفتی سازه سهیم هستند.
- توزیع نوع FG-X از CNTها بیشترین فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد را دارد.

مراجع

- [1] Teymouri, H., Biglari H., "Elastodynamic Green's functions for sandwich panels with aluminum foam core and transversely isotropic face sheets using potential functions method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 160, pp. 258-272, 2024.
- [2] Aria, A.I., Friswell, M.I., "A nonlocal finite element model for buckling and vibration of functionally graded nanobeams", *Composites Part B Engineering*, Vol. 160, pp. 233-246, 2019.
- [3] Liew, K.M., Wang, Q., "Analysis of wave propagation in carbon nanotubes via elastic shell theories", *International of Engineering Science*. Vol. 45, No. 2-8, pp. 227-241, 2007.
- [4] Alashti, R.A., Khorsand, M., "Three-dimensional thermo-elastic analysis of a functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers by differential quadrature method", *International Journal of Pressure Vessels Piping*, Vol. 88, No. 5, pp. 167-180,

- [19] Dehsaraji, M.L., Arefi, M., Loghman, A., "Three dimensional free vibration analysis of functionally graded nano cylindrical shell considering thickness stretching effect", *Steel and Composite Structures*, Vol. 34, No. 5, pp. 657-670, 2020.
- [20] Dehsaraji, M.L., Loghman, A., Arefi, M., "Three-dimensional thermo-electro-mechanical buckling analysis of functionally graded piezoelectric micro/nano-shells based on modified couple stress theory considering thickness stretching effect", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 28, No. 19, pp. 2030-2045, 2021.
- [21] Dehsaraji, M.L., Arefi, M., Loghman, A., "Size dependent free vibration analysis of functionally graded piezoelectric micro/nano shell based on modified couple stress theory with considering thickness stretching effect", *Defence Technology*, Vol. 17, No. 1, pp. 119-134, 2021.
- [22] Ghareghani, S., Loghman, A., Mohammadimehr, M., "Analysis of FGM micro cylindrical shell with variable thickness using Cooper Naghdi model: bending and buckling solutions", *Mechanics Research Communications*, Vol. 115, pp. 103739, 2021.
- [23] Nami, M.R., Janghorban, M., Damadam, M., "Thermal buckling analysis of functionally graded rectangular nanoplates based on nonlocal third-order shear deformation theory", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 41, pp. 7-15, 2015.
- [24] Zeighampour, H., Beni, Y.T., "A shear deformable cylindrical shell model based on couple stress theory", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 85, pp. 539-553, 2015.
- [25] Ke, L.L., Liu, C., Wang, Y.S., "Free vibration of nonlocal piezoelectric nanoplates under various boundary conditions", *Phys. E Low-dimensional System and Nanostructures*, Vol. 66, pp. 93-106, 2015.
- [26] Alshenawy, R., Sahmani, S., Safaei, B., Elmoghazy, Y., Al-Alwan, A., Al Nuwairan, M., "Three-dimensional nonlinear stability analysis of axial-thermal-electrical loaded FG pp. 339-347, 2016.
- [12] Razavi, H., Babadi, A.F., Beni, Y.T., "Free vibration analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical nanoshell based on consistent couple stress theory", *Composite Structures*. Vol. 160, pp. 1299-1309, 2017.
- [13] Ghadiri, M., SafarPour, H., "Free vibration analysis of size-dependent functionally graded porous cylindrical microshells in thermal environment", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 40, No. 1, pp. 55-71, 2017.
- [14] Arefi, M., Zenkour, A.M., "Wave propagation analysis of a functionally graded magneto-electro-elastic nanobeam rest on Visco-Pasternak foundation", *Mechanics Research Communications*, Vol. 79, pp. 51-62, 2017.
- [15] Kamarian, S., Shakeri, M., "Natural frequency analysis of composite skew plates with embedded shape memory alloys in thermal environment", *AUT Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 179-190, 2017.
- [16] Mohammadimehr, M., Okhravi, S.V., Akhavan Alavi, S., "Free vibration analysis of magneto-electro-elastic cylindrical composite panel reinforced by various distributions of CNTs with considering open and closed circuits boundary conditions based on FSDT", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 24, No. 8, pp. 1551-1569, 2018.
- [17] Hajlaoui. A., Chebbi, E., Dammak, F., "Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded material structures using a modified FSDT-based solid-shell element", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. Vol. 194, pp. 104547, 2021.
- [18] Fan, F., Xu, Y., Sahmani, S., Safaei, B., "Modified couple stress-based geometrically nonlinear oscillations of porous functionally graded microplates using NURBS-based isogeometric approach", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 372, pp. 113400, 2020.

piezoelectric microshells via MKM strain gradient formulations”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 439, pp. 127623, 2023.

[27] Lang, Z., Xuwu, L., “Buckling and vibration analysis of functionally graded magneto-electro-thermo-elastic circular cylindrical shells”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 4, pp. 2279-2292, 2013.

[28] Biglari, H., Teymouri, H., Foroutan, M., “Application of Auxetic Core to Improve Dynamic Response of Sandwich Panels Under Low-Velocity Impact”, *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 49, pp. 11683-11697, 2024.

[29] Alibeigloo, A., Shaban, M., “Free vibration analysis of carbon nanotubes by using three-dimensional theory of elasticity”, *Acta Mechanica*, Vol. 224, pp. 1415-1427, 2013.

[30] Wang, Y., Wu, D., “Free vibration of functionally graded porous cylindrical shell using a sinusoidal shear deformation theory”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 66, pp. 83-91, 2017.

[31] Yazdani, R., Mohammadimehr, M., Navi, B.R., “Free vibration of Cooper-Naghdi micro saturated porous sandwich cylindrical shells with reinforced CNT face sheets under magneto-hydro-thermo-mechanical loadings”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 70, No. 3, pp. 351-365, 2019.