

بهینه‌سازی فرکانس پایه صفحات کامپوزیتی به روش شبیه‌سازی تبرید

امیرحسین ترک زاده^۱، وحید خلفی^{۲*}، حمیدرضا زارعی^۳

- ۱- مدرس، دانشکده پرواز، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران
۲- استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران
۳- استاد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران
(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۱۱/۰۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۰۴)

چکیده

هدف اصلی از این مطالعه، تعیین زاویه‌های لایه‌چینی صفحات کامپوزیتی به‌منظور دستیابی به فرکانس طبیعی پایه بیشینه است. در این راستا، معادلات حرکت با استفاده از تئوری کلاسیک صفحه‌ها بیان شده‌است و تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد صفحه با اعمال شرایط مرزی مختلف ارائه شده‌است. به‌منظور تحلیل عددی رفتار ارتعاشات آزاد از روش شناخته‌شده دیفرانسیل کوادراچر تعمیم‌یافته استفاده شده‌است. این روش، مشتقات جزئی تابع در یک نقطه را توسط سری خطی متشکل از مقادیر وزن‌یافته همان تابع در تمام نقاط دامنه، تخمین می‌زند. سپس با استفاده از این روش به گسسته‌سازی معادلات حاکم بر صفحه پرداخته شده‌است. معادلات گسسته‌سازی شده حاکم بر صفحه با استفاده از روش تحلیل مقادیر ویژه حل شده‌اند. سپس به‌منظور دستیابی به فرکانس پایه بیشینه از روش الگوریتم شبیه‌سازی تبرید (Simulated SA) (Annealing)، بهره‌گرفته شده‌است. بر اساس نتایج به‌دست‌آمده، روش دیفرانسیل کوادراچر روش عددی مناسبی است که در بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی از مدت زمانی کمی بهره می‌برد و مطابق با تحقیقات انجام شده تا کنون این روش با الگوریتم شبیه‌سازی تبرید جهت بهینه‌سازی ارتعاشات آزاد صفحات چند لایه کامپوزیتی ترکیب نشده‌است. استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر و الگوریتم شبیه‌سازی تبرید ابزاری مناسب جهت بهینه‌سازی صفحات کامپوزیتی با هزینه زمانی کم ارائه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: شبیه‌سازی تبرید، بهینه‌سازی فراابتکاری، ارتعاش آزاد، فرکانس طبیعی، دیفرانسیل کوادراچر، کامپوزیت

Optimization of fundamental frequency of composite plates by simulated annealing method

Amirhassan Torkzadeh, Vahid Khalafi, Hamidreza Zarei

Abstract

The main goal of this paper is to determine the stacking angles of composite plates in order to achieve the maximum fundamental natural frequency. In this regard, the equations of motion have been expressed using the Classic Laminat Plate Theory (CLPT), and the free vibration analysis of the plate has been done by applying different boundary conditions. In order to numerically analyze the behavior of free vibrations, the well-known generalized quadrature differential method has been used. This method estimates the partial derivatives of the function at a point by a linear series consisting of the weighted values of the same function at all points of the domain. Then, using this method, discretization of governing equations of the plate has been done. The discretized equations governing the plate have been solved using the eigenvalue analysis method. Then, in order to achieve the maximum fundamental frequency, the Simulated Annealing (SA) method is used. According to the obtained results, the differential quadrature method is found to be a suitable numerical method that requires short computation time to obtain natural frequencies. So far, this method has not been combined with the simulated annealing algorithm for optimizing the free vibrations of composite laminated plates, according to previous research. The combination of the differential quadrature method and the simulated annealing algorithm provides an effective tool for optimizing composite plates with minimal time cost.

Key words: Simulated Annealing, Metaheuristic Optimization, Free Vibration, Natural Frequency, fundamental frequency, Differential Quadrature, Composite.

مقدمه

یکی از موضوعات مهم در طراحی سازه‌ها تحلیل ارتعاشات است. هدف از انجام این تحلیل، تلاش برای تأخیر در وقوع پدیده تشدید است. به همین منظور، به دلیل نزدیک بودن فرکانس پایه سازه به شرایط تشدید، بررسی این فرکانس از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از طرفی، صفحات تخت کامپوزیتی به‌عنوان یکی از اجزاء مهم که کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف نظیر عمران، مکانیک و ... دارند؛ شناخته می‌شوند. در طراحی لایه‌ها، بهینه‌سازی فرکانس پایه با هدف کاهش خطر تشدید ایجادشده بر اثر تحریک خارجی، به اهمیت بررسی این موضوع می‌افزاید. می‌توان در فرایند بهینه‌سازی، فرکانس پایه‌ی یک صفحه کامپوزیتی، تعداد و نوع مواد، ضخامت لایه‌ها و جهت الیاف را مورد بررسی قرار داد. البته باید به این نکته توجه نمود که در بسیاری از کاربردهای مهندسی استفاده از لایه‌های استاندارد با ضخامت معین و تعداد محدودی از زوایا مرسوم است. در بررسی این مسئله، علی‌رغم هندسه ساده، محدوده پاسخ‌ها می‌تواند بسیار وسیع باشد به‌نحوی که بررسی این موضوع به شیوه معمول بسیار زمان‌بر است. به‌منظور تبیین و بیان ساده این مفهوم، در بهینه‌سازی صفحات کامپوزیتی متقارن به شیوه معمول دارای لایه، با فرض زوایای لایه‌چینی به‌عنوان متغیر طراحی، بررسی حالت در محدوده زاویه مورد نیاز است. دستیابی به این هدف با شرایط بیان شده، مستلزم زمان و ابزارهای پیشرفته محاسباتی است.

یکی از مسائل مهم در مسائل بهینه‌سازی کاهش زمان محاسباتی است. برای دستیابی به این هدف، می‌توان از روش‌های نوین عددی که به حل مسائل نسبت به روش‌های پیشین سرعت بخشیده‌اند، بهره گرفت. به همین منظور، با پیشرفت ابزارهای محاسباتی، مهندسان به‌منظور تحلیل پدیده‌های فیزیکی و دستیابی سریع به پاسخ دقیق، روش‌های نوین عددی را به کار بستند. ریچارد بلمن^۱ روش دیفرانسیل کوادراچر^۲ را در دهه هفتاد میلادی معرفی نمود [۱]. این روش مشتقات جزئی تابع در یک نقطه را توسط یک‌سری خطی متشکل از مقادیر وزن‌یافته همان تابع در تمام نقاط دامنه، تخمین می‌زند. محققان با تلاش به‌منظور توسعه روش

دیفرانسیل کوادراچر، این روش را تبدیل به یک روش با همگرایی سریع کرده‌است [۲]. لیو^۳ و لئو^۴ به مطالعه ناپیوستگی هندسی و مادی در صفحات نسبتاً ضخیم با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر پرداخته‌اند. در این تحقیقات ارتعاش آزاد و کماتش صفحات مستطیلی شکل بررسی شده‌است. در این پژوهش از تئوری برشی مرتبه اول استفاده شده است و سه مسئله که عبارتند از صفحه با شرایط مرزی ترکیبی، صفحه دارای ناپیوستگی مادی و صفحه دارای ترک مرکزی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. نتایج حاصل از این پژوهش به دقت این روش تأکید می‌کند و با افزایش طول ترک مقدار فرکانس‌ها و بار کاهش پیدا می‌کند [۵-۳]. لیو در پژوهش‌های دیگر با استفاده از این روش به بررسی رفتار استاتیک و ارتعاش آزاد صفحات منحنی شکل دارای ناپیوستگی پرداخت [۷ و ۶]. خلفی و شاهوردی (۲۰۱۴)، به بررسی رفتار آیرودینامیک^۵ صفحه متشکل از مواد هدفمند^۶ در جریان مافوق و ماورای صوت توسط روش دیفرانسیل کوادراچر پرداخته‌اند. در این پژوهش معادلات حاکم بر صفحه بر اساس نظریه کلاسیک ورق استخراج شده‌اند و رفتار سازه غیرخطی در نظر گرفته شده است [۸]. فرسادی و همکاران (۲۰۲۰) با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر ناپایداری دینامیکی صفحات کامپوزیت با سختی متغیر مورد مطالعه قرار دادند [۹]. شاهوردی و همکاران [۱۰، ۱۱] روش دیفرانسیل کوادراچر را برای بررسی رفتار دینامیکی صفحات بر اساس تئوری کلاسیک صفحه برای شرایط مرزی مختلف، و هندسه‌های پیچیده و دارای ترک توسعه دادند. آنها همچنین با ترکیب روش دیفرانسیل کوادراچر و الگوریتم ژنتیک بهینه‌سازی ارتعاشات آزاد صفحات چند لایه کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند [۱۲].

الگوریتم شبیه‌سازی تبرید^۷ (SA)، یک الگوریتم بهینه‌سازی فراابتکاری ساده و اثربخش در حل مسائل بهینه‌سازی در فضاهای جستجوی بزرگ است. این الگوریتم بیشتر زمانی استفاده می‌شود که فضای جستجو گسسته باشد. برای مسائلی که پیدا کردن یک پاسخ تقریبی برای بهینه کلی مهم‌تر از پیدا کردن یک پاسخ دقیق برای بهینه محلی در زمان

³ Liew

⁴ Liu

⁵ Aerothermoelastic

⁶ Functionally Graded Material

⁷ Simulated Annealing (SA)

¹ Richard Bellman

² Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)

محدود و مشخصی است، تبرید شبیه‌سازی شده ممکن است نسبت به باقی روش‌ها مانند گرادیان کاهش‌ی دارای ارجحیت باشد [۱۳]. به همین دلیل در این مطالعه، به توسعه ترکیب روش دیفرانسیل کوادراچر و الگوریتم شبیه‌سازی تبرید برای بهینه‌سازی فرکانس پایه صفحات کامپوزیتی پرداخته شده است که بدین منظور برای شبیه‌سازی سازه، از تئوری کلاسیک صفحه‌ها استفاده شده است. برای حل معادلات حاکم بر سازه از روش دیفرانسیل کوادراچر و به منظور بهینه‌سازی فرکانس پایه از روش الگوریتم شبیه‌سازی تبرید، استفاده شده است.

برت^۸ به عنوان یکی از پیش‌تازان این عرصه نتایجی را برای حداکثر فرکانس اساسی یک ورقه متعادل متقارن کامپوزیتی به کمک روش بهینه‌سازی تبرید ارائه داد [۱۴]. برت همین مسئله را برای صفحات با شرایط مرزی متفاوت در نظر گرفت. در هر دو این مطالعات، اثرات خمش - پیچش با کمک فرکانس‌های شناخته شده قبلی برای به دست آوردن یک راه‌حل به شکل بسته تقریبی شد، بنابراین دانش پیشینی در مورد فرکانس اساسی لایه‌هایی که دارای توالی‌های انباشته خاصی هستند، مورد نیاز بود [۱۵]. ویکتورام فرانکو^۹ و همکاران [۱۶] مدل‌های بهینه شده برای طراحی سازه‌های تطبیقی با استفاده از روش شبیه‌سازی تبرید ارائه دادند که در آن به کمک مدل‌های المان محدود بهینه شده و بر اساس میدان‌های جابه‌جایی مرتبه بالاتری که برای رفتار مکانیکی و الکتریکی سازه‌های چندلایه کامپوزیتی با محرک‌ها و حسگرهای پیزوالکتریک تعبیه شده و یا پیوند سطحی اعمال می‌شوند، مطالعات خود را انجام داده‌اند. طرح اجرا شده در این مطالعه، همان‌طور که در مورد روش‌های مبتنی بر گرادیان با متغیرهای طراحی پیوسته دیده شده است، به بازیابی همگرایی زودرس به یک بهینه محلی، بدون اینکه نیاز به شروع مجدد فرآیند طراحی بهینه باشد، کمک نموده است و دو مثال گویا و ساده‌ای ارائه و در مورد آن‌ها بحث نموده‌اند. علی و همکاران [۱۷] در از الگوریتم شبیه‌سازی تبرید مستقیم، به منظور بهینه‌سازی متغیرهای پیوسته در لایه‌های کامپوزیتی استفاده نمودند که در یافتن بهترین بهینه سراسری (حداکثر یا حداقل) از میان تعداد زیادی از نقاط بهینه محلی دشواری‌های ذاتی‌ای نهفته است که برای مواجه شدن با چنین مشکلات

بهینه‌سازی‌ای، روش‌های جستجوی مستقیم روش‌های انتخابی مناسبی هستند و شبیه‌سازی تبرید یک الگوریتم بهینه‌سازی سراسری تصادفی است که برای مسائل بهینه‌سازی ترکیبی (گسسته) طراحی شده است. ساوران^{۱۰} و همکاران [۱۸] بهینه‌سازی تصادفی کامپوزیت با لایه‌های ترکیبی گرافیت-کتان/اپوکسی در جهت به حداکثر رساندن فرکانس اساسی و حداقل کردن هزینه ارائه دادند. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که ساختار کامپوزیتی بهینه گرافیت-کتان/اپوکسی پیشنهادی بهتر از نتیجه گرافیت-شیشه/اپوکسی از نظر حداکثر فرکانس اساسی و حداقل هزینه است. همچنین مشخص شده است که الگوریتم‌های تکامل دیفرانسیل [۱۱] (DE)، نلدر-مید [۱۲] (NM) و شبیه‌سازی تبرید (SA) عملکرد قابل مقایسه‌ای را در مقابل بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها [۱۳] (ACO) برای مشکلات طراحی ساختار چندلایه‌های کامپوزیتی نشان می‌دهند.

در کار حاضر، به منظور بهینه‌سازی ارتعاشات آزاد صفحات چند لایه کامپوزیتی، برای اولین بار ترکیب روش عددی دیفرانسیل کوادراچر برای شبیه‌سازی سازه و الگوریتم شبیه‌سازی تبرید به عنوان ابزار بهینه‌ساز توسعه داده شده است. توسعه این روش موجب ارائه یک ابزار بهینه‌سازی با هزینه زمانی کم برای بررسی رفتارهای صفحات چندلایه کامپوزیتی شده است.

معادلات حاکم بر صفحه چندلایه کامپوزیتی

به منظور شبیه‌سازی رفتار حاکم بر سازه (ورق) از نظریه کلاسیک ورق استفاده می‌شود. در این نظریه میدان جابه‌جایی به نحوی انتخاب می‌شود که فرضیات کیرشهف ارضا شود.

فرضیات مورد استفاده در این نظریه عبارت‌اند از:

- خطوط عمود بر صفحه میانی قبل از تغییر شکل راست می‌باشند، که بعد از تغییر شکل نیز همچنان خط راست و عمود باقی می‌مانند.
 - خطوط عمود بر صفحه میانی تغییر طول نمی‌دهند.
- نحوه تأثیر فرضیات فوق بر تغییر شکل لبه ورق در شکل ۱ نمایش داده شده است.

¹⁰ Savran

¹¹ Differential Evolution (DE)

¹² Nelder-Mead (NM)

¹³ Ant Colony Optimization (ACO)

⁸ Bert

⁹ Franco

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_y + v_x \end{Bmatrix} \quad (3)$$

مبین بردار کرنش‌های غشایی و

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w_{xx} \\ -w_{yy} \\ -2w_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

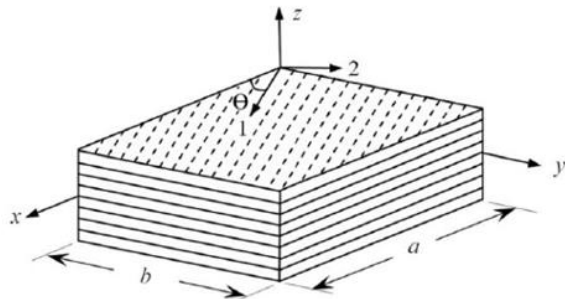
بیانگر بردار کرنش‌های خمشی است. رابطه تنش- کرنش برای یک‌لایه ارتوتروپ به شکل رابطه (۵) بیان می‌شود [۱۹].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

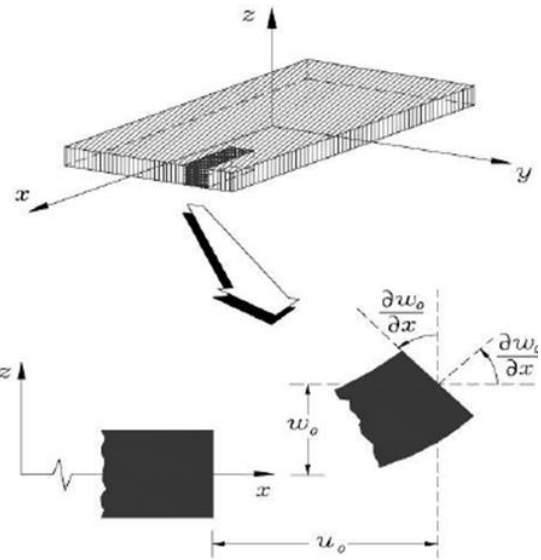
که در آن Q_{ij} معرف ضرایب سفتی است که به شکل رابطه (۶) تعریف می‌شوند [۱۹].

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu(z)^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu(z)^2} \quad (6) \\ Q_{66} = G_{21}$$

رابطه (۵) روابط تنش و کرنش را برای یک تک‌لایه در مختصات اصلی ۱-۲ را بیان می‌کند. برای بیان این روابط در دستگاه مرجع (x, y) که همانند شکل (۲) با دستگاه اصلی اختلاف زاویه‌ای برابر θ دارد، به‌صورت رابطه (۷) بیان می‌شود [۱۹].



شکل ۱- جهات اصلی و مرجع در یک‌لایه کامپوزیتی [۱۹]



شکل ۱- شمای تغییر شکل لبه ورق با فرضیات کیرشهف [۱۹]

با توجه به این فرضیات می‌توان نسبت به استخراج روابط حاکم بر میدان جابه‌جایی اقدام کرد. ورق مستطیلی در دستگاه مختصات کارتزین (x, y, z) با ضخامت h در حالتی که z عمود بر صفحه میانی و صفحه xy منطبق بر صفحه میانی باشد فرض می‌شود. با فرض جابه‌جایی (x, y, z) برای نقطه واقع در مختصات (x, y, z) ، این نقطه پس از تغییر شکل به مختصات $(x+u, y+v, z+w)$ منتقل می‌شود. چنانچه جابجایی‌های نقاط واقع در صفحه میانی با (u_0, v_0, w_0) نشان داده شود، با توجه به فرضیات کیرشهف، میدان جابه‌جایی در رابطه (۱) بیان شده است [۱۹].

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \quad (1) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

که در آن (u_0, v_0, w_0) به ترتیب جابه‌جایی لایه میانی در راستای (x, y, z) می‌باشد.

با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های کوچک در تئوری کلاسیک ورق رابطه کرنش- جابه‌جایی به‌صورت رابطه (۲) بیان می‌شود.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \quad (2)$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (12)$$

از آنجا که در کار حاضر لایه چینی را به صورت متقارن در نظر گرفته شده است در نتیجه ماتریس B برابر صفر می شود و این امر سبب می شود که نیروی میان صفحه و گشتاور خارج از صفحه به شکل رابطه (۱۳) بیان شود.

$$N_{xx} = A_{11}\epsilon_{xx} + A_{12}\epsilon_{yy}$$

$$N_{yy} = A_{12}\epsilon_{xx} + A_{22}\epsilon_{yy}$$

$$N_{xy} = A_{66}\epsilon_{xy} \quad (13)$$

$$M_{xx} = D_{11}k_{xx} + D_{12}k_{yy}$$

$$M_{yy} = D_{12}k_{xx} + D_{22}k_{yy}$$

$$M_{xy} = D_{66}k_{xy}$$

معادلات حرکت

معادلات حرکت حاکم بر صفحه چندلایه کامپوزیتی متقارن به شکل رابطه (۱۴) می باشد

$$M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} = \rho h \ddot{w} \quad (14)$$

از جای گذاری روابط گشتاور خارج از صفحه در معادلات حرکت و با در نظر گرفتن روابط رفتار مکانیکی مواد کامپوزیتی شکل کلی این معادلات به صورت رابطه (۱۵) خواهد بود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ &+ 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &+ Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ &+ 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ &+ (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ &+ (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &+ Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (8)$$

نیروی میان صفحه ای و گشتاور خارج از صفحه به صورت رابطه (۹) به دست می آید.

$$(N, M) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z) \sigma dz \quad (9)$$

با قراردادن رابطه (۷) در (۹)، رابطه (۱۰) به دست می آید

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (10)$$

که در آن N نیروی میان صفحه، M گشتاور خارج از صفحه و ماتریس های A، B و D به ترتیب ماتریس سختی - کششی، ماتریس سختی - خمشی و ماتریس سختی - خمشی می باشد. ماتریس های سختی A، B و D به صورت رابطه (۱۱) بیان می شود.

فرکانس طبیعی است. فرکانس طبیعی صفحه چند لایه کامپوزیتی مطابقه رابطه (۱۹) بی بعد شده است.

$$\Omega = \omega a \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \quad (19)$$

که در آن

$$D_0 = \frac{E_{22} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \quad (20)$$

تعیین تابع هدف و قیود آن

در این مطالعه، هدف یافتن بهترین چیدمان لایه‌ها به منظور پیدا کردن ماکسیمم پارامتر فرکانس طبیعی پایه صفحه چندلایه کامپوزیتی متقارن می باشد. در نتیجه تابع هدف می‌بایستی بیانگر مقادیر فرکانس طبیعی باشد که در بخش قبل نحوه به دست آوردن آن با استفاده از روش GDQM بیان شد. متغیرهای طراحی مسئله یعنی مقادیر مجهولی که باید به گونه‌ای به دست آیند که به ازای آن‌ها تابع هدف بهینه شود که در این تحقیق این متغیرها زوایای الیاف چندلایه (لایه k) می‌باشند.

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \\ \text{Maximize} \quad & \Omega = \Omega(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \\ \text{Subject to} \quad & -90^\circ \leq \theta_k \leq 90^\circ \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن K نصف تعداد لایه‌ها می‌باشد؛ چون لایه چینی به صورت متقارن می‌باشد.

نتایج

به منظور اعتبارسنجی و همگرایی روش دیفرانسیل مربعی (DQM) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده پنج مد اول صفحه همسانگرد با شرایط مرزی لولای ساده (SSSS) برای انواع تعداد نقاط شبکه به دست آمده و در جدول ۱ آورده شده است و با نتایج مرجع [۱۷] مقایسه شده است، همان‌طور که از جدول ۱ مشخص است بعد از تعداد نقاط شبکه ۱۰ در ۱۰، جواب مسئله همگرا شده است، همچنین نتایج به دست آمده برای صفحه همسانگرد با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۰] دارای مطابق بسیار خوبی می‌باشد. برای درک بهتر موضوع، شکل مدهای مربوط به پنج فرکانس طبیعی اول صفحه همسانگرد با شرایط مرزی لولای ساده برای تعداد نقاط ۱۵ در ۱۵ در شکل ۳ آورده شده است.

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} \\ & + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (15)$$

اعمال روش GDQM به معادلات

حال با اعمال روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته روابط ارائه شده برای تخمین مشتق‌های جزئی توسط روش دیفرانسیل کوادرچر معادلات به دست آمده گسسته‌سازی شده و معادله ارتعاشات آزاد حاکم بر ورق چندلایه کامپوزیتی به صورت رابطه (۱۶) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & D_{11} \sum_{k=1}^N A x_{ik1}^{(4)} W_{k1j} + 4D_{16} \sum_{k=1}^N \sum_{k2=1}^M A x_{ik1}^{(3)} A y_{jk2}^{(1)} W_{k1k2} \\ & + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sum_{k=1}^N \sum_{k2=1}^M A x_{ik1}^{(2)} A y_{jk2}^{(2)} W_{k1k2} \\ & + 4D_{26} \sum_{k=1}^N \sum_{k2=1}^M A x_{ik1}^{(1)} A y_{jk2}^{(3)} W_{k1k2} \\ & + D_{22} \sum_{k2=1}^M A y_{jk2}^{(4)} W_{ik2} = \rho h \omega^2 W \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{for } i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

حال با اعمال شرایط مرزی رابطه (۱۶) به شکل رابطه (۱۷) نوشته می‌شود

$$\begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bd}] \\ [K_{db}] & [K_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_b \\ \delta_d \end{Bmatrix} = \rho h \omega^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta_d \end{Bmatrix} \quad (17)$$

□ بردار مؤلفه‌های جابه‌جایی بوده و زیرنویس b نشان دهنده نقاط شبکه در مرز و نقاط مجاور است که شرایط مرزی در آن‌ها اعمال شده است. زیرنویس d سایر نقاط شبکه را مشخص می‌کند. برای حل این دستگاه می‌توان آن را به شکل رابطه (۱۸) بازنویسی کرد.

$$(K_{dd} - K_{db} (K_{bb})^{-1} K_{bd}) \delta_d = \rho h \omega^2 \delta_d \quad (18)$$

فرکانس‌های طبیعی ساختار موردنظر با حل مسئله مقادیر ویژه استاندارد رابطه (۱۸) به دست می‌آید که در آن ω

جدول ۱- فرکانس طبیعی بی بعد صفحه ایزوتروپ با شرایط مرزی لولای ساده (SSSS)

Method	Mode				
	1	2	3	4	5
Present (7x7)	19.7844	45.663	45.663	73.5304	73.8524
Present (8x8)	19.7606	50.4658	50.4658	80.2684	86.5088
Present (9x9)	19.7385	49.8171	49.8171	79.5339	110.9824
Present (10x10)	19.7389	49.2998	49.2998	78.8987	102.2412
Present (11x11)	19.7392	49.3258	49.3258	78.9296	98.0714
Present (12x12)	19.7392	49.3494	49.3494	78.9586	98.4154
Present (13x13)	19.7392	49.3487	49.3487	78.9576	98.7319
Present (14x14)	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.7123
Present (15x15)	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6947
Leissa [20]	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960

به منظور نشان دادن کارایی روش دیفرانسیل مربعی صفحه از مواد کامپوزیت سه لایه متقارن با لایه چینی $(\Theta, -\Theta, \Theta)$ در نظر گرفته شده است که خواص آن به صورت زیر می باشد.

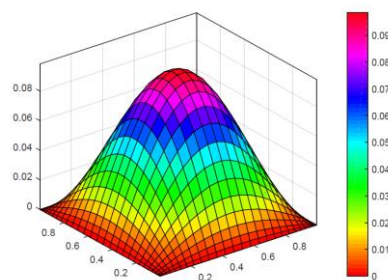
$$\begin{cases} E_1/E_2 = 2.45 \\ G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = G_{23}/E_2 = 0.48 \\ \nu_{12} = 0.23 \\ \rho = 8000 \text{ kg/m}^3 \end{cases}$$

فرکانس های طبیعی بی بعد صفحه کامپوزیتی با استفاده از

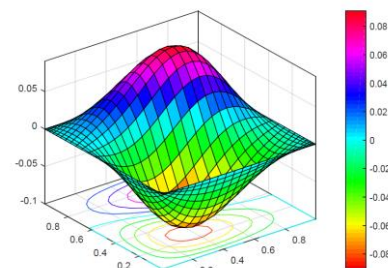
$$\text{رابطه } \Omega = \omega a \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \text{ بیان شده است.}$$

پنج فرکانس های طبیعی صفحه کامپوزیتی بی بعد شده با زاویه الیاف مختلف برای شرایط مرزی لولای ساده (SSSS) و گیردار (CCCC) به ترتیب در جدول های ۲ و ۳ آورده شده است و با نتایج مرجع [۲۱] مقایسه شده است. با توجه به جدول های ۲ و ۳ نتایج به دست آمده از روش دیفرانسیل مربعی با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۱] دارای مطابقت خوبی می باشد.

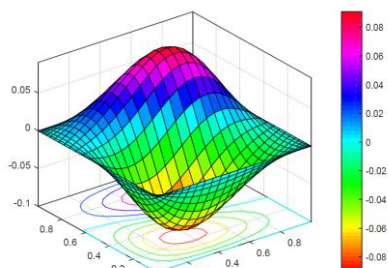
همچنین برای نشان دادن کارایی و دقت روش دیفرانسیل مربعی در مدل کردن صفحات چندلایه کامپوزیتی، شکل موده های صفحه کامپوزیتی با لایه چینی (45, -45, 45) برای شرایط مرزی لولای ساده (SSSS) و گیردار (CCCC) به ترتیب در شکل های ۴ و ۵ آورده شده است.



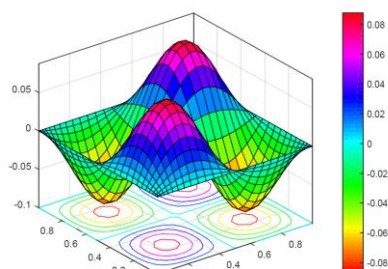
Mode 1



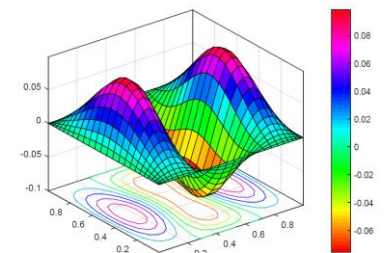
Mode 2



Mode 3



Mode 4



Mode 5

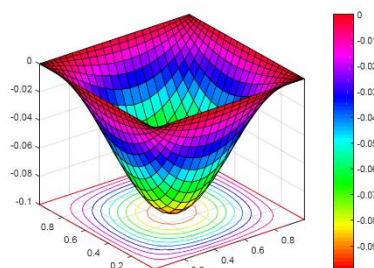
شکل ۳- شکل مد صفحه همسانگرد با شرایط مرزی لولای ساده (SSSS)

جدول ۲- فرکانس طبیعی بی بعد صفحه کامپوزیت سه لایه با لایه چینی‌های مختلف و شرایط مرزی لولای ساده (SSSS)

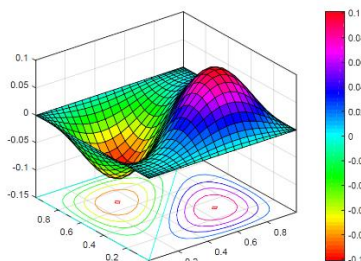
Layup	Method	Mode				
		1	2	3	4	5
(0,0,0)	Present	15.17	33.25	44.39	60.68	64.46
	Chow [21]	15.19	33.31	44.52	60.78	64.55
(15,-15,15)	Present	15.4	34.03	43.82	60.73	66.56
	Chow [21]	15.37	34.03	43.93	60.8	66.56
(30,-30,30)	Present	15.86	35.77	42.53	61.28	71.55
	Chow [21]	15.86	35.77	42.48	61.27	71.41
(45,-45,45)	Present	16.09	36.83	41.7	61.65	76.86
	Chow [21]	16.08	36.83	41.67	61.65	76.76

جدول ۳- فرکانس طبیعی بی بعد صفحه کامپوزیت سه لایه با لایه چینی‌های مختلف و شرایط مرزی گیردار (CCCC)

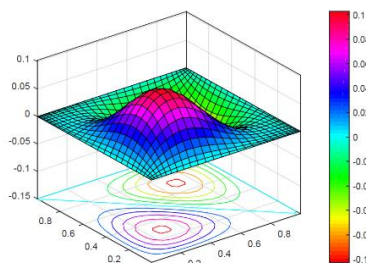
Layup	Method	Mode				
		1	2	3	4	5
(0,0,0)	Present	29.08	50.78	67.26	85.59	87.06
	Chow [21]	29.13	50.82	67.29	85.67	87.14
(15,-15,15)	Present	28.89	51.39	65.89	84.47	89.66
	Chow [21]	28.92	51.43	65.92	84.55	89.76
(30,-30,30)	Present	28.51	53.1	62.66	83.76	95.09
	Chow [21]	28.55	53.15	62.71	83.83	95.21
(45,-45,45)	Present	28.33	54.6	60.4	83.59	101.9
	Chow [21]	28.38	54.65	60.45	83.65	102



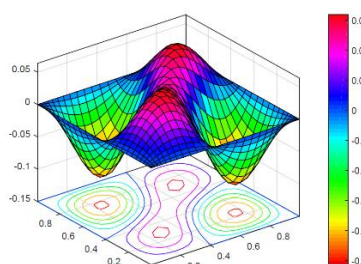
Mode 1



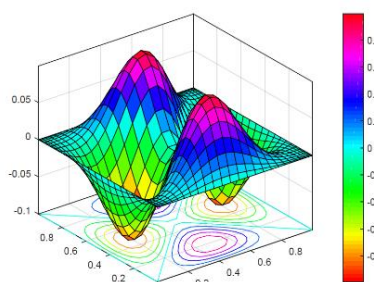
Mode 2



Mode 3



Mode 4



Mode 5

شکل ۴- پنج شکل مد صفحه چندلایه کامپوزیتی با لایه چینی (45,-45,45) و شرایط مرزی لولای ساده (SSSS)

کارایی روش بهینه‌سازی الگوریتم SA و روش GDQM که برای مدل‌سازی سازه استفاده شده است با کار انجام شده توسط ناریتا [۲۲] که از بهینه‌سازی چندلایه بر پایه روش ریلی ریتز برای صفحات ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸ و ۲۰ لایه کامپوزیتی متقارن با شرایط مرزی مختلف و $a/b=1$ مقایسه شده است. با توجه به وجود محدودیت‌هایی که در هنگام ساخت وجود دارد، گام افزایش زاویه الیاف در هنگام بهینه‌سازی برابر ۵ در نظر گرفته شده است. در ادامه نتایج مربوط به بهینه‌سازی فرکانس پایه و لایه چینی ۸ لایه متقارن در جدول ۴ آورده شده است. شرایط مرزی ورق برای حالت‌های مختلف (SSSS, SSSC, SCSC, CCCS, CCCC) در نظر گرفته شده است. با توجه به جدول ۴ نتایج به دست آمده از الگوریتم شبیه‌سازی تبرید (SA) با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۲] دارای مطابقت خوبی می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم SA به خوبی توانسته است از عهده بهینه‌سازی فرکانس‌های پایه و لایه‌چینی صفحات کامپوزیتی برآید.

مقادیر فرکانس طبیعی پایه به دست آورده شده از لحاظ مقدار عددی، حد وسط مرجع [۲۲] می باشد. با تغییر شرایط مرزی از لولای ساده به لولای گیردار مقادیر فرکانس پایه به طور نامنظم افزایش یافته است. بیشترین میزان تغییر در مقادیر فرکانس طبیعی پایه در تغییر شرایط مرزی SSCC به SCSC اتفاق افتاده است. زوایای لایه چینی به دست آمده به نتایج منبع [۲۲] نزدیک تر است هر چند که نتایج با منابع مذکور به طور کلی مطابقت خوبی دارد.

جدول ۴- مقایسه فرکانس پایه بهینه و لایه چینی صفحه کامپوزیتی ۸ لایه ای متقارن

Edges	Ω opt.		Ply angles ($^\circ$)	
	BCs	SA	[22]	SA
SSSS	56.32	56.3432	[45/-45/-45/-45] _s	[45 -45 -45 -45] _s
SSSC	65.27	66.7326	[90/75/-60/-60] _s	[60 -60 -60 -60] _s
SSCC	68.72	72.0509	[0/45/-45/-45] _s	[-45 45 45 45] _s
SCSC	90.89	90.8944	[90/90/90/90] _s	[-90 -90 90 90] _s
CCCS	91.99	91.9944	[0/0/0/0] _s	[0 0 0 0] _s
CCCC	93.67	93.6661	[0/90/0/90] _s	[0 90 90 90] _s

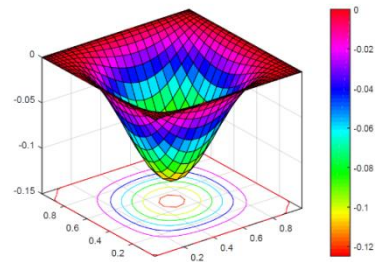
جداول ۵ و ۶ فرکانس پایه طبیعی صفحه چندلایه کامپوزیتی متقارن از جنس گرافیت/ اپوکسی و لایه چینی مربوط برای ۱۰ و ۱۲ لایه است.

جدول ۵- فرکانس طبیعی پایه بهینه و لایه چینی صفحه کامپوزیتی ۱۰ لایه ای متقارن

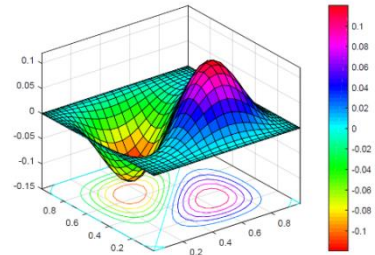
Edges BCs	Opt. method	Ω opt.	Ply angles ($^\circ$)
SSSS	SA	56.5271	[45 -45 -45 -45 45] _s
SSSC	SA	66.8878	[-60 60 60 60 -60] _s
SSCC	SA	72.3484	[-45 45 45 45 45] _s
SCSC	SA	90.8944	[90 -90 90 -90 -90] _s
CCCS	SA	91.9944	[0 0 0 0 0] _s
CCCC	SA	93.6664	[-90 0 0 0 90] _s

جدول ۶- فرکانس طبیعی پایه بهینه و لایه چینی صفحه کامپوزیتی ۱۲ لایه ای با شرایط مرزی مختلف

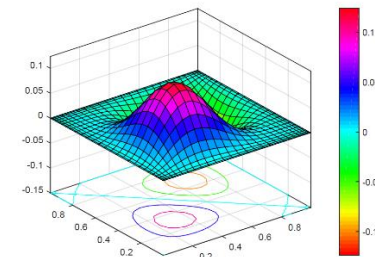
Edges BCs	Opt. method	Ω opt.	Ply angles ($^\circ$)
SSSS	SA	56.525	[-45 45 45 -45 45 45] _s
SSSC	SA	66.886	[60 -60 -60 60 -60 -60] _s
SSCC	SA	72.3486	[45 -45 -45 45 -45 45] _s
SCSC	SA	90.8944	[90 -90 90 -90 -90 90] _s
CCCS	SA	91.9944	[0 0 0 0 0 0] _s
CCCC	SA	93.6664	[0 90 90 0 -90 -90] _s



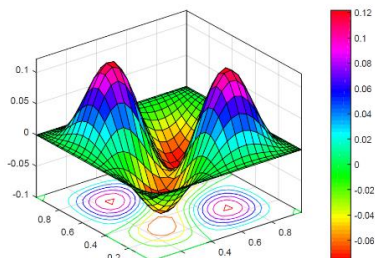
Mode 1



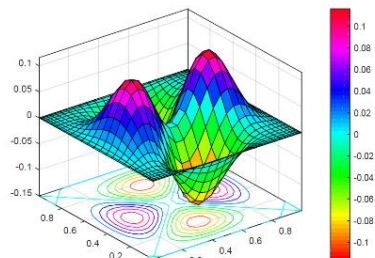
Mode 2



Mode 3

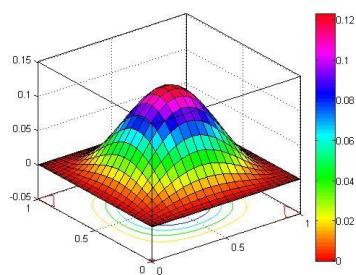


Mode 4

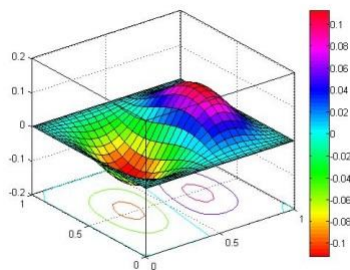


Mode 5

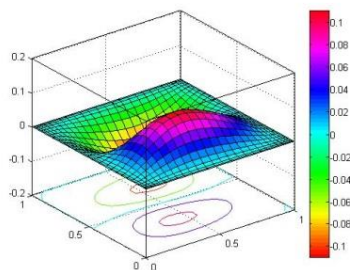
شکل ۵- پنج شکل مد صفحه چندلایه کامپوزیتی با لایه چینی (45,-45,45) و شرایط مرزی گیردار (CCCC)



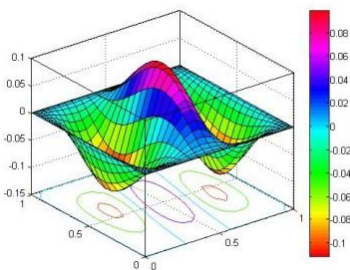
Mode 1



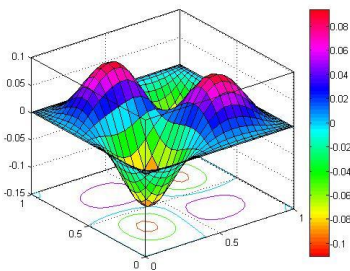
Mode 2



Mode 3



Mode 4



Mode 5

شکل ۵- پنج شکل مد صفحه چندلایه کامپوزیتی با لایه چینی
(۰،۹۰،۹۰،۹۰) و شرایط مرزی گیردار (CCCC)

نتایج به دست آمده در کار حاضر برای صفحه مربعی کامپوزیتی متقارن از جنس گرافیت/اپوکسی برای ترکیب‌های مختلف از شرایط مرزی لولای ساده (S) و شرایط مرزی گیردار (C) می‌باشد. همان‌طور که از نتایج مشخص است بیشتر فرکانس طبیعی برای شرایط مرزی CCCC و کمترین فرکانس طبیعی برای شرایط مرزی SSSS می‌باشد. که روند افزایشی با تغییر از S به C حفظ شده است.

همچنین از مقایسه جداول ۴ تا ۶ می‌توان به این نتیجه رسید که افزایش تعداد لایه‌ها در شرایط مرزی SSSS, SSSC, SSCC سبب افزایش فرکانس طبیعی بهینه می‌شود در حالی که افزایش تعداد لایه‌ها در شرایط مرزی CCCC, CCCS, SCSC تاثیری در مقدار فرکانس طبیعی بهینه ندارد. در ادامه و در شکل ۶ شکل مدهای ۵ گانه مربوط به شرایط مرزی CCCC برای ۸ لایه با لایه چینی (۰،۹۰،۹۰،۹۰) برای نمونه به تصویر کشیده شده است.

نتیجه‌گیری

در این مطالعه، به منظور بهینه‌سازی ارتعاشات آزاد صفحات چند لایه کامپوزیتی، برای اولین بار ترکیب روش عددی دیفرانسیل کوادرچر برای شبیه‌سازی سازه و الگوریتم شبیه‌سازی تبرید به عنوان ابزار بهینه‌ساز توسعه داده شده است. معادلات حرکت با استفاده از تئوری کلاسیک صفحه‌ها بیان شده است. پس از گسسته‌سازی معادلات حاکم بر صفحه با استفاده از روش دیفرانسیل کوادرچر، معادلات گسسته‌سازی شده با استفاده از روش تحلیل مقادیر ویژه حل شده‌اند. نتایج حاصل از بهینه‌سازی با روش شبیه‌سازی تبرید با نتایج روش ژنتیک مقایسه و اعتبار نتایج مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به نتایج به دست آمده از الگوریتم شبیه‌سازی تبرید (SA) و مقایسه آن‌ها با نتایج ارائه شده در مراجع مذکور، معلوم شده است که نتایج با یکدیگر دارای مطابقت خوبی می‌باشند. این نتایج نشان می‌دهد که ترکیب روش عددی دیفرانسیل کوادرچر و الگوریتم SA به خوبی توانسته است بهینه‌سازی فرکانس‌های پایه و لایه چینی صفحات کامپوزیتی را مورد مطالعه قرار دهد.

- algorithm and generalized differential quadrature. *International Journal of Applied Mechanics*, 13(08), 2150090.
- [11] Shahverdi, H., & Navardi, M. M. (2017). Free vibration analysis of cracked thin plates using generalized differential quadrature element method. *Structural engineering and mechanics: An international journal*, 62(3), 345-355.
- [12] Shahverdi, H., Navardi, M. M., & Sadr Lahijani, M. H. (2022). A Proposed Approach to Simulate Thin Quadrilateral Plates Using Generalized Differential Quadrature Method Based on Kirchhoff-Love Theory. *AUT Journal of Mechanical Engineering*, 6(1), 15-3
- [13] D Bertsimas, J Tsitsiklis, "Simulated annealing" - *Statistical science*, 1993
- [14] C.W. Bert, "Optimal design of a composite-material plate to maximize its fundamental frequency" *Journal of Sound and Vibration* 50 (1977)
- [15] C.W. Bert, "Design of clamped composite-material plates to maximize fundamental frequency" *Journal of Mechanical Design* 100 (1978) 274-278.
- [16] Victor M.Franco, Correia Cristóvão, M.Mota Soares, Carlos A.Mota Soares, Refined models for the optimal design of adaptive structures using simulated annealing" 2001.
- [17] M.M.Ali, A.Törnbs, "A direct search variant of the simulated annealing algorithm for optimization involving continuous variables Author links open overlay panel". 2001.
- [18] Melih Savran, Levent Aydin," Stochastic optimization of graphite-flax/epoxy hybrid laminated composite for maximum fundamental frequency and minimum cost" , 2018.
- [19] Reddy, J. N., "An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis", 2nd 22ed., Oxford University, Press.2004
- [20] Leissa, A. W., "The free vibration of rectangular plates," *Journal of Sound and Vibration* 1973:31, 257-293.
- [1] Richard Bellman, B.G Kashef, J Casti, "Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations", 1972
- [2] Richard Bellman , Bayesteh Kashef, E. Stanley Lee R. Vasudevan, "Solving hard problems by easy methods: Differential and integral quadrature", 1975
- [3] Liew, K. M. "Vibration Analysis of Discontinuous IVIindlin Plates by Differential Quadrature Element Method." *Journal of Vibration and Acoustics* 121 (1999): 205.
- [4] Liu, F-L. "Differential quadrature element method for buckling analysis of rectangular Mindlin plates having discontinuities." *International journal of solids and structures* 38.14 (2001): 2305-2321.
- [5] Liu, F-L., and K. M. Liew. "Static analysis of Reissner-Mindlin plates by differential quadrature element method." *Journal of applied mechanics* 65.3 (1998): 705-710.
- [6] Liu, F-L., and K. M. Liew. "Differential quadrature element method for static analysis of Reissner-Mindlin polar plates." *International Journal of Solids and Structures* 36.33 (1999): 5101-5123.
- [7] Liu, F-L., and K. M. Liew. "Differential quadrature element method: a new approach for free vibration analysis of polar Mindlin plates having discontinuities." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 179.3 (1999): 407-423.
- [8] H. Shahverdi, V. Khalafi, S. Noori, Aerothermoelastic analysis of functionally graded plates using generalized differential quadrature method, *Lat. Am. J. Solids Struct.* 13 (2016) 796-818,
- [9] T. Farsadi, D. Asadi, H. Kurtaran, Nonlinear flutter response of a composite plate applying curvilinear fiber paths, *Acta Mech.* 231 (2020) 715-731,
- [10] Shahverdi, H., Navardi, M. M., & Khalafi, V. (2021). Optimization of free vibration and flutter analysis of composite plates using a coupled method of genetic

- [21] Chow ST, Liew KM, Lam KY.
“Transverse vibration of symmetrically laminated rectangular composite plates”
Compos Struct 1992;20:213–26
- [22] Y. Narita;”Layerwise optimization for the maximum fundamental frequency of laminated composite plates” Journal of Sound and Vibration 263 (2003) 1005–1016