

# بررسی اثر ضریب پواسون بر عملکرد الکتریکی و دینامیکی تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و پیزوالکتریکی

کاوه صبری لقای<sup>۱</sup>، کرامت ملک زاده فرد<sup>۲\*</sup>، سعید شکراللهی<sup>۳</sup>، سلمان شفقت<sup>۴</sup>

۱-دانشجوی دکتری، مجتمع هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۲-استاد، مجتمع هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۳-دانشیار، مجتمع هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۴-دکتری، مجتمع هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۱۱/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۱۸)

## چکیده

در این مطالعه اثر ضریب پواسون بر مشخصات الکتریکی و پاسخ دینامیکی تیرهای ساندویچی با وصله‌های پیزوالکتریکی با هدف برداشت انرژی بررسی شده است. تیر ساندویچی با هسته‌ی همسانگرد و رویه‌های کامپوزیتی بوده که یک لایه‌ی آن را پیزوالکتریک تشکیل می‌دهد. برای هسته، کرنش راستای ضخامت و نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا لحاظ شده است. مدل اجزاء محدود بر اساس المان‌های یک بعدی سه‌گره‌ی با توابع شکل لاگرانژی و هرمیتی اجرا شده است. مطالعات پارامتریک با هدف تعیین تأثیر ضریب پواسون بر فرکانس‌های طبیعی اتصال کوتاه و مدار باز، ولتاژ و دامنه‌ی جابجایی تیر تحت فرکانس تحریک تشدید انجام شده است. طبق نتایج، اثر نادیده گرفتن ضریب پواسون در فرکانس‌های طبیعی و خیز در فرکانس تحریک صفر برای زوایای الیاف متعام زیاد نبوده اما در الیاف زاویه دار خطا فاحش خواهد شد. این در حالی است که در بررسی ولتاژ و دامنه جابجایی تیر، هم برای الیاف متعام و هم زاویه دار این خطا بسیار چشمگیر بوده و قابل اغماض نیست همچنین بیشترین خطا در زاویه الیاف حدود ۳۶ درجه حاصل شده است. در ضمن خطای مذکور با عدم تقارن موقعیت قرارگیری پیروها در زوایای متعام می‌تواند بیشتر از حالت متقارن و پوشش سراسری آنها شود. نهایتاً مشاهده شد نتایج مدل حاضر در نسبت طول به پهنای  $(L/b)$  حدوداً بالای ۳۰ به نتایج مدل سه بعدی نرم افزار کامسول همگرا می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تیر ساندویچی، برداشت انرژی، مرتبه بالا، پیزوالکتریک، ضریب پواسون

## Investigating the effect of Poisson's ratio on the electrical and dynamic performance of sandwich beam with composite and piezoelectric face sheets

K.Sabri Laghaie, K.Malekzadeh Fard, S.Shokrollahi, S.Shafaghat

### Abstract

In this study, the effect of Poisson's ratio on the electrical characteristics and dynamic response of sandwich beams with piezoelectric patches for energy harvesting purposes is investigated. The sandwich beam consists of a homogeneous core and composite face sheets, with one of the layers being piezoelectric. The higher-order shear deformation theory and through-the-thickness deformation are considered for the core. The finite element model is implemented based on one-dimensional, three-node elements with Lagrangian and Hermitian shape functions. Parametric studies are conducted to determine the influence of Poisson's ratio on the natural frequencies of short-circuit and open-circuit conditions, voltage, and displacement amplitude of the beam under resonant excitation frequency. According to the results, the effect of neglecting Poisson's ratio on the natural frequencies and displacement at zero excitation frequency is insignificant for orthogonal fiber orientation, but becomes pronounced for skewed fibers. In contrast, when examining the voltage and displacement amplitude of the beam, the error is quite significant for both orthogonal and skewed fibers, and cannot be overlooked. Furthermore, the largest error occurs at an approximately 36-degree fiber angle. Additionally, the asymmetry in the positioning of the piezoelectric patches at orthogonal angles can result in a greater error than in the symmetric configuration or their full coverage. Finally, it was observed that for the beam with a length-to-width ratio  $(L/b)$  of approximately 30 or higher, the results of the present model converge with the three-dimensional model results from COMSOL software.

**Key words:** Sandwich beam, Energy harvesting, Higher-order, Piezoelectric, Poisson's ratio

## مقدمه

در سال‌های اخیر استفاده از مواد پیزوالکتریک به دلیل ویژگی‌های خاص این مواد هوشمند گسترش زیادی داشته است [۱]. این مواد می‌توانند به عنوان عملگر و حسگر مورد استفاده قرار گیرند. همچنین خاصیت حسگری این مواد آن‌ها را به یک گزینه‌ی مناسب برای کاربردهای برداشت انرژی تبدیل کرده است. در واقع با توجه به رشد چشمگیر استفاده از وسایل الکترونیکی کم‌مصرف و حسگرهای بیسیم در دنیای امروز نیاز به تامین برق دائمی این وسایل بیش از گذشته احساس می‌شود. روش معمول برای برق‌رسانی این وسایل استفاده از باتری‌ها می‌باشد اما مشکلاتی همچون دسترسی سخت به بعضی از وسایل الکترونیکی مانند برخی از سنسورها، عمر محدود باتری‌ها و نیاز به بازبینی و تعویض مکرر آن‌ها باعث شده است تا در سال‌های اخیر توجه محققان به روش‌های نوین در تامین برق مورد نیاز و اضطرابی برای مدارات الکترونیکی کم‌مصرف بیشتر معطوف گردد [۲]. یکی از راه‌حل‌های جایگزین، استفاده از مدل‌های برداشت انرژی بر مبنای مواد پیزوالکتریک از ارتعاشات محیطی است [۳]. از سویی دیگر بسیاری از سنسورها بر مبنای پاسخ رزونانسی مدل یک تیر یکسرگیردار ساخته می‌شوند [۴]. بنابراین با توجه به گسترده‌ی استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک در تیرهای هوشمند به خصوص در کاربردهای متنوع مانند ادغام با مواد کامپوزیتی، برداشت انرژی، حسگرها و نیز کنترل ارتعاشات نیاز است تا یک مدل دقیق برای توصیف رفتار این تیرها ارائه شود.

تاکنون تحقیقات متعددی در زمینه‌ی استفاده از مواد پیزوالکتریک در موضوعات مختلف مانند برداشت انرژی، سنسورها و کنترل ارتعاشات و روی انواع سازه‌ها از جمله تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها انجام شده است. آرنای و همکاران [۵] به بررسی برداشت انرژی از تیر ساندویچی که هسته آن از جنس کامپوزیت بوده و رویه‌های تیر از صفحات پیزوالکتریک تشکیل شده‌اند، پرداختند. ژانگ یانگ و همکاران [۲] به صورت تحلیلی و تجربی برداشت‌کننده‌ی ساندویچی پیزوالکتریکی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها به جای استفاده از زیرلایه‌ی معمولی یک زیرلایه‌ی ساندویچی را در نظر گرفتند که اینکار باعث می‌شود ضمن کاهش فرکانس تشدید بتوان ولتاژ خروجی را با تنظیم پارامترهای مختلف هندسی و موادی افزایش داد. در مطالعه‌ی که توسط بوروویس و همکاران [۶] انجام شد اثر

کوپلینگ مکانیکی بر رفتار دینامیکی مواد کامپوزیتی در برداشت‌کننده‌های انرژی بررسی شدند. برداشت‌کننده در نرم افزار المان محدود مدل‌سازی شده و ماده کامپوزیتی با الیاف شیشه‌ای از نوع R تقویت شده است. از نتایج آن‌ها می‌توان به زیادی کوپلینگ بین خمش در دو جهت سفت‌تر و منعطف‌تر تیر برای چیدمان‌های خاصی از لایه‌ها اشاره کرد. به علاوه در این مطالعه تأثیر چیدمان لایه‌ها و زاویه الیاف بر روی انرژی برداشت شده ارزیابی شده است.

در مطالعه‌ی ابراهیم و همکاران [۷] به تحلیل تغییر شکل‌ها و کرنش‌های تیرهای گوه‌ای شکل (ضخامت متغیر) برای افزایش انرژی برداشت شده در برداشت‌کننده‌ها پرداخته شده است. در این مطالعه لایه پیزوالکتریک به صورت پوشش موضعی قرار گرفته و نتایج برای تحلیل عددی و تجربی به دست آمده‌اند. حسینی و همکاران [۸] به بررسی تحلیلی و تجربی تیر یکسرگیردار پیزوالکتریک با پوشش موضعی پرداختند. آن‌ها در پژوهش خود از ماده سلولوزی الکترواکتیو<sup>۱</sup> (EAP ap) به عنوان ماده پیزوالکتریک جدید در برداشت‌کننده استفاده کردند. مدل تحلیلی آن‌ها یک مدل ساده پارامترهای توزیع شده با احتساب میرایی سازه‌ای بوده و از اثر ضخامت پیزوالکتریک‌ها صرف نظر شده است. محمدکریمی و همکاران [۹] به مطالعه تجربی برداشت انرژی توسط پیزوالکتریک از پدیده فلاتر پرداختند. آن‌ها در مطالعه خود از یک تیر یکسرگیردار که به انتهای آزاد آن یک سطح برآزا و به سرگیردار آن یک پچ پیزوالکتریک بصورت بایمورف<sup>۲</sup> وصل شده است، استفاده کردند. در نتیجه در این مدل دو درجه آزادی پیچشی و خمشی فراهم می‌شود. در مطالعه دیگری که توسط عاروان و همکاران [۱۰] انجام شد، به بهینه‌سازی شکل تیر تک لایه پیزوالکتریک به عنوان برداشت‌کننده انرژی پرداخته شده است. در این کار تیر یک‌سرگیردار بایمورف در نظر گرفته شده و فرض شده است که تیر تحت تحریک پایه قرار گرفته است. در ادامه با تغییرات متغیرهای هندسی سعی شده است تا بیشترین توان خروجی از این برداشت‌کننده انرژی حاصل شود. حسینی و همکاران [۱۱] اثر شکل و هندسه تیر یکسرگیردار با دولایه‌ی پیزوالکتریک را بر کارایی الکترومکانیکی سیستم برداشت‌کننده انرژی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها یک مدل تحلیلی با استفاده از تقریب‌های رایلی-ریتز ارائه کردند. فلاح و عرب ملکی [۱۲] برداشت‌کننده انرژی با استفاده از تیر بایمورف متخلخل که با

در نظرگیری آن برای چندلایه‌های زاویه دار موجب خطای فاحشی می‌شود.

علیرغم مطالعات متعدد صورت گرفته در زمینه برداشت کننده‌های پیزوالکتریکی مطالعات بسیار محدودی به اثر ضریب پواسون در این گونه تیرها اختصاص یافته و تاکنون این مورد در رفتار الکتریکی برداشت‌کننده‌ها مورد توجه قرار نگرفته است، چنانچه در مطالعاتی مانند [۵] با وجود لایه‌های کامپوزیتی با الیاف زاویه‌دار اما اثر ضریب پواسون در نظر گرفته نشده است. علاوه بر این در مطالعات صورت گرفته در حوزه‌ی برداشت انرژی از تیرهای ساندویچی تئوری‌های مرتبه بالا و کرنش راستای ضخامت لحاظ نشده است. در ضمن عدم تقارن موقعیت وصله‌های پیزوالکتریکی می‌تواند عاملی بر افزایش اثر ضریب پواسون تصور شود که این مورد نیز مورد بررسی قرار نگرفته است. لذا در این مطالعه روابط حاکم بر تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و وصله‌های پیزوالکتریک سراسری و موضعی، تحت شتاب پایه با احتساب کرنش‌های راستای ضخامت در هسته استخراج شده‌اند. روابط ساختاری رویه‌های کامپوزیتی حاوی وصله پیزوالکتریک، با در نظرگیری اثر ضریب پواسون به دست آمده و برای مدل‌سازی تیر ساندویچی از تئوری‌های مرتبه بالا استفاده شده است. به این منظور مدل-سازی جایجایی‌های درون صفحه‌ای و برون صفحه‌ای به ترتیب توسط چند جمله‌ای‌های درجه ۳ و ۲ انجام شده است. همچنین با توجه به اینکه نتایج برای ضخامت‌های بالای هسته نیز ارائه می‌شوند، لذا به منظور اطمینان از دقت نتایج، کرنش برشی برای هسته در نظر گرفته شده و لایه بالایی و پایینی طبق مدل اوپلر-برنولی مدل‌سازی شده‌اند. به علاوه، حل مسئله با کمک روش اجزاء محدود و با المان‌های سه‌گره‌ای انجام و کلیه مراحل در نرم افزار میپل کدنویسی شده است.

### مدل سازی

در شکل ۱ مدل هندسی تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و وصله‌های پیزوالکتریک نشان داده شده است. در این مدل  $L$  طول کل تیر،  $h_c$ ،  $h_t$  و  $h_b$  به ترتیب ضخامت رویه بالا، هسته و رویه پایین بوده و  $\bar{z}$  نیز بیانگر شتاب ورودی به پایه تیر می‌باشد.

لایه پیزوالکتریک پوشانده شده و تحت ارتعاشات ناشی از جریان سیال خارجی قرار دارد را مورد بررسی قرار دادند. معادلات الکترومکانیکی تیر با استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی استخراج شده و تاثیر پارامترهای مختلف بر تیر متخلخل یکسرگیردار با جرم متمرکز در انتهای تیر، مطالعه شدند. رضایی و همکاران [۱۳] به بررسی تحلیلی و تجربی یک برداشت‌کننده انرژی که هم‌زمان نقش جاذب را هم ایفا می‌کند با استفاده از لایه پیزوالکتریک پرداختند. سیستم مورد مطالعه یک تیر اصلی متصل به تیر یونیمورف پیزوالکتریک است که توسط شیکر به نوسان درمی‌آید. در زمینه‌ی استفاده از تئوری‌های مرتبه بالا در تیرهای ساندویچی به این موارد می‌توان استناد نمود. ملک‌زاده و همکاران [۱۴] با استفاده از تئوری مرتبه بالای بهبود یافته به بررسی پاسخ دینامیکی ضربه‌ی کم سرعت در تیرهای ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی پرداختند. محمودخانی و صبری لقایی [۱۵] فلاتر پنل ساندویچی را با هسته‌ی ویسکوالاستیک و رویه‌های همسانگرد در پوشش موضعی و دوتکه شده با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی برای هسته مورد مطالعه قرار دادند. در مطالعه‌ی دیگری واحدی و محمودخانی [۱۶] عملکرد یک جاذب ارتعاشات ساخته شده از تیر خمیده ساندویچی به همراه جرم صلب را بررسی کردند. در این مطالعه رویه‌ها با استفاده از نظریه اوپلر-برنولی و هسته با نظریه‌ی مرتبه بالای برشی مدل-سازی شده است. اثر ضریب پواسون در تعدادی از مطالعات مورد توجه قرار گرفته است. بیگلری و همکاران [۱۷] در مطالعه خود به بررسی پاسخ استاتیکی تیرهای هوشمند حاوی پچ‌های پیزوالکتریک به منظور استفاده در عملگرها با در نظرگیری اثر ضریب پواسون پرداختند. پارامترهای مختلفی از جمله طول عملگرها، مکان قرارگیری پیزوالکتریک‌ها، مرتبه‌ی تئوری، زاویه‌ی الیاف، شرایط مرزی و ضریب پواسون در این مطالعه بررسی شده و نتایج حاکی از خطای چشمگیر در پاسخ استاتیکی تیر چندلایه‌ی زاویه‌دار در صورت عدم در نظرگیری اثر پواسون در مود کششی است. بیگلری و ستاری [۱۸] با استفاده از حل دقیق تاثیر تورق<sup>۳</sup> در ارتعاش آزاد تیر کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند. در فرمول‌بندی تیر، آن‌ها اثر اینرسی دورانی، تغییر شکل برشی جانبی تیر و اثر ضریب پواسون را در نظر گرفتند. نتایج آن‌ها نشان داد در نظرگیری اثر پواسون تاثیر زیادی بر فرکانس‌های چند لایه‌ی متعامد ندارد در حالی عدم

$$u_{c2} = \frac{1}{h_{c2}} (h_t w_{t0,x} - h_b w_{b0,x} + 2u_{t0} + 2u_{b0} - 4u_{c0}),$$

$$u_{c3} = \frac{1}{h_{c3}} (2h_t w_{t0,x} + 2h_b w_{b0,x} - 4h_c u_{c1} + 4u_{t0} - 4u_{b0}), \quad (4)$$

$$w_{c1} = \frac{w_{t0} - w_{b0}}{h_c},$$

$$w_{c2} = \frac{2w_{t0} - 4w_{c0} + 2w_{b0}}{h_c^2}.$$

بنابراین هفت متغیر جابجایی مستقل شامل جابجایی‌های

$u_0, u_1, w_0, u_{t0}, u_{b0}, w_{t0}$  و  $w_{b0}$  باقی می‌مانند. در ادامه با استفاده از میدان‌های جابجایی، کرنش‌ها مطابق رابطه (۵) بدست می‌آیند.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (5)$$

که در رابطه (۵)  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}$  و  $\varepsilon_{xz}$  به ترتیب کرنش‌های نرمال در راستای محور  $x, z$  و کرنش برشی هستند. در رابطه (۵) فرض بر آن است که کرنش‌ها و چرخش‌ها کوچک هستند و از عبارات‌های غیرخطی هندسی صرف‌نظر شده است. در ادامه با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۵) داریم:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} + z^2\varepsilon_{xx}^{(2)} + z^3\varepsilon_{xx}^{(3)},$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^{(0)} + z\varepsilon_{zz}^{(1)}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}^{(0)} + z\varepsilon_{xz}^{(1)} + z^2\varepsilon_{xz}^{(2)},$$

که در رابطه (۶) ضرایب  $\varepsilon_{xx}^{(0,1,2,3)}$  کرنش‌هایی بدون وابستگی به  $z$  هستند و به صورت رابطه (۷) بر حسب عبارات‌های جابجایی تعریف می‌شوند.

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \varepsilon_{xx}^2 = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \varepsilon_{xx}^3 = \frac{\partial u_3}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{zz}^0 = w_1, \varepsilon_{zz}^1 = 2w_2, \varepsilon_{zz}^2 = 0, \varepsilon_{zz}^3 = 0$$

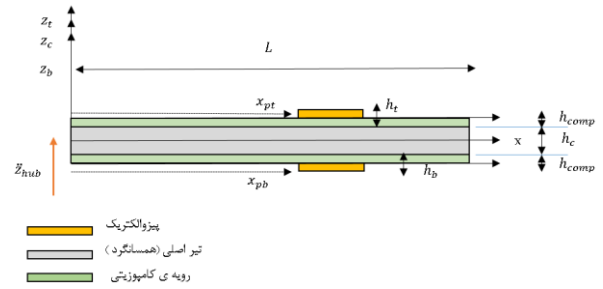
$$\varepsilon_{xz}^0 = u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \varepsilon_{xz}^1 = 2u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xz}^2 = 3u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x}$$

به‌طور مشابه با جای‌گذاری میدان‌های جابجایی ارائه شده

رابطه (۲) در رابطه (۵) کرنش‌های نرمال در راستای محور  $x$  برای لایه بالا و پایین مطابق با رابطه (۸) به‌دست می‌آیند:

$$\varepsilon_{xx}^i = \varepsilon_{xx}^{i0} + z\varepsilon_{xx}^{i1} \quad i: t, b \quad (8)$$



شکل ۱. مدل تیر برداشت کننده انرژی با رویه‌های کامپوزیتی

### روابط سینماتیک

طبق نظریه مرتبه بالا که در مرجع [۱۹] معرفی شده است، برای لایه میانی جابجایی‌های محوری (درون صفحه‌ای  $u$ ) و عرضی (خارج صفحه‌ای  $w$ ) به ترتیب به صورت چند جمله‌ای‌های مرتبه ۳ و ۲ در نظر گرفته شده‌اند (رابطه (۱)).

$$u = u_0 + zu_1 + z^2u_2 + z^3u_3$$

$$w = w_0 + zw_1 + z^2w_2 \quad (1)$$

همچنین جابجایی‌های محوری و عرضی برای لایه‌های بالا و پایین، طبق رابطه (۲) بیان می‌شوند:

$$u_m = u_{m0} - z_m \frac{\partial w_m}{\partial x_m}, w_m = w_{m0}, \quad m: t, b \quad (2)$$

که در رابطه (۲)  $t$  و  $b$  به ترتیب بیانگر لایه بالا و پایینی می‌باشند. همچنین به منظور برقراری فرض عدم لغزش بین لایه‌ها و شرط پیوستگی جابجایی‌ها، نیاز است تا جابجایی‌ها در فصل مشترک هسته و رویه‌ها مطابق با رابطه (۳) برابر نهاده شوند:

$$u_t \left( z = -\frac{h_t}{2} \right) = u_c \left( z = +\frac{h_c}{2} \right)$$

$$u_b \left( z = +\frac{h_b}{2} \right) = u_c \left( z = -\frac{h_c}{2} \right) \quad (3)$$

$$w_t \left( z = -\frac{h_t}{2} \right) = w_c \left( z = +\frac{h_c}{2} \right)$$

$$w_b \left( z = +\frac{h_b}{2} \right) = w_c \left( z = -\frac{h_c}{2} \right).$$

با حل چهار معادله جبری حاصل از رابطه (۳) مجهولات

جابجایی  $w_1, u_2, u_3$  و  $w_2$  بر حسب سایر متغیرهای جابجایی به‌دست می‌آیند (رابطه (۴)):

$$\begin{cases} \{T\} = [c^E]\{S\} - [e]^T\{E\} \\ \{D\} = [e]\{S\} + [\varepsilon^S]\{E\} \end{cases} \quad (13)$$

$$\{T\} = \{T_{11} \ T_{22} \ T_{33} \ T_{23} \ T_{13} \ T_{12}\}^T \quad (14)$$

که در روابط (۱۳) و (۱۴) بردار تنش‌ها، S بردار کرنش‌ها، E بردار میدان الکتریکی و D بردار جابجایی الکتریکی است. همچنین  $[c^E]$  ماتریس سفتی،  $[e]$  ماتریس ثوابت پیزوالکتریک و  $[\varepsilon^S]$  ماتریس ثوابت دی الکتریک نام دارد. با توجه به این که لایه‌های بالا و پایین هردو از جنس کامپوزیت بوده که یک لایه از آن‌ها پیزوالکتریک است و با توجه به نازکی این دولایه روابط ساختاری طبق فرضیات اوپلر-برنولی استخراج می‌شوند. همچنین با توجه به این که میدان الکتریکی و جابجایی الکتریکی در جهت عمود بر صفحه‌ی میانی (جهت Z) یکنواخت هستند و قطبیدگی تنها در جهت Z است لذا این بردارها به این صورت تعریف می‌گردند:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_z \end{Bmatrix} \quad (15)$$

همچنین بردار تنش از ۶ مولفه به ۳ مولفه کاهش می‌یابد:

$$\{T\} = \{T_{11} \ T_{22} \ T_{12}\}^T \quad (16)$$

در نتیجه رابطه‌ی ساختاری برای هر لایه از کامپوزیت با وجود پیزوالکتریک نهفته به صورت رابطه (۱۷) نوشته خواهد شد:

$$\{T\} = [c]_k\{S\} - \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k E_k \quad (17)$$

$$D_k = \{e_{31} \ e_{32} \ 0\}_k\{S\} + \varepsilon_k E_k$$

که  $[c]_k$  ماتریس سفتی در دستگاه اصلی مادی برای لایه‌ی k ام می‌باشد و میدان الکتریکی ( $E_z$ ) به صورت شدت میدان الکتریکی در راستای محور z و برابر با ولتاژ (اختلاف پتانسیل) بر ضخامت پیزوالکتریک ( $-\phi / (h_p)$ ) تعریف می‌گردد. جهت انتقال بردار تنش‌ها از دستگاه مادی (TL) به دستگاه (XY) مطابق مرجع [۲۱] از ماتریس انتقال  $[R_T]_k$  مطابق رابطه (۱۸) استفاده خواهد شد:

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = [R_T]_k^{-1} \begin{cases} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{cases} = [R_T]_k^{-1} [c]_k \begin{cases} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{cases} \\ = [R_T]_k^{-1} [c]_k [R_S]_k \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (18)$$

که در رابطه (۸)  $\varepsilon_{xx}^{i0}$  و  $\varepsilon_{xx}^{i1}$  به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شوند.

$$\varepsilon_{xx}^{i0} = \frac{\partial u_{i0}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xx}^{i1} = -\frac{\partial^2 w_{i0}}{\partial x^2} \quad i: t, b \quad (9)$$

## روابط ساختاری

مطابق با رابطه تنش-کرنش هوک برای سه بعد و با توجه به این که برای یک تیر تنش نرمال در راستای محور y برابر صفر می‌باشد، روابط ساختاری برای هسته به صورت رابطه (۱۰) ارائه می‌شود [۲۰].

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}], \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{zz}] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}],$$

$$\sigma_{xz} = G\varepsilon_{xz}$$

در رابطه (۱۰) با صفر قرار دادن  $\sigma_{yy}$  و بدست آمدن  $\varepsilon_{yy}$  بر حسب  $\varepsilon_{xx}$  و  $\varepsilon_{zz}$  و سپس قرار دادن در رابطه‌ی اول و سوم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} [(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{zz})], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} [(\varepsilon_{xx}\nu + \varepsilon_{zz})], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sigma_{xz} = G\varepsilon_{xz}$$

با به دست آوردن روابط تنش برای هسته، متجه‌های تنش مکانیکی را برای لایه هسته با جای‌گذاری روابط (۱۱) در (۱۲) می‌توان محاسبه نمود:

$$N_{\alpha\beta}^i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z^i dz, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta: x, z \quad (12)$$

در ادامه روابط تنش-کرنش برای لایه پایین و بالا با فرض این که کرنش  $\varepsilon_{zz}$  برای هر دو لایه صفر است تعیین می‌گردد.

## روابط ساختاری رویه‌ها با لایه‌ی پیزوالکتریک

به طور کل روابط ساختاری برای مواد پیزوالکتریک را به چهار فرم می‌توان نوشت که در رابطه (۱۳) یکی از این چهار فرم یعنی فرم تنش بر حسب میدان الکتریکی آورده شده است.

که در آن:

$$[R_S]_k = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -\sin \theta_k \cos \theta_k \\ -2 \sin \theta_k \cos \theta_k & 2 \sin \theta_k \cos \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[R_T]_k = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & 2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ -\sin \theta_k \cos \theta_k & \sin \theta_k \cos \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix}$$

در نتیجه رابطه‌ی ساختاری اول برای یک تک لایه در مختصات (XY) به صورت (۲۰) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \{T\}^{(xy)} &= [R_T]_k^{-1} \{T\}^{(LT)} \\ &= [R_T]_k^{-1} [c]_k [R_S]_k \{S\}^{(xy)} \\ &\quad - [R_T]_k^{-1} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k E_k \\ &= [Q]_k \{S\}^{(xy)} \\ &\quad + [R_T]_k^{-1} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k \frac{\phi_k}{h_k} \end{aligned} \quad (20)$$

در نتیجه با به دست آمدن تنش‌ها منته‌های تنش نیز برای یک چند لایه به صورت رابطه (۲۱) نوشته خواهد شد:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [I_3] [R_T]_k^{-1} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\phi_k}{h_k} dz \quad (21)$$

در رابطه (۲۱) ماتریس  $I_3$  ماتریس همانی ۳ در ۳ و ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $D$  به ترتیب ماتریس‌های کششی، کوپلینگ و خمشی هستند. رابطه‌ی دوم ساختاری که جایجایی الکتریک برای لایه‌ی  $k$  ام را می‌دهد در مختصات (XY) مطابق (۲۲) به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} D_k &= \{e_{31} \ e_{32} \ 0\}_k [R_S]_k \{S\}^{(xy)} - \varepsilon_k \frac{\phi_k}{h_k} \\ &= \{e_{31} \ e_{32} \ 0\}_k [R_S]_k [I_3 \ zI_3] \begin{Bmatrix} S_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} - \varepsilon_k \frac{\phi_k}{h_k} \end{aligned} \quad (22)$$

در نهایت با انتگرال‌گیری در راستای ضخامت برای هر لایه منته‌ی جایجایی الکتریکی هر لایه محاسبه خواهد شد.

$$\begin{aligned} \int_{z_{k-1}}^{z_k} D_k dz &= \\ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{e_{31} \ e_{32} \ 0\}_k [R_S]_k [I_3 \ zI_3] \begin{Bmatrix} S_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} dz & \\ - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \varepsilon_k \frac{\phi_k}{h_k} dz & \end{aligned} \quad (23)$$

در رابطه (۲۳)  $S_0$  و  $\kappa$  به ترتیب معرف کرنش صفحه میانی و چرخش<sup>۴</sup>‌ها بوده،  $I_3$  ماتریس همانی ۳ در ۳ و  $\varepsilon_k$  ثابت دی الکتریک لایه‌ی  $k$  ام می‌باشد.

### اعمال اثر ضریب پواسون

دو معادله‌ی (۲۱) و (۲۳) دو معادله‌ی اساسی ساختاری برای چند لایه‌هایی کامپوزیتی همراه با لایه‌ی پیروزوالکتریک هستند. با توجه به یک بعدی بودن مساله‌ی حاضر همانند بخش قبل می‌توان دریافت که  $M_{xy}$ ،  $M_{yy}$ ،  $N_{xy}$ ،  $N_{yy}$  صفر بوده و تنها مقادیر  $N_{xx}$  و  $M_{xx}$  غیر صفر هستند. در نتیجه با استفاده از معادلات (۲۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= (A_{11}\epsilon_{xx}^0 + A_{12}\epsilon_{yy}^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + B_{11}\kappa_{xx} \\ &\quad + B_{12}\kappa_{yy} + B_{16}\kappa_{xy}) \\ &\quad + \int_{z_{k-1}}^{z_k} e_{31} \frac{\phi_k}{h_k} dz \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (A_{12}\epsilon_{xx}^0 + A_{22}\epsilon_{yy}^0 + A_{26}\gamma_{xy}^0 + B_{12}\kappa_{xx} \\ &\quad + B_{22}\kappa_{yy} + B_{26}\kappa_{xy}) \\ &\quad + \int_{z_{k-1}}^{z_k} e_{32} \frac{\phi_k}{h_k} dz \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (A_{16}\epsilon_{xx}^0 + A_{26}\epsilon_{yy}^0 + A_{66}\gamma_{xy}^0 + B_{16}\kappa_{xx} \\ &\quad + B_{26}\kappa_{yy} + B_{66}\kappa_{xy}) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} M_{xx} &= (B_{11}\epsilon_{xx}^0 + B_{12}\epsilon_{yy}^0 + B_{16}\gamma_{xy}^0 + D_{11}\kappa_{xx} \\ &\quad + D_{12}\kappa_{yy} + D_{16}\kappa_{xy}) \\ &\quad + \int_{z_{k-1}}^{z_k} z e_{31} \frac{\phi_k}{h_k} dz \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (B_{12}\epsilon_{xx}^0 + B_{22}\epsilon_{yy}^0 + B_{26}\gamma_{xy}^0 + D_{12}\kappa_{xx} \\ &\quad + D_{22}\kappa_{yy} + D_{26}\kappa_{xy}) \\ &\quad + \int_{z_{k-1}}^{z_k} z e_{32} \frac{\phi_k}{h_k} dz \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (B_{16}\epsilon_{xx}^0 + B_{26}\epsilon_{yy}^0 + B_{66}\gamma_{xy}^0 + D_{16}\kappa_{xx} \\ &\quad + D_{26}\kappa_{yy} + D_{66}\kappa_{xy}) \end{aligned} \quad (29)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{L_e} \left( [N_{xx} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{b0} \\ \varepsilon_{yy}^{b0} \\ \varepsilon_{xy}^{b0} \end{bmatrix} + [M_{xx} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{b1} \\ \varepsilon_{yy}^{b1} \\ \varepsilon_{xy}^{b1} \end{bmatrix} \right) dx dy$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{L_e} (N_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^0 + N_{xx}^1 \varepsilon_{xx}^1 + N_{xx}^2 \varepsilon_{xx}^2 + N_{zz}^3 \varepsilon_{zz}^3 + N_{zz}^0 \varepsilon_{zz}^0 + N_{zz}^1 \varepsilon_{zz}^1 + N_{zz}^2 \varepsilon_{zz}^2 + N_{zz}^3 \varepsilon_{zz}^3 + N_{xz}^0 \varepsilon_{xz}^0 + N_{xz}^1 \varepsilon_{xz}^1 + N_{xz}^2 \varepsilon_{xz}^2) dx dy \quad (34)$$

که در این روابط  $L_e$  طول هر المان و  $b$  پهنای تیر است. در نهایت انرژی کرنشی کل سازه از جمع انرژی‌های کرنشی سه لایه بدست می‌آید:

$$U = U_b + U_c + U_t \quad (35)$$

همچنین انرژی الکتریکی داخلی لایه‌های پیزوالکتریک طبق رابطه‌ی (۳۶) با انتگرال‌گیری روی حجم لایه‌های پیزوالکتریک به‌دست می‌آید.

$$W_{ie} = \frac{1}{2} \int_{V_p} \mathbf{E}^t \mathbf{D} dV_p \quad (36)$$

در رابطه (۳۶)  $\mathbf{E}^t$  ترانزاده‌ی بردار میدان الکتریکی و  $\mathbf{D}$  نیز معرف بردار جابجایی الکتریکی است. انرژی جنبشی کل سازه برای المان نیز به صورت رابطه (۳۷) محاسبه می‌شود:

$$T = T_b + T_c + T_t \quad (37)$$

در رابطه (۳۷)  $T_c^{(e)}$ ،  $T_b^{(e)}$  و  $T_t^{(e)}$  به ترتیب بیانگر انرژی‌های جنبشی لایه‌ی بالا، پایین و هسته هستند که به صورت رابطه (۳۸) تعریف می‌شوند:

$$T_c = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{L_e} \int_0^b \rho [\dot{u}^2 + (\dot{w} + \dot{w}_{BASE})^2] dx dz dy,$$

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \int_0^{L_e} \int_0^b \rho_i [\dot{u}_i^2 + (\dot{w}_i + \dot{w}_{BASE})^2] dx dz dy \quad (38)$$

$$i = b, t$$

در رابطه (۳۸)  $\rho$  و  $\rho_b$ ،  $\rho_t$  به ترتیب مربوط به چگالی‌های لایه بالا، پایین و هسته است. در این معادلات  $\dot{w}_{BASE}$  همان سرعت تحریک پایه می‌باشد که به صورت

حال با استفاده از معادلات (۲۵)، (۲۶)، (۲۸) و (۲۹) مقادیر  $\kappa_{xx}$  و  $\varepsilon_{xx}^0$  را بر حسب  $\kappa_{xy}$  و  $\varepsilon_{yy}^0$ ،  $\gamma_{xy}^0$ ،  $\kappa_{yy}$  محاسبه کرده و در نهایت با جاگذاری در (۲۴) و (۲۷) به معادلات (۳۰) خواهیم رسید.

$$N_{xx} = (\bar{C}_1 \varepsilon_{xx}^0 + \bar{C}_2 \kappa_{xx}) + F_1 \quad (30)$$

$$M_{xx} = (\bar{C}_3 \varepsilon_{xx}^0 + \bar{C}_4 \kappa_{xx}) + F_2$$

که  $F_1$  و  $F_2$  ناشی از کوپلینگ الکترومکانیکی است. به همین ترتیب با قرار دادن مقادیر  $\kappa_{xy}$  و  $\varepsilon_{yy}^0$ ،  $\gamma_{xy}^0$ ،  $\kappa_{yy}$  رابطه‌ی ساختاری دوم ((۲۳)) این معادله نیز تنها بر حسب متغیرهای  $\varepsilon_{xx}^0$ ،  $\kappa_{xx}$  و  $E_3$  نوشته می‌شود:

$$D_3 = \bar{G}_1 \varepsilon_{xx}^0 + \bar{G}_2 \kappa_{xx} + \bar{G}_3 E_3 \quad (31)$$

که در آن شدت میدان الکتریکی  $E_3$  برابر  $volt/(h_p) -$  بوده و ضرایب  $\bar{C}_1$ ،  $\bar{C}_2$ ،  $\bar{C}_3$ ،  $\bar{G}_1$ ،  $\bar{G}_2$ ،  $\bar{G}_3$ ،  $F_1$ ،  $F_2$ ،  $\bar{C}_4$  و  $\bar{G}_4$  مقادیر ثابت و حاوی عبارات جبری بسیار طولانی بوده لذا قابل ارائه در اینجا نیستند.

### روابط انرژی برای هر المان

در این پژوهش به منظور استخراج ماتریس‌های اجزاء محدود از روابط لاگرانژ استفاده شده است. در این روابط نیاز است تا در ابتدا عبارت‌های انرژی کرنشی<sup>۵</sup> برای ماتریس سفیدی و کوپلینگ الکترومکانیکی، انرژی جنبشی<sup>۶</sup> برای ماتریس جرم و انرژی الکتریکی داخلی برای ماتریس ظرفیت<sup>۷</sup> برای هر المان تعیین شوند. در این راستا با توجه به رابطه انرژی کرنشی کلی (۳۲) برای لایه هسته (زیر لایه) و رویه‌ها انرژی کرنشی به صورت رابطه (۳۳) و (۳۴) بدست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \int \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (32)$$

$$U_t = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{L_e} \left( [N_{xx} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{t0} \\ \varepsilon_{yy}^{t0} \\ \varepsilon_{xy}^{t0} \end{bmatrix} + [M_{xx} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{t1} \\ \varepsilon_{yy}^{t1} \\ \varepsilon_{xy}^{t1} \end{bmatrix} \right) dx dy \quad (33)$$

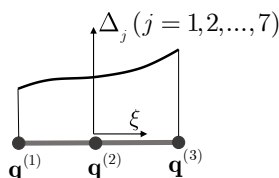
مرکز المان قرار گرفته است و رابطه آن با دستگاه مختصات کلی در جهت  $x$  برای  $n_e$  آمین المان به صورت رابطه (۴۱) تعریف می‌شود:

$$\xi = \left(\frac{2x}{L_e} - 1\right) - 2(n_e - 1) \quad (41)$$

بردار  $\mathbf{q}^{(i)}$  نیز که مولفه‌های آن جابجایی‌های هر گره است برای تیر ساندویچی به صورت رابطه (۴۲) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{q}^{(i)} = [u_{b0}^{(i)}, w_{b0}^{(i)}, w_{b0,x}^{(i)}, u_0^{(i)}, u_1^{(i)}, u_{t0}^{(i)}, w_0^{(i)}, w_{t0}^{(i)}, w_{t0,x}^{(i)}]^T, i = 1, 2, 3 \quad (42)$$

بنابراین در کل قسمت ساندویچی تیر هر گره تعداد ۹ درجه آزادی در نتیجه، هر المان ۲۷ درجه آزادی خواهد داشت. در رابطه (۴۲) همانطور که دیده می‌شود علاوه بر جابجایی‌های خارج صفحه‌ی لایه بالا و پایین، مشتقات این جابجایی‌ها نسبت به  $x$  یعنی  $w_{t0,x}^{(i)}$  و  $w_{b0,x}^{(i)}$  وجود دارد که علت آن استفاده از المان نوع هرمیتی برای این دو لایه است. در شکل ۲،  $\Delta$  بردار درجات آزادی هر گره است که در رابطه (۴۳) نشان داده شده است.  $\Delta$  به کمک توابع شکلی که از درون‌یابی توابع چندجمله‌ای برای یک المان سه گره‌ی به‌دست آمده است، تقریب زده می‌شود (رابطه (۴۴)).



شکل ۲. المان سه گره‌ی با مختصات بی بعد  $\xi$

$$\Delta(\xi) = [u_{b0}, w_{b0}, u_0, u_1, u_{t0}, w_0, w_{t0}]^T. \quad (43)$$

$$\Delta = \mathbf{N}\mathbf{q} \quad (44)$$

در رابطه (۴۴)،  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}^{(1)}; \mathbf{q}^{(2)}; \mathbf{q}^{(3)}]$  است که قبلاً تعریف شده و  $\mathbf{N}$  ماتریس توابع شکل نام دارد و شامل ۷ ردیف و ۲۷ ستون است و عناصر غیر صفر ردیف‌های ۱، ۳، ۴، ۵ و ۶ به صورت رابطه (۴۵) به‌دست آمده است:

$$N_{1(9i-8)} = N_{3(9i-5)} = N_{4(9i-4)} = N_{5(9i-3)} = N_{6(9i-2)} = S_i^{(1)}(\xi), \quad (45)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

در رابطه (۴۵)  $S_i^{(1)}$  تابع شکل لاگرانژی برای المان سه گره‌ی است که به صورت رابطه (۴۶) به‌دست می‌آید:

یکنواخت و ثابت به قسمت پایه تیر گیردار وارد می‌شود و همچنین توجه شود که تابعی از زمان است. همان طور که بیان شد، این جابجایی مربوط به تحریک خارجی است. بنابراین بعد از بسط توان‌ها در رابطه انرژی جنبشی، ترم‌هایی که شامل  $\dot{W}_{BASE}$  هستند بعد از قرارگرفتن در رابطه لاگرانژ استخراج شده و در بردار نیرو قرار می‌گیرند. با وردش<sup>۱</sup> گرفتن از معادلات، این سرعت به شتاب تبدیل خواهد شد. در نهایت با استفاده از روابط (۱) تا (۱۲) انرژی‌های کرنشی و جنبشی ارائه شده در (۳۵) و (۳۷) بر حسب هفت متغیر جابجایی مستقل از هم نوشته می‌شوند.

### ماتریس کوپلینگ $\Theta$

با قراردادن روابط انرژی کرنشی کل سازه در معادله‌ی همیلتون و شروع انتگرال‌گیری روی دامنه‌ی حل، ترم انرژی‌های کرنشی الکتریکی که بیانگر کوپلینگ بین میدان الکتریکی و کرنش‌ها است منجر به ایجاد ماتریس کوپلینگ  $\Theta$  خواهد شد.

$$\int_v \delta(U_T) = \delta d_e^T k_e^T d_e + \delta v_e^T \theta_e^T d_e \quad (39)$$

که  $d_e$  بردار جابجایی المان و  $v_e$  بردار ولتاژ المان می‌باشد.

### ماتریس ظرفیت $C_p$

نهایتاً با وردش گرفتن از انرژی الکتریکی داخلی که در رابطه‌ی (۳۶) ارائه شده است، ماتریس ظرفیت پیزوالکتریک محاسبه خواهد شد.

$$\int_v \delta(D_3 E_3) = \delta((\bar{G}_1 \epsilon_{xx}^0 + \bar{G}_2 \kappa_{xx} + \bar{G}_3 E_3) E_3) = \delta v_e^T c_p v_e \quad (40)$$

که در رابطه (۴۰)  $v_e$  بردار ولتاژ برای یک المان می‌باشد. مقادیر ماتریس ظرفیت برای یک المان در بخش بعدی ارائه شده است.

### روابط روش المان محدود

در این بخش به نحوه اعمال روش المان محدود و محاسبه ماتریس‌های جرم، سفتی و میرایی پرداخته خواهد شد. برای گسسته‌سازی هندسه‌ی تیر، المان در نظر گرفته شده یک المان سه گره‌ی یک بعدی است که در شکل ۲ نشان داده شده است. در این شکل،  $\xi$  مختصات بی‌بعد هر المان است که مبدأ آن در

که  $n$  برابر با ۲۷ است. ماتریس‌های  $\mathbf{K}^{(e)}$ ،  $\mathbf{C}_p^{(e)}$ ،  $\mathbf{\Theta}^{(e)}$ ،  $\mathbf{M}^{(e)}$  و  $\mathbf{F}^{(e)}$  نیز به ترتیب ماتریس‌های سفتی، جرمی سازه‌ای، کوپلینگ الکترومکانیکی، ظرفیت و نیرویی برای هر المان را نشان می‌دهند که عبارات مرتبط با آنها در حالت کلی و به‌ویژه برای حالت حاوی پیوزالکتریک (بخش ساندویچی)، عباراتی بسیار طولانی می‌باشند. با این حال عبارات بردار کوپلینگ و ماتریس ظرفیت در روابط (۵۱) و (۵۲) آورده شده است.

$$\theta_{ij}^{(e)} = \frac{2b \left( \frac{d^2}{d\xi^2} SS7_{jl}(\xi) \right) F_{2t}}{Le^2 ht} - \frac{b \left( \frac{d}{d\xi} SS1_{jl}(\xi) \right) F_{1b}}{Lehb} \quad (51)$$

$$C_p^{(e)} = \frac{2b \left( \frac{d^2}{d\xi^2} SS2_{jl}(\xi) \right) F_{2b}}{Le^2 hb} + \frac{b \left( \frac{d}{d\xi} SS5_{j1}(\xi) \right) F_{1t}}{Leht} \quad (52)$$

لازم به ذکر است جهت در نظرگیری میرایی سیستم نیز از میرایی رایلی یا میرایی تناسبی فقط برای تیر اصلی یعنی بدون پیوزالکتریک (تنها هسته و رویه‌ی کامپوزیتی) استفاده می‌شود.

$$\mathbf{C}_e = \alpha \mathbf{M}_{e_{beam}} + \beta \mathbf{K}_{e_{beam}} \quad (53)$$

### معادلات الکترومکانیکی سیستم

با انجام عملیات تجمیع ماتریس‌های المانی (عمل اسمبلی) ماتریس‌های کل سازه به‌دست می‌آید که با اعمال شرایط مرزی معادله نهایی الکترومکانیکی تیر ساندویچی برای برداشت کننده انرژی حاصل می‌شود.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} - \tilde{\mathbf{\Theta}}v_0 = \mathbf{F} \quad (54)$$

$$\tilde{\mathbf{\Theta}}^T \mathbf{d} + C_p v_0 + Q = 0$$

همچنین لازم به ذکر است اثر تحریک پایه یعنی  $\dot{W}_{BASE}$  در رابطه (۳۸) به سمت راست معادله اضافه شده و در ماتریس نیرویی  $\mathbf{F}$  ظاهر می‌شود. با مشتق‌گیری از رابطه دوم (۵۴) خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{\Theta}}^T \dot{\mathbf{d}} + C_p \dot{v}_0 + \frac{v_0}{R} = 0 \quad (55)$$

$$S_1^{(1)} = \frac{\xi^2 - \xi}{2}, S_2^{(1)} = -\xi^2 + 1, S_3^{(1)} = \frac{\xi^2 + \xi}{2} \quad (46)$$

باقی مولفه‌های  $\Delta$  که شامل جابجایی خارج صفحه لایه بالا و پایین است ( $W_{t0}$  و  $W_{b0}$ )، به کمک توابع شکل هرمیتی با پیوستگی  $C^1$  تقریب زده می‌شوند که به علت فرض اوپلر-برنولی بودن این دو لایه این نوع تابع شکل انتخاب شده است. بنابراین، مؤلفه‌های ردیف دوم و هفتم ماتریس  $\mathbf{N}$  از طریق رابطه (۴۷) تعیین می‌شوند:

$$N_{2(9i-7)} = N_{7(9i-1)} = S_i^{(2)}(\xi), \quad (47)$$

$$N_{2(9i-6)} = N_{7(9i)} = D_i^{(2)}(\xi), \quad i = 1, 2, 3,$$

در رابطه (۴۷) توابع شکل هرمیتی  $S_i^{(2)}(\xi)$  و  $D_i^{(2)}(\xi)$  برای المان سه گرهی به صورت رابطه (۴۸) و (۴۹) به‌دست می‌آیند:

$$S_1^{(2)} = \frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 - \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2, \quad (48)$$

$$S_2^{(2)} = \xi^4 - 2\xi^2 + 1,$$

$$S_3^{(2)} = -\frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 + \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2,$$

$$D_1^{(2)} = \frac{1}{4}(\xi^5 - \xi^4 - \xi^3 + \xi^2), \quad (49)$$

$$D_2^{(2)} = (\xi^2 - 2\xi^3 - \xi),$$

$$D_3^{(2)} = \frac{1}{4}(\xi^5 + \xi^4 - \xi^3 - \xi^2).$$

در نهایت، بعد از تعریف مجهول‌های جابجایی و جایگذاری در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل،  $T^{(e)}$  و  $U^{(e)}$  به اختصار به صورت رابطه (۵۰) برای هر المان حاصل می‌شوند:

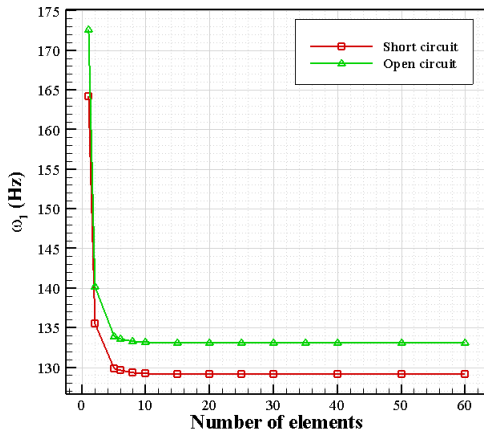
$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}^{(e)} q_i q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^1 \theta_{ij}^{(e)} q_i \vartheta_j$$

$$T^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^{(e)} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (50)$$

$$W_{ie}^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^1 \theta_{ji}^{(e)} q_i \vartheta_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 C_{p_{ij}}^{(e)} \vartheta_i \vartheta_j,$$

شده است. همچنین مشخصات هندسی و مکانیکی در جدول ۲ آورده شده است.

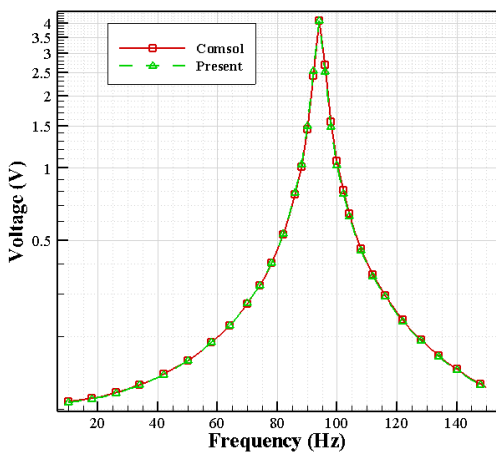
طبق نمودار شکل ۴ ولتاژها با دقت بسیار خوبی بر یکدیگر منطبق می‌باشند.



شکل ۳: نمودار تحلیل همگرایی برای دو فرکانس اول مدار باز و مدار بسته

جدول ۱: مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی مدار باز و اتصال کوتاه با مرجع [۲]

شماره	مدار باز (هرتز)	اتصال کوتاه (هرتز)	مدار باز (هرتز)	اتصال کوتاه (هرتز)	خطای مدار باز (%)	خطای اتصال کوتاه (%)
۱	۹۶,۳۰	۹۶,۰۹	۹۶,۱۸	۹۶,۰۲	۰,۱۲	۰,۰۷
۲	۴۰۹,۴۸	۴۰۹,۰۶	۴۰۷,۳۳	۴۰۷,۰۸	۰,۵۲	۰,۴۸



شکل ۴: مقایسه‌ی ولتاژ سری با نرم افزار کامسول در حالت سه بعدی و پوشش یک چهارم طول

که  $R$  همان مقاومت بر حسب اهم نماینده‌ی بار مصرفی و  $C_p$  ظرفیت پیزوالکتریک است. برای یافتن پاسخ حالت پایا و با فرض هارمونیک بودن ورودی سیستم با قرار دادن  $\mathbf{d}_0 e^{j\omega t}$  به جای بردار جابجایی  $\mathbf{d}$  داریم:

$$[\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{C}]\mathbf{d}_0 - \tilde{\Theta}v = \mathbf{F}_0 \quad (56)$$

که  $\omega$  همان فرکانس تحریک پایه (یا درکل فرکانس نیروی خارجی) می‌باشد. و از معادله بعدی داریم:

$$\left(\frac{1}{R} + j\omega C_p\right)v + j\omega\tilde{\Theta}d_0 = 0 \quad (57)$$

درنهایت ولتاژ حالت پایا<sup>۱</sup> و جابجایی‌ها مطابق رابطه (۵۸) به دست می‌آید.

$$v_{ss} = \frac{\omega\tilde{\Theta}^T d_0}{\left(\frac{1}{R} + j\omega C_p\right)} \quad (58)$$

$$\left[ \mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{C} + (j\omega\tilde{\Theta}\tilde{\Theta}^T) \left( \frac{1}{R} + j\omega C_p \right)^{-1} \right] d_0 = \mathbf{F}_0$$

## نتایج عددی

### صحت سنجی

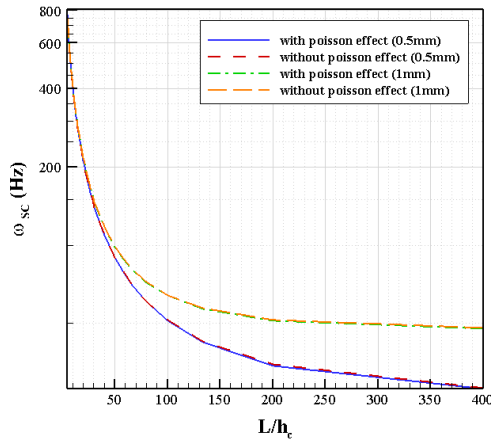
قبل از انجام صحت سنجی در این بخش تحلیل همگرایی مطابق شکل ۳ انجام شده است و مطابق این تحلیل، نمودار با ۳۰ المان با دقت صدم به همگرایی رسیده است.

لازم به ذکر است محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی در حالت اتصال کوتاه ( $R \rightarrow 0$ ) و مدار باز ( $R \rightarrow \infty$ ) طبق رابطه‌ی (۵۹) محاسبه شده است.

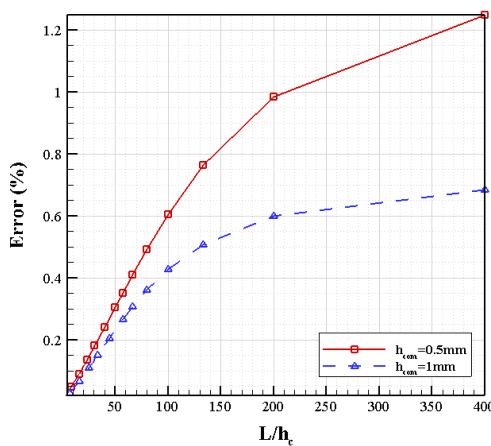
$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} &= 0 & R \rightarrow 0 \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^*\mathbf{d} &= 0 & R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (59)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \frac{\tilde{\Theta}\tilde{\Theta}^T}{C_p}$$

به منظور انجام صحت سنجی کد رایانه‌ای، فرکانس‌های طبیعی یک تیر ساندویچی با هسته‌ی پلاستیک پلی کربنات با رویه‌های آلومینیومی همراه با یک لایه‌ی پیزوالکتریک مطابق مرجع [۲] و مطالعه‌ی حاضر در جدول ۱ مقایسه شده‌اند. در یک صحت سنجی دیگر به منظور ارزیابی ولتاژ خروجی در حالت پوشش موضعی در یک برداشت کننده‌ی ساندویچی، نتایج تحلیل حاضر با نرم افزار کامسول در حالت سه بعدی در شکل ۴ مقایسه شده است. بر این اساس لایه‌های پیزوالکتریک به طول یک چهارم طول کل تیر و در موقعیت وسط تیر فرض



(الف)



(ب)

شکل ۵: اثر ضریب پواسون برای کامپوزیت تک لایه با زاویه ی الیاف ۹۰ (الف) فرکانس اتصال کوتاه (ب) درصد خطا

برای روشن شدن نقش پیزوالکتریک‌ها در بررسی اثر ضریب پواسون، خطای فرکانس مدارباز سیستم، یعنی زمانی که مقاومت الکتریکی بینهایت شده است، در شکل ۷ رسم شده است. به این منظور نمودار در دو حالتی که رویه‌ی بالا و پایین هر کدام تک لایه و ۹۰ درجه بوده و حالتی که دولایه با زاویه ۹۰ و ۹۰ درجه باشند ارائه شده است.

مطابق شکل درصد خطای فرکانس مدارباز بیشتر از اتصال کوتاه می‌باشد به طوری‌که با دو لایه شدن کامپوزیت‌ها با ضخامت کل ثابت (۰.۵ میلی‌متر) تا  $L/h_c$  حدوداً ۸۰ خطای دولایه بیشتر از کامپوزیت تک‌لایه و بعد از آن کمتر است.

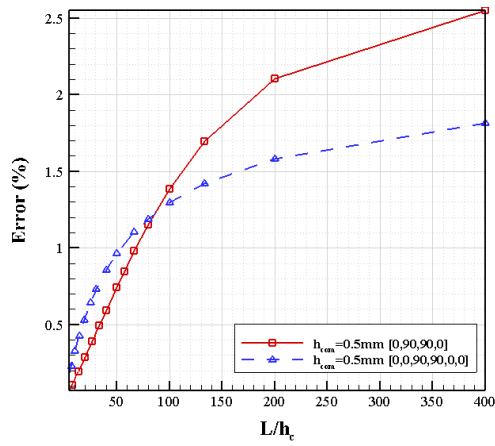
نمودار مذکور برای زوایای ۴۵ و ۴۵ - درجه در شکل ۸ ارائه شده است. طبق نمودار مشاهده می‌شود که خطای عدم در نظرگیری ضریب پواسون تا حدود ۳۵ درصد برای کامپوزیت تک لایه رسیده است. علت این موضوع را می‌توان به افزایش کوپلینگ خمش و کشش در لایه کامپوزیت نسبت داد.

جدول ۲: مشخصات هندسی و مکانیکی

مقدار	متغیر	اجزای برداشت کننده
$L = 0.2m, b = 0.01m$ $h = 5mm$	طول، پهنا و ضخامت	مشخصات تیر
$E = 70Gpa, \nu = 0.33$ $\rho = 2700$	مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و چگالی	
$L = 0.05m, b = 0.01m$ $h = 2mm$	طول، پهنا و ضخامت	
$c_{11} = c_{22} = 6.95e10$ $c_{12} = 2.43e10$ $c_{66} = 2.25e10$ $\rho = 7750$	ضرایب ماتریس سفتی و چگالی	مشخصات پیزوالکتریک‌ها
$e_{31} = 16.04$ $\epsilon_{33}^S = 9.5e - 9 F$	ثوابت پیزوالکتریک و دی الکتریک	
$R = 1e8\Omega, \zeta = 0.02$	مقاومت الکتریکی و نسبت میرایی	

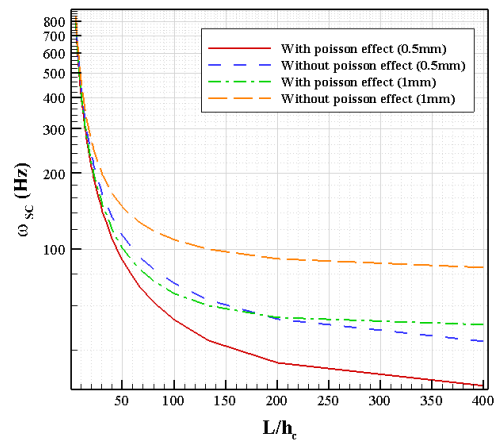
### بررسی اثر ضریب پواسون

شکل ۵- الف فرکانس طبیعی اتصال کوتاه (فرکانسی که فقط از ماتریس جرمی و سفتی بدست آمده است) را برای دو ضخامت مختلف کامپوزیت تک‌لایه و در دو حالت با ضریب پواسون و بدون ضریب پواسون نشان می‌دهد. در این نمودارها ضخامت پیزوالکتریک ۰.۱ میلی‌متر و زاویه ی الیاف کامپوزیت ۹۰ درجه فرض شده است. طبق نمودار برای هر دو ضخامت نمودارها تقریباً روی هم منطبق بوده و می‌توان دریافت ضریب پواسون تاثیر خاصی در فرکانس اتصال کوتاه نداشته است. در قسمت (ب) نیز درصد خطای عدم در نظرگیری ضریب پواسون آورده شده است که با افزایش  $L/h_c$  با توجه به کوچک بودن فرکانس‌ها درصد خطا بیشتر شده است. همچنین در ضخامت بیشتر لایه‌ی کامپوزیت درصد خطا کم‌تر از حالتی است که ضخامت لایه کامپوزیت کم می‌باشد. در شکل ۶- الف نمودار فرکانس اتصال کوتاه برای زاویه ی ۴۵ درجه رسم شده است. طبق نمودار در این حالت اثر ضریب پواسون بسیار محسوس بوده به طوری که با کاهش ضخامت اختلاف دو حالت زیاد شده و مطابق شکل ۶- ب در صد خطا نیز بیشتر شده است. همچنین با افزایش ضخامت کامپوزیت یعنی ۱ میلی‌متر برخلاف زاویه ۹۰ درجه خطای بیشتری حاصل می‌شود.

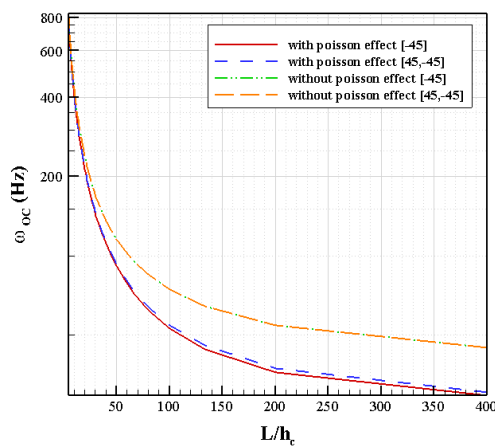


(ب)

شکل ۷: اثر ضریب پواسون برای کامپوزیت تک لایه و دولایه با زاویه‌ی الیاف ۰ و ۹۰ درجه الف) فرکانس مدارباز ب) درصد خطا

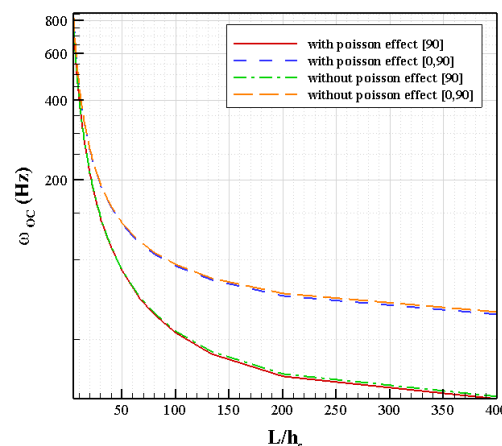


(ف)

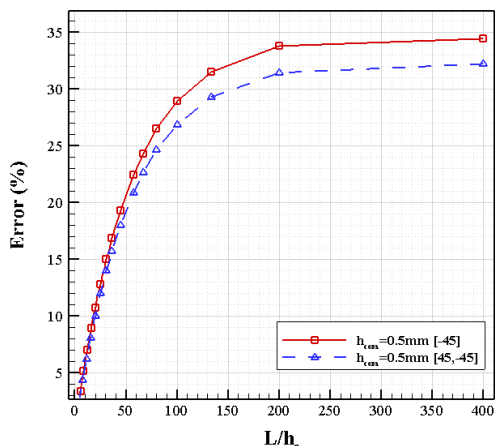


(الف)

شکل ۶: اثر ضریب پواسون برای کامپوزیت تک لایه با زاویه‌ی الیاف ۴۵ درجه الف) فرکانس اتصال کوتاه ب) درصد خطا



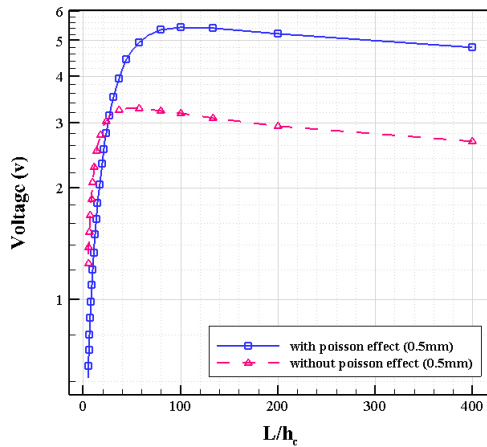
(ف)



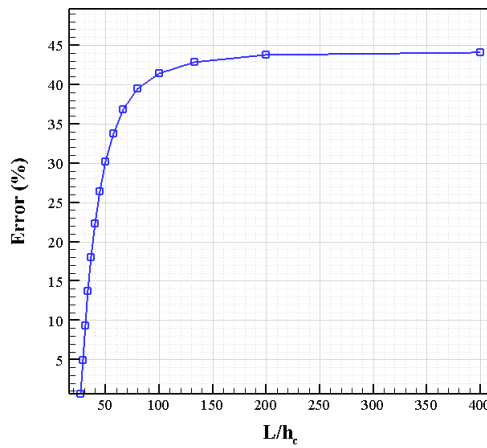
(ب)

شکل ۸: الف) فرکانس مدارباز ب) درصد خطای فرکانس مدارباز برای دو لایه چینی متفاوت رویه بالا و پایین

در شکل ۱۰-الف تغییرات ولتاژ برداشت‌کننده برای زاویه ۴۵ درجه دیده می‌شود. با توجه به نمودار ضمن اینکه تغییر زاویه‌ی الیاف ولتاژ حاصل را نسبت به قبل افزایش داده است، اما اختلاف دو نمودار بیشتر شده است. لذا اثر ضریب پواسون در زاویه ۴۵ درجه بیشتر مشهود می‌باشد. در شکل ۱۰-ب درصد خطای ولتاژ محاسبه شده با نازک شدن هسته به حدود ۴۴ درصد رسیده است.



(الف)



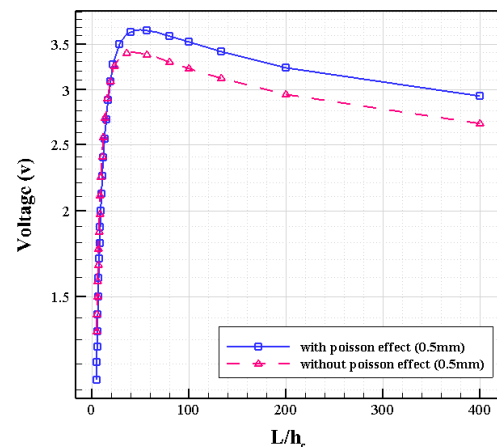
(ب)

شکل ۱۰: اثر ضریب پواسون بر ولتاژ، زاویه الیاف ۴۵ درجه (ب) درصد خطا

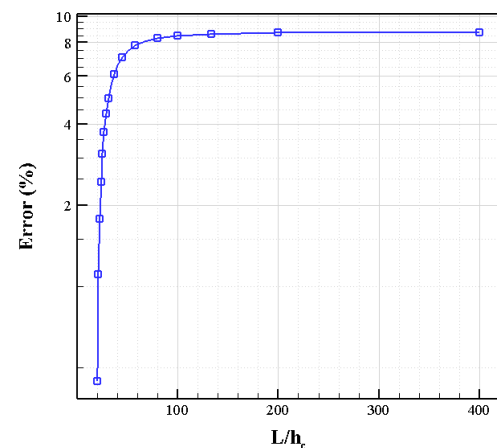
به منظور روشن شدن اثر زاویه‌ی الیاف بر اهمیت در نظریه ضریب پواسون، در شکل ۱۱ تغییرات ولتاژ بر حسب زوایای مختلف الیاف رویه‌ها رسم شده است. در این شکل نمودار برای فرکانس تشدید و همچنین ضرایب میرایی هر زاویه محاسبه شده و رویه‌ها تک لایه و با ضخامت ۰/۵ میلی‌متر در نظر گرفته شده‌اند. طبق شکل با افزایش زاویه تا حدوداً ۳۶

### بررسی ولتاژ و دامنه جابجایی برداشت‌کننده

در این قسمت به بررسی اثر ضریب پواسون بر ولتاژ پیزوالکتریک‌ها پرداخته می‌شود. به این منظور فرکانس تشدید تیر ساندویچی در ابتدا پیدا شده و برداشت‌کننده تحت این فرکانس تحریک با دامنه ی ثابت  $\frac{1m}{s^2}$  قرار می‌گیرد. همچنین ضرایب میرایی با توجه به ضخامت هسته تغییر می‌کند که این مورد نیز در کد رایانه‌ای لحاظ شده است. در شکل ۹-الف ولتاژ برداشت‌کننده انرژی با ضریب پواسون و بدون آن برای زاویه‌ی ۹۰ درجه الیاف مشاهده می‌شود. مطابق شکل برای هر دو نمودار با نازک شدن هسته (افزایش  $L/h_c$ ) ابتدا ولتاژ زیاد شده و سپس کاهش یافته است. اما به اختلاف دو نمودار افزوده می‌شود به طوریکه در قسمت (ب) درصد خطا به ۹ درصد رسیده است.



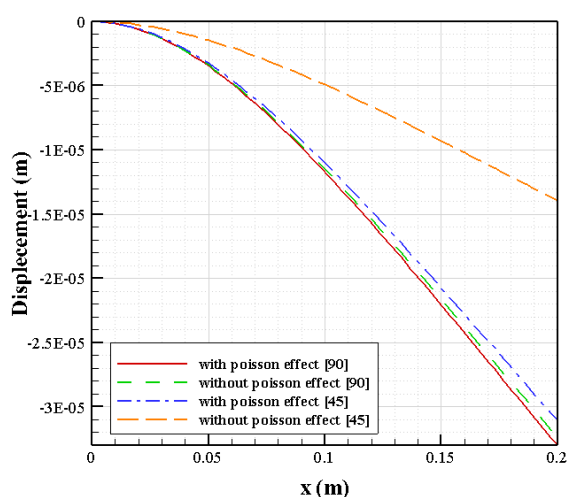
(الف)



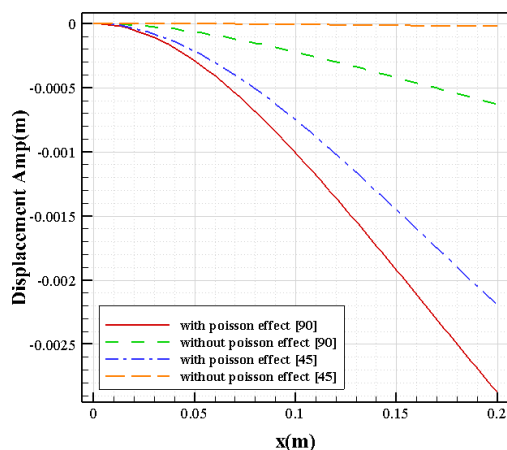
(ب)

شکل ۹: اثر ضریب پواسون بر ولتاژ، زاویه الیاف ۹۰ درجه (ب) درصد خطا

شکل ۱۳ اثر ضریب پواسون بر تغییرات دامنه‌ی حرکت نقاط مختلف تیر را در فرکانس تشدید ۳۶ هرتز و برای زاویه‌ی الیاف ۹۰ و ۴۵ درجه نشان می‌دهد. همچنین خطای صرف نظر کردن از اثر ضریب پواسون در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود. طبق نمودار دامنه جابجایی اگرچه در زاویه‌ی ۴۵ درجه چشمگیر است اما در زاویه‌ی ۹۰ درجه نیز این خطا زیاد بوده و قابل چشم پوشی نیست. بر خلاف شکل ۱۲ اثر ضریب پواسون هم در ماتریس سفتی و هم در ماتریس کوپلینگ الکترومکانیکی و هم در ماتریس میرایی نهفته خواهد شد بنابراین انتظار می‌رود اثر پواسون در فرکانس‌های غیر صفر مشهودتر باشد.

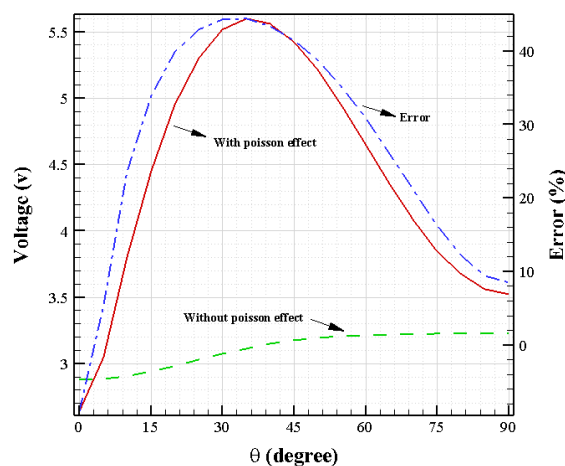


شکل ۱۲: اثر ضریب پواسون بر خیز در فرکانس صفر



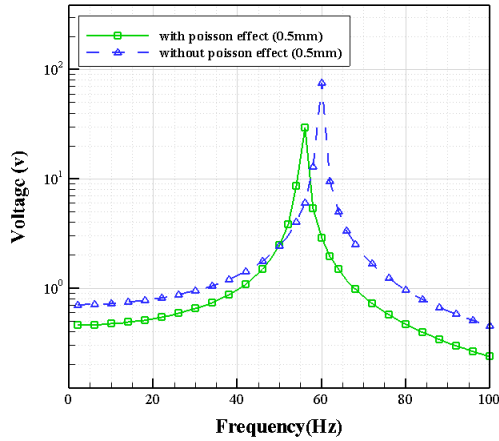
شکل ۱۳: اثر ضریب پواسون بر خیز در فرکانس تشدید ۳۶ هرتز، زاویه الیاف ۹۰ درجه و ۴۵ درجه

درجه ولتاژ به بیشترین حد خود رسیده و بعد از آن سیر نزولی دارد. با بررسی نمودار خطا در این شکل واضح است که عدم در نظرگیری اثر پواسون در زوایای ۰ تا ۳/۱ درجه منجر به پاسخ‌های بیشتر شده، در ۳/۱ درجه به صفر رسیده و بعد از آن ولتاژ محاسبه شده کم‌تر از مقدار صحیح آن خواهد بود. همچنین در زاویه‌ی ۳۶ درجه نمودار خطا به بیشینه خود رسیده و در ۹۰ درجه نیز خطا به زیر ۱۰ درصد می‌رسد.

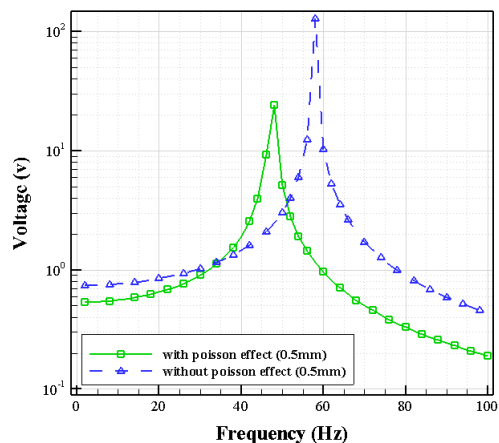


شکل ۱۴: اثر ضریب پواسون بر تغییرات ولتاژ با تغییر زاویه‌ی الیاف رویه بالا و پایین و  $h_c = 2mm$

در واقع به دلیل اثر گذاری ضریب پواسون بر فرکانس تشدید مدار باز، فرکانس تحریک نیز برای حالتی که با ضریب پواسون بوده و حالتی که بدون اثر این ضریب است متفاوت می‌باشد. همچنین به دلیل اثر گذاری بر ضرایب میرایی رایلی، ماتریس میرایی نیز برای دو حالت فرق می‌کند. بنابراین مجموع دو عامل یاد شده به همراه تاثیر مستقیم ضریب پواسون بر ولتاژ باعث شده است تا اختلاف دو حالت، در زاویه‌ای خاص از الیاف به حداکثر مقدار برسد. خیز تیر ساندویچی در فرکانس تحریک صفر برای زوایای ۹۰ و ۴۵ درجه در شکل ۱۲ رسم شده است. مطابق نمودارها در زاویه‌ی ۹۰ درجه اثر ضریب پواسون بر خیز تیر بسیار ناچیز بوده و دو نمودار تقریباً بر هم منطبق هستند اما در زاویه‌ی ۴۵ درجه تاثیر ضریب پواسون مشهود است و اختلاف در نوک تیر به بیشینه خود رسیده است. علت این موضوع را می‌توان در معادلات (۵۶) و (۵۷) جستجو کرد به طوری که با صفر شدن فرکانس تحریک معادله-ی حرکت به معادله‌ی استاتیکی شبیه می‌شود و تنها اثر ضریب پواسون در ماتریس سفتی باقی می‌ماند.

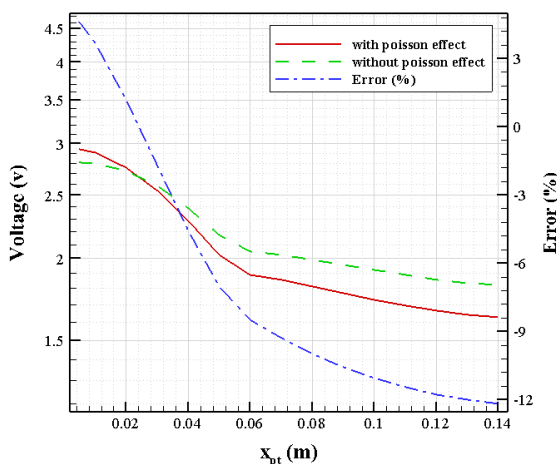


(الف)



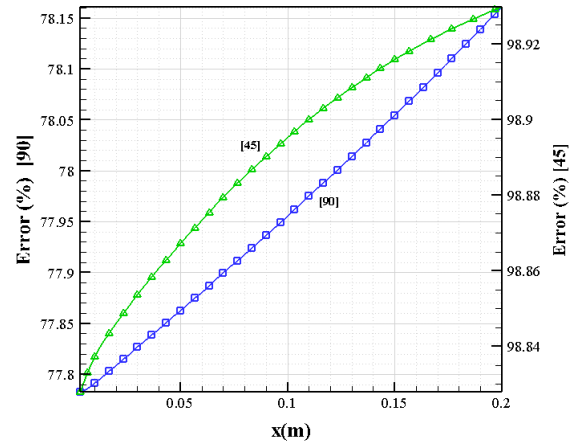
(ب)

شکل ۱۵: الف) زوایای [0,90] ب) زوایای [45,-45]



شکل ۱۶: تغییرات ولتاژ به ازای موقعیت‌های پیزوالکتریک بالایی و خطای عدم در نظرگیری ضریب پواسون. چیدمان [0,90]

در شکل ۱۷ برخلاف نمودار قبل روند تغییرات ولتاژ در صورت عدم در نظرگیری پواسون متفاوت خواهد شد ولی



شکل ۱۴: در صد خطای خیز در صورت عدم در نظرگیری ضریب پواسون در فرکانس تشدید، زوایای ۹۰ و ۴۵ درجه

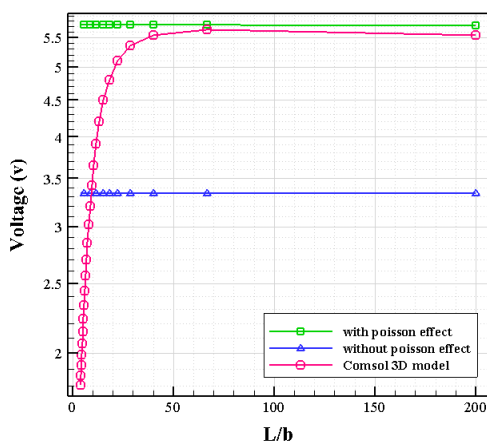
در شکل ۱۵-الف تغییرات ولتاژ با فرکانس تحریک برای لایه چینی [0,90] برای هم رویه بالا و هم پایین مشاهده می‌شود. مطابق نمودار واضح است که عدم در نظرگیری اثر ضریب پواسون برای زوایای متعامد نیز منجر به پاسخ‌های متفاوت خواهد شد. نمودار شکل ۱۵-الف برای چند لایه‌ی زاویه دار در شکل ۱۵-ب رسم شده است. مشاهده می‌شود که طبق انتظار تفاوت دو ولتاژ برای اثر ضریب پواسون بیشتر از حالت متعامد می‌باشد.

برای روشن شدن اثر عدم تقارن بین رویه‌ها، پیزوالکتریک پایین و بالا به طول یک چهارم طول کل ( $\frac{L_p}{L} = 1/4$ ) تیر فرض شده و پیزوالکتریک پایین در موقعیت نزدیک سمت گیردار ثابت بوده و پیزوالکتریک بالا به سمت لبه آزاد جابجا شده است. اثر این تغییر موقعیت در شکل ۱۶ برای چیدمان [0,90] و شکل ۱۷ برای [-45,45] رسم شده است. در این حالت نیز تمامی ولتاژها در فرکانس تشدید آن موقعیت محاسبه شدند. مطابق شکل ۱۶ با حرکت پیزوی بالایی روند تغییر ولتاژ برای با ضریب پواسون و بدون آن تقریباً مشابه بوده اما خطای ولتاژ با افزایش عدم تقارن پیزوها بیشتر می‌شود و در نهایت به مقدار بیشینه‌ی ۱۲- درصد رسیده است. همچنین در بررسی پوشش سراسری پیزوها با همین چیدمان و شرایط مشاهده شد که بیشترین ولتاژ ۲,۱۴ ولت و بدون اثر پواسون ۲,۰۵ ولت بدست می‌آید که خطای آن حدود ۵,۳ درصد می‌شود.

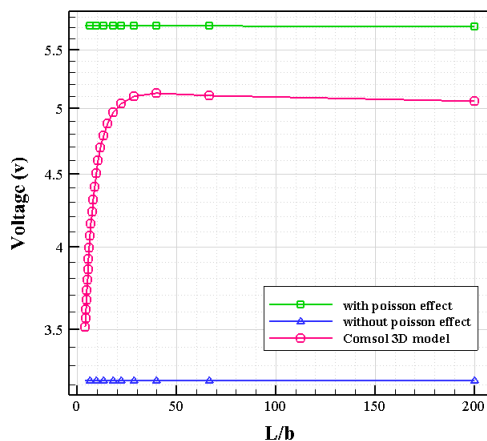
### اثر ضریب پواسون با تغییر پهنا

در این قسمت محاسبات به ازای تغییرات پارامتر  $b$  (پهنای تیر) انجام شده است. در این راستا جهت مقایسه‌ی درستی نتایج با احتساب اثر ضریب پواسون بر ولتاژ تیر، برداشت کننده‌ی بایمورف در نرم افزار کامسول به صورت ۳ بعدی مدل سازی شده است. در شکل ۱۹-الف تا شکل ۱۹-ج به ترتیب ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک ۰,۱، ۰,۵ و ۱ میلی‌متر فرض شده است. مطابق هر سه شکل با کاهش پهنای تیر از حدودا  $\frac{L}{b} = 30$  روند افزایشی ولتاژ الکتریکی متوقف شده است و مقادیر به کد یک بعدی حاضر همراه با اثر ضریب پواسون نزدیک می‌شود.

درصد خطای ولتاژ برای حالت با ضریب پواسون و مدل سه بعدی کامسول در فرکانس تحریک تشدید در شکل ۲۰ رسم شده است که برای هر سه ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک از حدود  $\frac{L}{b} = 30$  سیر نزولی درصد خطا شروع شده است.



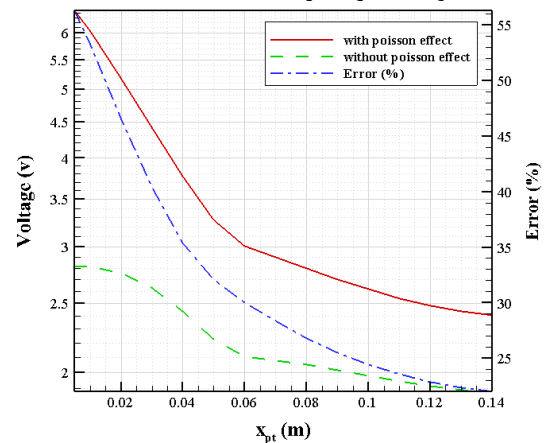
(الف)



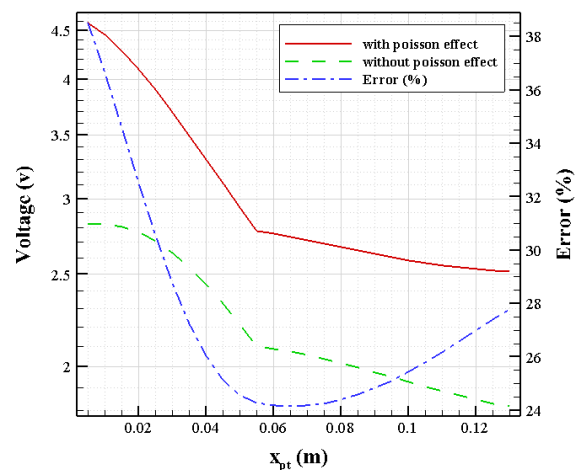
(ب)

بیشترین خطا در زمانی که پیژوی بالا دقیقا بالای پیژوی پایین قرار گرفته حاصل می‌شود که این مقدار به حدود ۵۵ درصد خطا رسیده است. همچنین با افزایش عدم تقارن ولتاژ خروجی نیز کم می‌شود. در این چیدمان نیز با بررسی پوشش سراسری پیژوها بیشترین ولتاژ ۴,۲۵ ولت و بدون اثر پواسون ۲,۰۲ ولت حاصل شده است که خطای آن حدودا ۵۲ درصد خواهد شد.

شکل ۱۸ چیدمان رویه کامپوزیتی بالا نسبت به پایین متفاوت و نامتقارن بوده به طوریکه رویه بالا با چیدمان [0,90] و رویه پایین [45,45] فرض شده است. با مشاهده نمودار همچنان با حرکت پیزوالکتریک بالایی ولتاژ کاهش یافته اما خطای در نظر نگرفتن اثر پواسون در ابتدا کاهشی و سپس از موقعیت  $\frac{x_p}{L} = 0.3$  روند افزایشی یافته و در بیشترین مقدار به خطای حدود ۳۸ درصد رسیده است.



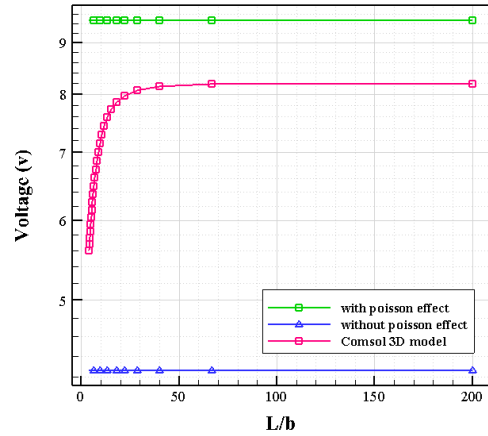
شکل ۱۷: تغییرات ولتاژ به ازای موقعیت‌های پیزوالکتریک بالایی و خطای عدم در نظر گیری ضریب پواسون. چیدمان [45,45]



شکل ۱۸: تغییرات ولتاژ به ازای موقعیت‌های پیزوالکتریک بالایی و خطای عدم در نظر گیری ضریب پواسون. لایه پایین [45,45] و لایه بالا [0,90]

در قسمت اول نتایج نشان داده شد که اثر ضریب پواسون بر فرکانس طبیعی اتصال کوتاه و مدار باز برای کامپوزیت‌های با زوایای متعامد چندان زیاد نیست اما در لایه چینی‌های زاویه دار درصد خطا به ۷۰ درصد در  $\frac{L}{h_c} = 400$  خواهد رسید. در قسمت دوم اثر ضریب پواسون بر ولتاژ و دامنه‌ی تیر ساندویچی در فرکانس تشدید بررسی شدند. طبق نتایج بر خلاف فرکانس‌های طبیعی، در صورت در نظر گرفتن اثر ضریب پواسون برای زوایای متعامد درصد خطای ولتاژ به حدود ۱۰ درصد و برای کامپوزیت زاویه دار به ۴۴ درصد رسیده است. در یک بررسی دیگر تغییرات ولتاژ به ازای زوایای مختلف رویه‌ها از صفر تا ۹۰ درجه با مدل حاضر و مدل بدون ضریب پواسون رسم شد. در این بخش مشاهده شد با افزایش زاویه تا حدودا ۳۶ درجه ولتاژ به بیشترین حد خود رسیده و بعد از آن سیر نزولی دارد. همچنین در زاویه‌ی ۳۶ درجه نمودار خطا به بیشینه خود رسیده و در ۹۰ درجه نیز خطای ولتاژ به زیر ۱۰ درصد می‌رسد.

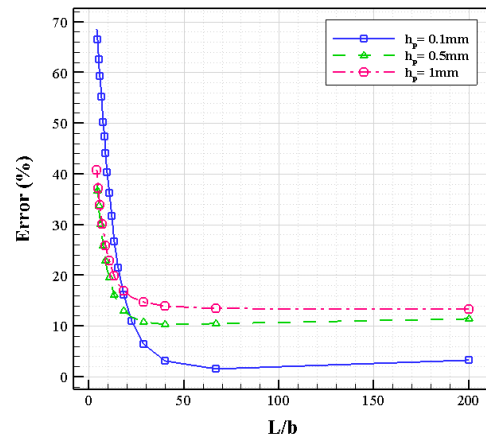
در بررسی خطای عدم احتساب ضریب پواسون بر دامنه حرکت و در فرکانس تشدید مشاهده شد که برای زوایای متعامد خطا در حدود ۷۸ درصد و برای الیاف زاویه دار حدود ۹۸ درصد حاصل می‌شود. این درحالی است که در فرکانس صفر اثر ضریب پواسون بر خیز استاتیکی و برای زوایای متعامد بسیار ناچیز بوده اما در الیاف ۴۵ درجه چشمگیر خواهد شد. در بخش بعد تغییرات ولتاژ با تغییرات فرکانس تحریک برای دو چندلایه‌ی متعامد و زاویه دار محاسبه شد که در فرکانس‌های نزدیک به فرکانس تشدید اختلاف ولتاژها بدون اثر ضریب پواسون برای هر دو لایه چینی فاحش بودند. در مطالعه‌ی اثر عدم تقارن مکانی پیزوالکتریک‌ها و عدم تقارن لایه چینی رویه بالا نسبت به پایین مشاهده شد، عدم تقارن مکانی پیزوالکتریک‌ها می‌تواند تاثیر ضریب پواسون را بیشتر از پوشش سراسری آن‌ها کند. به عنوان نکته‌ی مشترک در هر دو چیدمان بررسی شده، می‌توان به این مورد نیز اشاره نمود که بیشترین ولتاژی که سیستم برداشت‌کننده می‌تواند تولید کند در پوشش موضعی بیشتر از پوشش سراسری پیروها بوده است. سومین چیدمان از این بخش مربوط به عدم تقارن چیدمان الیاف رویه بالا نسبت به رویه پایین بوده که در این حالت با حرکت لایه پیزوالکتریک خطای عدم وجود اثر ضریب پواسون در موقعیتی خاص ( $\frac{x_p}{L} = 0.3$ ) به کمترین مقدار رسیده و بعد از آن دوباره



(ج)

شکل ۱۹: ولتاژ در فرکانس تشدید برای ضخامت پیزوالکتریک (الف)

(۰.۵ میلی‌متر ب) ۰.۵ میلی‌متر ج) ۱ میلی‌متر



شکل ۲۰: درصد خطای ولتاژ با ضریب پواسون و مدل سه بعدی در

فرکانس تشدید

### نتیجه گیری

در مطالعه حاضر اثر ضریب پواسون بر مشخصات الکتریکی و دامنه جابجایی برداشت‌کننده‌های انرژی پیزوالکتریکی بررسی شد. برداشت‌کننده به صورت تیر یکسرگردار ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی بوده که یک لایه از رویه‌ها را پیزوالکتریک تشکیل داده است. برای مدل‌سازی هسته همسانگرد از نظریه‌های برشی مرتبه بالا با احتساب اثرات کرنش راستای ضخامت و برای رویه‌های بالا و پایین از مدل اویلر برنولی با احتساب اثر ضریب پواسون استفاده شد. همچنین در مدل-سازگی اجزاء محدود المان سه‌گره‌ی با ۹ درجه آزادی در هر گره با توابع شکل هرمیتی و لاگرانژی مورد استفاده قرار گرفت.

- [2] Li, X., et al., *Sandwich piezoelectric energy harvester: Analytical modeling and experimental validation*. Energy conversion and management, 2018. **176**: p. 69-85.
- [3] Liang, H., G. Hao, and O.Z. Olszewski, *A review on vibration-based piezoelectric energy harvesting from the aspect of compliant mechanisms*. Sensors and Actuators A: Physical, 2021. **331**: p. 112743.
- [4] Salman, E., et al., *The Effect of Poisson Ratio and Beam Width on the Fundamental Frequency of a Cantilever Beam*. IEEE Sensors Letters, 2024.
- [5] Arani, A.G., et al., *Energy harvesting of sandwich beam with laminated composite core and piezoelectric face sheets under external fluid flow*. Smart Structures and Systems, 2021. **27**(4): p. 641-650.
- [6] Borowiec, M., J. Gawryluk, and M. Bochenski, *Influence of mechanical couplings on the dynamical behavior and energy harvesting of a composite structure*. Polymers, 2020. **13**(1): p. 66.
- [7] Ibrahim, D.S., et al., *Optimal strain-deflection analyses of a wedge edged beam for enhanced vibration energy scavenging in patch-like harvester*. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2023. **51**(5): p. 2435-2457.
- [8] Hosseini, R., et al., *Analytical and experimental investigation of partially covered piezoelectric cantilever energy harvester*. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2017. **18**: p. 415-424.
- [9] Karimi, M., Salehzadeh, A., and Shahverdi, H., *Experimental study of energy harvesting by piezoelectric from flutter phenomenon in wind tunnel*. The 18th

سیر صعودی به خود گرفته است. در قسمت آخر ولتاژ الکتریکی حاصل به ازای پهنای مختلف  $b$  با مدل سه بعدی نرم‌افزار کامسول برای سه ضخامت مختلف لایه‌های پیزوالکتریک مقایسه شدند. نتایج برای فرکانس تشدید هر مورد محاسبه شده که مطابق نتایج نرم افزار کامسول با افزایش پهنای از مقداری حدود  $\frac{L}{b} = 30$  روند کاهشی ولتاژ شروع شده و درصد خطا با مدل مطالعه‌ی حاضر بیشتر می‌شود. این در حالی است که اختلاف ولتاژ محاسبه شده در صورت صفر فرض شدن کرنش‌های جانبی چشمگیر و غیرقابل اغماض خواهد شد. بنابراین طبق نتایج این مطالعه می‌توان دریافت در تیرهای چندلایه کامپوزیتی با وجود لایه‌ی پیزوالکتریک، چه به صورت نهفته و چه به صورت وصله‌هایی روی کامپوزیت، برای محاسبه‌ی مشخصه‌های الکتریکی و پاسخ دینامیکی تیرهای برداشت کننده انرژی، کرنش‌ها و چرخش‌های جانبی  $\epsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_{xy}$  را نمی‌توان صفر فرض نمود و لازم است بر حسب اجزاء ماتریس‌های  $A, B$  و  $D$  و همچنین مشخصات الکتریکی و دی الکتریکی پیزوالکتریک محاسبه شده و در معادلات ساختاری چندلایه‌های همراه با پیزوالکتریک جایگذاری شوند.

#### پی‌نوشت‌ها

- ۱ Cellulose Electro-active paper
- ۲ Bimorph
- ۳ Delamination
- ۴ Curvature
- ۵ Strain energy
- ۶ Kinetic energy
- ۷ Capacitance
- ۸ Variation
- ۹ Steady state

#### منابع و مراجع

- [1] Biglari, H., Nazarzadeh Ansaroudi, M and Rezazadeh Movahhed, S, *Static response of smart beams equipped with extension/shearing piezoelectric patches considering Poisson's effect based on different theories*, Amirkabir Mechanical Engineering Journal, 2016. 45(4): p. 371-378. (in persian)

three-layer beam with a viscoelastic core. 2021.11(5): p.1-16. (in persian)

- [17] Biglari, H., M.N. Ansaroudi, and S.R. Movahhed, *Static Response of Smart Beams Equipped with Extension/Shearing Piezoelectric Patches Considering Poisson's Effect Based on Different Theories*. Mechanical Engineering, 2017. **48**(4).
- [18] Biglari, H and Sattari Sarebangholi, M, Free Vibration of Delaminated Composite Timoshenko Beam Considering Poisson's Effect. 2014.44(3): p. 1-10. (in persian)
- [19] Frostig, Y. and O.T. Thomsen, *High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core*. International Journal of Solids and Structures, 2004. **41**(5-6): p. 1697-1724.
- [20] Sadd, M.H., "Elasticity: theory, applications, and numerics," Academic Press, 2009
- [21] Piefort, V., *Finite element modelling of piezoelectric active structures*. 2001.
- conference of the Iranian Aerospace Association. 1398 (in persian)
- [10] Arvan, M., Farrokh, M, and Irani, S, Shape optimization of a unimorph piezoelectric energy harvesting beam. Aerospace knowledge and technology, 2020. 9(2): p. 255-266 (in persian)
- [11] Hosseini, R., Letafati, H, and Hosseini Moghaddam, S.S, Vibration Energy Harvesting Using Bimorph Piezoelectric Cantilever. Journal of Solid and Fluid Mechanics, 2017.7(1).(in persian)
- [12] Fallah, M and Arab Maleki, V, Piezoelectric Energy Harvesting Using a Porous Beam Under Fluid-Induced Vibrations. Amirkabir Mechanical Engineering Journal, 2021.53(8): p. 4633-4648. (in persian)
- [13] Rezaei, M., et al., *Integrating PZT layer with tuned mass damper for simultaneous vibration suppression and energy harvesting considering exciter dynamics: An analytical and experimental study*. Journal of Sound and Vibration, 2023. **546**: p. 117413.
- [14] Malekzadeh, K., S.M.R. Khalili, and A. Veysi Gorgabad, *Dynamic Response of Composite Sandwich Beams With Arbitrary Functionally Graded Cores Subjected to Low-Velocity Impact*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2015. **22**(8): p. 605-618.
- [15] Sabri Laghaie, K and Mahmoudkhani, S, Flutter analysis of the panel treated with integrated and segmented constrained layer damping. Journal of Solid and Fluid Mechanics, 2021.11(3): p. 245-261.(in persian)
- [16] Vahedi asl, T and Mahmoudkhani, S, Investigating the performance of the damped vibration absorber made of a