

تأثیر پارامترهای پایه الاستیک و فشار جانبی روی فرکانس‌های ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای دوار با رینگ حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر اساس تئوری مرتبه اول

محمد رضا عیسوند زیبائی^{۱*}، پژمان تقی پور بیرگانی^۲

۱- استادیار مهندسی مکانیک، گروه مکانیک، واحد اندیمشک، دانشگاه آزاد اسلامی، اندیمشک، ایران

۲- استادیار مهندسی مکانیک، گروه مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۹/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۲۲)

چکیده

در این تحقیق تأثیر پارامترهای پایه الاستیک و فشار جانبی روی فرکانس‌های ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای دوار با رینگ حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بررسی شده است. جنس پوسته از مواد مدرج تابعی با ترکیبی از فولاد ضد زنگ و نیکل تشکیل شده است که نیکل در سطح داخلی و فولاد ضد زنگ در سطح خارجی پوسته قرار دارد. این مواد مدرج تابعی در جهت ضخامت از یک سطح پوسته به سطح دیگری درجه بندی می‌شوند. فشارهای جانبی به صورت یکنواخت به سطح پوسته استوانه‌ای دوار با رینگ حلقوی اعمال می‌گردد. پایه الاستیک از نوع پسترناک می‌باشد که پوسته استوانه‌ای دوار با رینگ حلقوی را احاطه کرده است. معادلات حاکم استخراج شده در این تحقیق بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به دست می‌آیند. همچنین حل تحلیلی روابط حرکت این پوسته استوانه‌ای دوار با رینگ حلقوی بر اساس معادلات انرژی با بهره‌گیری از تکنیک رلی-ریتز استخراج شده‌اند. شرایط تکیه‌گاهی متقارن در لبه‌های دو انتهای مدل به صورت ساده در نظر گرفته شده است. در نهایت اثر پارامترهای پایه الاستیک، فشارهای یکنواخت جانبی، رینگ حلقوی و شرایط تکیه‌گاهی متقارن روی فرکانس‌های ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی مورد مطالعه قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: پوسته استوانه‌ای، پایه الاستیک، ماده مدرج تابعی، فشار جانبی، رینگ حلقوی

The effect of elastic base parameters and lateral pressure on the vibration frequencies of a rotating cylindrical shell with annular ring made of functionally graded materials based on first-order theory

Mohammad Reza Isvandzibaei^{1*}, Pezhman Taghipour Birgani²

Abstract

In this study, the effect of elastic base parameters and lateral pressure on the vibration frequencies of a rotating cylindrical shell with annular ring made of functionally graded materials based on first-order shear deformation theory has been investigated. The shell material is made of functionally graded materials with a combination of stainless steel and nickel, with nickel on the inner surface and stainless steel on the outer surface of the shell. These functionally graded materials are graded in thickness from one surface of the shell to another. Lateral pressures are applied uniformly to the surface of the rotating cylindrical shell with annular ring. The elastic base is of the Pasternak type that surrounded the rotating cylindrical shell with annular ring. The governing equations extracted in this study have been obtained based on the first-order shear deformation theory. Also, the analytical solution of the motion relations of this rotating cylindrical shell with annular ring has been extracted based on the energy equations using the Rayleigh-Ritz technique. Symmetrically boundary conditions at the edges of the two ends of the model in a simple support are considered. Finally, the effect of elastic base parameters, uniform lateral pressures, annular ring and symmetrical support conditions on the vibration frequencies of a rotating cylindrical shell made of functionally graded materials is studied.

Key words: Cylindrical shell, Elastic base, Functionally graded material, Lateral pressure, Annular ring

مقدمه

پوسته‌ها از پرکاربردترین اجزای سازه‌ای هستند که در کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این پوسته‌ها معمولاً منحنی هستند و بارها را توسط انحنای خود تحمل می‌کنند [۱]. پوسته‌ها، سازه‌های سبکی هستند که به عنوان مثال می‌توان به استفاده از آنها در بدنه، بال و موتور هواپیماها و فضاپیماها، لوله‌های انتقال نفت و گاز، مخازن سوخت، بدنه زیردریایی و بسیاری از کاربردهای مشابه اشاره نمود [۲].

مطالعه فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ها جهت تحلیل رفتار دینامیکی آنها از اهمیت کاربردی بالایی برخوردار است. به همین منظور از نظریه‌های مختلفی برای بررسی رفتار پوسته‌ها استفاده می‌شود. روابط میدان جابجایی، تنش-کرنش به صورت تغییر مکان‌هایی در جهات محوری، محیطی و شعاعی استخراج می‌شوند [۳].

برخی از محققان رفتار دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند و از روش اجزا محدود برای بررسی خصوصیات فرکانس‌های طبیعی پوسته استفاده کردند [۴]. ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی برای شرایط مرزی مختلف با فرض میدان تغییر مکان توسط شادمهری و همکاران [۵] مورد بررسی قرار گرفت.

مواد مدرج تابعی، مواد کامپوزیتی پیشرفته‌ای هستند که خواص آنها به طور پیوسته از ماده‌ای به ماده دیگر با یک شیب مشخصی تغییر می‌کنند. جنس این مواد مدرج تابعی می‌تواند ترکیبی از فلز و سرامیک باشد. مهم‌ترین مزیت مواد مدرج تابعی عدم ناپیوستگی در سرتاسر لایه‌های هم‌جوار و جلوگیری از عدم موفقیت در اثر کاربردهای در دمای بالا می‌باشد. به دلیل خواص مکانیکی و حرارتی این مواد از آنها به عنوان یک سپر حرارتی در محیط‌های با درجه حرارت بالا استفاده می‌شوند [۶].

ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی توسط لوی و همکاران منتشر شد [۷]. آنها فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بر اساس تکیه گاه ساده را مورد بررسی قرار دادند و اثر این فرکانس‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. اقبال و همکاران خصوصیات فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بر اساس انتشار موج را مورد مطالعه و تحقیق قرار دادند [۸]. بیک و نوین ارتعاشات یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بر اساس معادلات اصلاح شده

دامل را مورد مطالعه قرار دادند [۹]. استروزی و پلیکانو ارتعاشات غیرخطی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی را تحلیل کردند [۱۰].

بررسی ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای با بستر الاستیک نیز از اهمیت بالایی برخوردار است که برخی از دانشمندان به این امر پرداخته‌اند. ارتعاشات یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی در بستر الاستیک توسط شن بررسی شد [۱۱]. محمدی مهر و همکاران [۱۲] ارتعاشات و کماتش پوسته استوانه‌ای نازک بر بستر الاستیک تحت نیروهای محوری و حرارتی را بررسی نمودند. آنها از شرایط مرزی ساده استفاده کردند و اثر بستر الاستیک را بر روی فرکانس‌ها بررسی کردند. شنگ و وانگ اثرات دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار دادند [۱۳].

مطالعه پارامترهای پایه الاستیک و فشار جانبی روی فرکانس‌های ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای دوار با رینگ حلقوی از جنبه‌های مهم کاربرد موفق پوسته‌ها در صنعت می‌باشد. آنها به عنوان پوسته‌های استوانه‌ای طویل استفاده می‌شوند مانند هواپیماها، زیردریایی‌ها و غیره. این پوسته‌های استوانه‌ای بدون تقویت‌کننده‌ها به علت کاهش استحکام دستخوش تغییر شکل و در نهایت منجر به شکست می‌شوند.

هدف از این تحقیق مطالعه یک روش تحلیلی برای اثر پارامترهای پایه الاستیک، فشارهای یکنواخت جانبی، رینگ حلقوی و شرایط تکیه‌گاهی متقارن روی فرکانس‌های ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای دوار ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی می‌باشد. جنس پوسته از مواد مدرج تابعی با ترکیبی از فولاد ضد زنگ و نیکل تشکیل شده است. معادلات حاکم استخراج شده در این تحقیق بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به دست آمده است. شرایط تکیه‌گاهی متقارن در لبه‌های دو انتهای مدل به صورت ساده در نظر گرفته شده است. اثر پارامترهای پایه الاستیک، فشارهای یکنواخت جانبی، رینگ حلقوی و شرایط تکیه‌گاهی متقارن روی فرکانس‌های ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای دوار ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی مورد ارزیابی و بررسی قرار گرفته شده است.

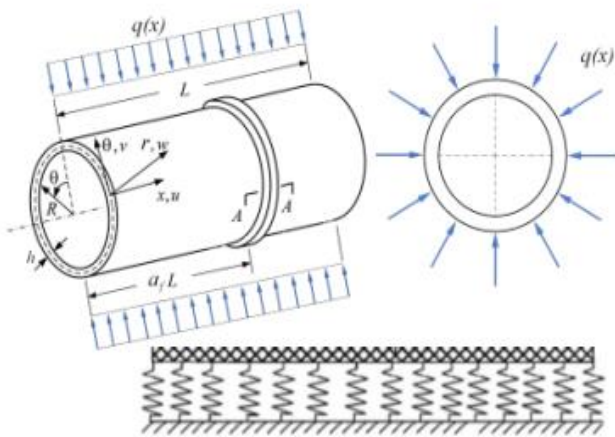
مواد مدرج تابعی

مواد مدرج تابعی از ترکیب از مواد مختلف تشکیل شده‌اند. توزیع کسر حجمی هر فاز از ماده با یک درجه خاص در جهت ضخامت متفاوت است؛ بنابراین خواص صفحات مدرج

$$\rho_{fgm}(T, z) = (\rho_2(T) - \rho_1(T)) \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^N + \rho_1(T) \quad (7)$$

تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

شکل ۱ مدل مورد بحث در این تحقیق را نشان می‌دهد که در آن یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی و فشارهای یکنواخت جانبی بر بستر الاستیک با ضخامت h ، شعاع R ، طول L ، موقعیت رینگ حلقوی a و فشارهای یکنواخت جانبی q قرار دارد. تغییر مکان‌های پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی u, v, w در سطح میانی پوسته در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱- مدل یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی و فشارهای یکنواخت جانبی بر بستر الاستیک

میدان جابجایی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی برای یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) + z\psi_x(x, \theta) \\ v(x, \theta, z) &= v_0(x, \theta) + z\psi_\theta(x, \theta) \\ w(x, \theta, z) &= w_0(x, \theta) \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن $u(x, \theta, z)$ و $\psi(x, \theta, z)$ اجزای جابجایی در جهات x و θ و $w_0(x, \theta)$ ، $u_0(x, \theta)$ و $v_0(x, \theta)$ اجزای جابجایی در سطح میانی پوسته استوانه‌ای

تابعی در جهت ضخامت تغییر می‌کنند. اثر خواص صفحات مدرج تابعی Q_{fgm} بستگی به خواص و کسر حجمی ماده تشکیل دهنده دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{fgm}(T, z) = \sum_{j=1}^k \bar{Q}_j(T) V_{fj}(z) \quad (1)$$

که $\bar{Q}_j(T)$ خواص ماده و $V_{fj}(z)$ توزیع کسر حجمی برای ماده تشکیل دهنده می‌باشد.

برای یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی ساخته شده از دو ماده مختلف کسرهای حجمی $V_{f1}(z)$ و $V_{f2}(z)$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$V_{f1}(z) = 1 - \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^N, \quad V_{f2}(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^N \quad (2)$$

$$V_{f1}(z) + V_{f2}(z) = 1 \quad (3)$$

که توان کسر حجمی مواد مدرج تابعی پیوسته N یک عدد بین $0 \leq N \leq \infty$ و Z فاصله شعاعی اندازه‌گیری شده از سطح میانی پوسته می‌باشد. مواد مدرج تابعی خواص آنها وابسته به دما می‌باشد. خواص مواد $\bar{Q}_j(T)$ می‌تواند به صورت تابعی از دما به شرح زیر تعریف شود:

$$\bar{Q}_j(T) = Q_{0,j} (Q_{1,j} T^1 + Q_{2,j} T^2 + Q_{3,j} T^3) \quad (4)$$

که $Q_{0,j}, Q_{1,j}, Q_{2,j}, Q_{3,j}$ ضرایب دما برای ماده تشکیل دهنده می‌باشد.

در این تحقیق، ماده پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی از جنس فولاد ضد زنگ و نیکل تشکیل شده است که در آن E مدول یانگ، ν نسبت پواسون و ρ چگالی می‌باشند و به صورت زیر بیان می‌شوند [7]

$$E_{fgm}(T, z) = (E_2(T) - E_1(T)) \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^N + E_1(T) \quad (5)$$

$$\nu_{fgm}(T, z) = (\nu_2(T) - \nu_1(T)) \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^N + \nu_1(T) \quad (6)$$

$$\bar{\varepsilon}_{13} = \psi_{,x}(x, \theta) + \frac{\partial w_0(x, \theta)}{\partial x} \quad (19)$$

$$\bar{\varepsilon}_{23} = \psi_{,\theta}(x, \theta) + \frac{\partial w_0(x, \theta)}{R \partial \theta} \quad (20)$$

روابط تنش- کرنش برای یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{Q}] \{\bar{\varepsilon}\} \quad (21)$$

که $\{\bar{\varepsilon}\}$ بردارهای تنش، کرنش و $[\bar{Q}]$ ماتریس سختی می‌باشند و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\{\bar{\sigma}\}^T = \{\bar{\sigma}_{11} \quad \bar{\sigma}_{22} \quad \bar{\sigma}_{12} \quad \bar{\sigma}_{13} \quad \bar{\sigma}_{23}\} \quad (22)$$

$$\{\bar{\varepsilon}\}^T = \{\bar{\varepsilon}_{11} \quad \bar{\varepsilon}_{22} \quad \bar{\varepsilon}_{12} \quad \bar{\varepsilon}_{13} \quad \bar{\varepsilon}_{23}\} \quad (23)$$

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \quad (24)$$

سپس معادله (۲۱) به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \\ \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{23} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

برای یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی اجزای ماتریس سختی $[\bar{Q}]$ به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\bar{Q}_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, \quad \bar{Q}_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{A(1-\nu^2(z))} \quad (26)$$

$$\bar{Q}_{21} = \frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu^2(z)}, \quad \bar{Q}_{22} = \frac{E(z)}{A(1-\nu^2(z))} \quad (27)$$

$$\bar{Q}_{66} = \frac{E(z)}{2A(1-\nu(z))}, \quad \bar{Q}_{44} = K \frac{E(z)}{2(1-\nu(z))} \quad (28)$$

مدرج تابعی و $\psi_x(x, \theta)$ ، $\psi_\theta(x, \theta)$ نرمال‌های چرخشی سطح میانی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی می‌باشند.

روابط کرنش-جابجایی برای یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u(x, \theta, z)}{\partial x} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} v(x, \theta, z) + \frac{w(x, \theta, z)}{R_1} \quad (9)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v(x, \theta, z)}{\partial \theta} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} u(x, \theta, z) + \frac{w(x, \theta, z)}{R_2} \quad (10)$$

$$\bar{\varepsilon}_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v(x, \theta, z)}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u(x, \theta, z)}{A_1} \right) \quad (11)$$

$$\bar{\varepsilon}_{13} = A_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u(x, \theta, z)}{A_1} \right) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w(x, \theta, z)}{\partial x} \quad (12)$$

$$\bar{\varepsilon}_{23} = A_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v(x, \theta, z)}{A_2} \right) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w(x, \theta, z)}{\partial \theta} \quad (13)$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = 0 \quad (14)$$

تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی توسط اثرات تغییر شکل برشی در فرمول‌بندی یک مدل پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی در نظر گرفته می‌شود. در این روابط A_1 و A_2 پارامترهای لامه می‌باشند و به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۴].

$$A_1 = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad A_2 = \frac{\partial r}{\partial \theta} \quad (15)$$

با جایگذاری رابطه (۸) در روابط کرنش-جابجایی و به کار بردن سیستم مختصات استوانه‌ای روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \quad (16)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial v_0(x, \theta)}{R \partial \theta} + z \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R \partial \theta} + \frac{w_0(x, \theta)}{R} \quad (17)$$

$$\bar{\varepsilon}_{12} = \frac{\partial v_0(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, \theta)}{R \partial \theta} + z \left(\frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{R \partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial x} \right) \quad (18)$$

انرژی کرنشی

انرژی کرنشی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به شرح زیر است:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \bar{\epsilon} \right\}^T [I] \left\{ \bar{\epsilon} \right\} R d\theta dx \quad (37)$$

انرژی جنبشی

انرژی جنبشی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به شرح زیر است:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho_T \left\{ \left(\frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 \right\} R d\theta dx \quad (38)$$

که در این معادله ρ_T چگالی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_T = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (39)$$

انرژی فشارهای جانبی

انرژی فشارهای جانبی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{P}{2} \left\{ \left[\frac{\partial^2 w_0(x, \theta)}{\partial \theta^2} + w_0(x, \theta) \right] w_0(x, \theta) \right\} d\theta dx \quad (40)$$

انرژی پایه الاستیک

انرژی پایه الاستیک یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ k_w w^2 + k_g \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} R d\theta dx \quad (41)$$

$$\bar{Q}_{55} = K \frac{E(z)}{2(1-\nu(z))}, \quad A = 1 + \frac{z}{R} \quad (29)$$

منتج‌ها به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\{N_x, N_\theta, N_{x\theta}, H_x, H_\theta\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{23} \right\} dz \quad (30)$$

$$\{M_x, M_\theta, M_{x\theta}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{12} \right\} z dz \quad (31)$$

پس از جایگزینی معادلات (۱۶) تا (۲۰) در معادله (۲۵) و سپس جایگزین کردن در معادلات (۳۰) و (۳۱) فرم ترکیبی منتج‌ها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\{N\} = [I] \left\{ \bar{\epsilon} \right\} \quad (32)$$

که در این معادله $\{N\}$ ، $[I]$ و $\{\bar{\epsilon}\}$ عبارت‌اند از:

$$\{N\}^T = \{N_x, N_\theta, N_{x\theta}, M_x, M_\theta, M_{x\theta}, H_x, H_\theta\} \quad (33)$$

$$\left\{ \bar{\epsilon} \right\}^T = \left\{ \bar{\epsilon}_{11}, \bar{\epsilon}_{22}, \bar{\epsilon}_{12}, \bar{\epsilon}_{11}, \bar{\epsilon}_{22}, \bar{\epsilon}_{12}, \bar{\epsilon}_{13}, \bar{\epsilon}_{23} \right\} \quad (34)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{16} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{16} & 0 & 0 \\ X_{12} & X_{22} & X_{26} & Y_{12} & Y_{22} & Y_{26} & 0 & 0 \\ X_{16} & X_{26} & X_{66} & Y_{16} & Y_{26} & Y_{66} & 0 & 0 \\ Y_{11} & Y_{12} & Y_{16} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{16} & 0 & 0 \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{26} & Z_{12} & Z_{22} & Z_{26} & 0 & 0 \\ Y_{16} & Y_{26} & Y_{66} & Z_{16} & Z_{26} & Z_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kV_{44} & kV_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kV_{45} & kV_{55} \end{bmatrix} \quad (35)$$

که در معادله (۳۵)، X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, Z, Z^2) dz, \quad V_{ij} = K \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \quad (36)$$

معادلات انرژی

حال به بررسی انرژی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی تحت تأثیر پارامترهای پایه الاستیک و فشارهای جانبی پرداخته می‌شود.

روش ریلی-ریتز

در این تحقیق، از روش ریلی-ریتز برای پاسخ فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت زیر می‌باشد:

در نهایت تابع انرژی برای پاسخ فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت زیر می‌باشد:

$$= (U + U_{ei}) - T + V \quad (42)$$

$$F = (U_{max} + U_{el max}) - T_{max} + V_{max} \quad (46)$$

با جایگزینی معادله (۴۳) در معادلات (۳۷)، (۳۸)، (۴۰) و (۴۱) و به کاربردن روش ریلی-ریتز با به حداقل رساندن تابع انرژی F خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + V_{max})}{\partial \bar{E}_1} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + V_{max})}{\partial \bar{E}_2} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + V_{max})}{\partial \bar{E}_3} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + V_{max})}{\partial \bar{E}_4} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + V_{max})}{\partial \bar{E}_5} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

در رابطه (۴۷) پنج معادله حرکت وجود دارد، بنابراین معادله مقدار مشخصه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \\ \bar{E}_4 \\ \bar{E}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

برای داشتن جواب غیر صفر باید دترمینان ماتریس ضرایب به صورت زیر صفر شود:

$$|C_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (49)$$

در نهایت با حل معادله (۴۹) خواهیم داشت:

$$\delta_0 \omega^{10} + \delta_1 \omega^8 + \delta_2 \omega^6 + \delta_3 \omega^4 + \delta_4 \omega^2 + \delta_5 = 0 \quad (50)$$

معادله مشخصه درجه ۱۰ بالا دارای پنج جواب مثبت و پنج جواب منفی می‌باشد. جواب‌های مثبت فرکانس‌های طبیعی

میدان جابجایی

میدان جابجایی برای فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u_0(x, \theta) &= \bar{E}_1 \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x} \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ v_0(x, \theta) &= \bar{E}_2 \Omega(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \\ w_0(x, \theta) &= \bar{E}_3 \Omega(x) \prod_{i=1}^H (x - b_i)^{\mu_i} \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \psi_x(x, \theta) &= \bar{E}_4 \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x} \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \psi_\theta(x, \theta) &= \bar{E}_5 \Omega(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (43)$$

$\Omega(x)$ تابع محوری می‌باشد که در شرایط مرزی صدق می‌کند. b_i موقعیت تقویت‌کننده، H تعداد رینگ حلقوی، μ_i پارامتری است که با توجه به وجود یک رینگ حلقوی مقدارش یک می‌باشد. تابع محوری $\Omega(x)$ به عنوان یک تابع تیر و به صورت زیر انتخاب می‌شود [۱۵]

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \Psi_1 \cosh\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) + \Psi_2 \cos\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) - \mu_m (\Psi_3 \sinh\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) \\ &+ \Psi_4 \sin\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right)) \end{aligned} \quad (44)$$

که در معادله بالا مقادیر برای شرایط مرزی ساده مطابق جدول شماره ۱ داده شده است.

جدول ۱- مقادیر برای شرایط مرزی ساده

μ_m	Φ_m	$\Psi_i (i=1..4)$	شرایط مرزی
1	$m\pi$	$\Psi_1=0, \Psi_2=0, \Psi_3=0, \Psi_4=-1$	ساده

شرایط مرزی متقارن ساده که لبه‌های $x = 0$ و $x = L$ را ارضا می‌کند به شرح زیر می‌باشند:

$$\Omega(0) = \frac{\partial^2 \Omega(L)}{\partial x^2} = 0 \quad (45)$$

پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی هستند که کوچک‌ترین آنها جواب مورد قبول این تحقیق می‌باشد.

پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با رینگ حلقوی با فشار جانبی مطابق با تغییرات کسر حجمی با ترکیبی از فولاد ضد زنگ و نیکل تشکیل شده است که خواص این مواد در جدول ۲ نشان داده شده است.

همگرایی و مقایسه پژوهش

به منظور درک بهتر فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی و بررسی صحت روابط ارائه شده، نتایج حاصل با نتایج منتشر شده در ادبیات موضوع مقایسه شده است. در جدول ۳ مقایسه فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای تابعی دوار بدون رینگ حلقوی و فشار جانبی در نظر گرفته و نتایج به دست آمده با مرجع ۱۶ مقایسه گردیده است. تطابق بین نتایج ارائه شده نشان از دقت و صحت روش ارائه شده دارد. با این حال تفاوت بسیار جزئی نتایج به علت استفاده از نظریه مرتبه اول در تحقیق در مقایسه با تئوری کلاسیک استفاده شده در مرجع ۱۶ می‌باشد.

جدول ۲ - خواص مواد برای یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی

مواد	E [pa]	ρ [kg/m ³]	ν
فولاد ضد زنگ	$2.07788 \cdot 10^{11}$	8166	0.3177
نیکل	$2.05098 \cdot 10^{11}$	8900	0.3100

جدول ۳- مقایسه فرکانس‌های طبیعی برای یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بدون رینگ حلقوی و فشار جانبی با شرایط مرزی ساده
(L/R = 20, R = 1, N = 1)

h/R	m	n	فرکانس طبیعی (Hz)	
			Loy et al. (۱۶)	تحقیق حاضر
۰,۰۰۲	۱	۱	۴,۱۵۶	۴,۴۱۱
	۱	۲	۴,۴۸۰	۴,۳۲۰
	۱	۳	۷,۰۳۸	۷,۳۲۴
	۱	۴	۱۱,۲۴	۱۱,۰۵
	۱	۵	۱۳,۲۱	۱۳,۸۸
	۱	۶	۱۶,۴۵	۱۶,۱۴
	۱	۷	۲۲,۶۳	۲۲,۹۱
	۱	۸	۲۹,۷۷	۳۰,۰۹
	۱	۹	۳۷,۸۶	۳۷,۶۱
	۱	۱۰	۴۶,۹۰	۴۶,۷۹

بحث بر روی نتایج

پوسته استوانه مدرج تابعی دوار بدون رینگ حلقوی،

فشار جانبی و پایه الاستیک

در این بخش فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار بدون در نظر گرفتن اثرات ناشی از فشار جانبی، رینگ حلقوی و پایه الاستیک با شرایط مرزی ساده در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود فرکانس‌های طبیعی با عدد موج محیطی تغییر می‌کنند و با افزایش عدد موج محیطی فرکانس‌ها افزایش می‌یابند.

پوسته استوانه مدرج تابعی دوار با فشار جانبی و بدون

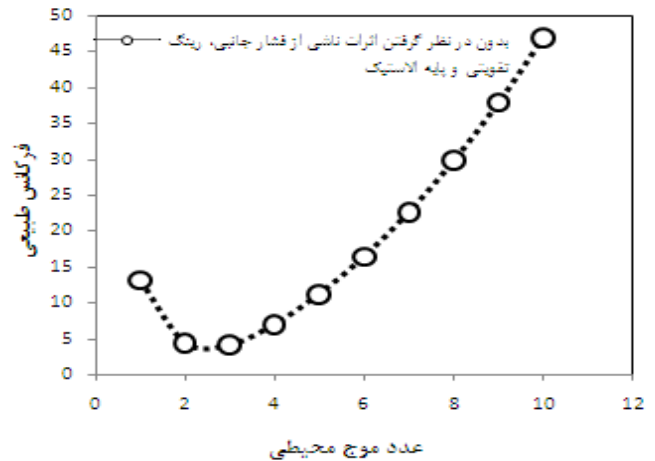
رینگ حلقوی و پایه الاستیک

در این بخش فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با فشارهای جانبی و بدون نظر گرفتن اثرات ناشی از رینگ حلقوی و پایه الاستیک با شرایط مرزی ساده در جدول ۴ نشان داده شده است.

حلقوی و بدون پایه الاستیک با شرایط مرزی ساده در شکل ۳ نشان داده شده است. در این شکل اثرات فشارهای جانبی ۳۰۰ کیلو پاسکال در نظر گرفته شده است. محل قرارگیری رینگ حلقوی روی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار در فاصله ۰,۳ از ابتدای طول پوسته می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که وجود رینگ حلقوی و فشارهای جانبی روی فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ی استوانه‌ای مدرج تابعی دوار اثر می‌گذارد و سبب افزایش فرکانس‌ها می‌گردد. نکته قابل توجه در این شکل افزایش یک‌باره فرکانس‌های طبیعی در اعداد موج محیطی یک و دو می‌باشد و برای اعداد موج محیطی بزرگ‌تر از دو این افزایش فرکانس‌های طبیعی به صورت تدریجی می‌باشد. افزایش یک‌باره فرکانس‌های طبیعی در اعداد موج محیطی یک و دو و افزایش تدریجی برای اعداد موج محیطی بزرگ‌تر از دو به دلیل تغییرات در الگوهای ارتعاشی و توزیع سختی در پوسته استوانه‌ای است. در اعداد موج محیطی یک و دو، الگوهای ارتعاشی ساده‌تر هستند و تغییرات در سختی ناشی از رینگ حلقوی و فشارهای جانبی به طور مستقیم و قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی تأثیر می‌گذارند. این تغییرات باعث افزایش یک‌باره فرکانس‌های طبیعی می‌شوند. اما با افزایش عدد موج محیطی، الگوهای ارتعاشی پیچیده‌تر می‌شوند و تأثیر رینگ حلقوی و فشارهای جانبی به صورت تدریجی و کمتر محسوس بر فرکانس‌های طبیعی اعمال می‌شود. در این حالت، توزیع سختی و تغییرات در الگوهای ارتعاشی به گونه‌ای است که افزایش فرکانس‌های طبیعی به صورت تدریجی رخ می‌دهد.

پوسته استوانه مدرج تابعی دوار با فشار جانبی، رینگ حلقوی و پایه الاستیک

در این بخش فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با نظر گرفتن اثرات فشارهای جانبی، رینگ حلقوی و پایه الاستیک با شرایط مرزی ساده در شکل ۴ نشان داده شده است. در این شکل اثرات فشارهای جانبی ۳۰۰ کیلو پاسکال در نظر گرفته شده است.



شکل ۲- فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار بدون در نظر گرفتن اثرات ناشی از فشار جانبی، رینگ حلقوی و پایه الاستیک با شرایط مرزی ساده ($h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1, N = 1$)

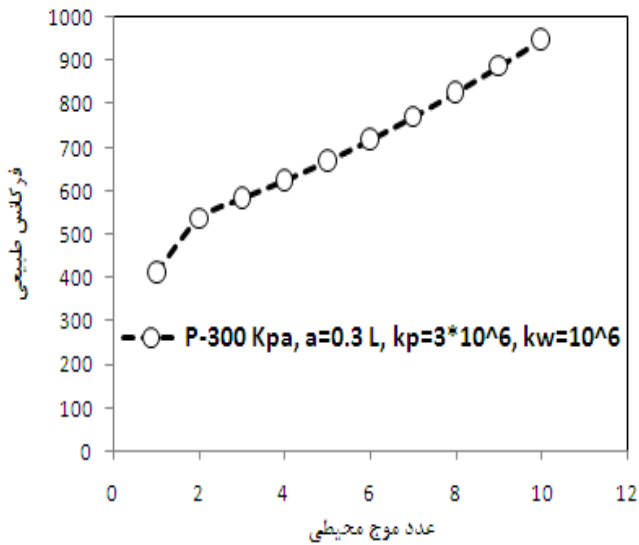
در این جدول اثرات فشارهای جانبی صفر و ۳۰۰ کیلو پاسکال روی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود افزایش فشارهای جانبی باعث افزایش فرکانس طبیعی در پوسته‌ی استوانه‌ای مدرج تابعی دوار می‌گردد.

جدول ۴- فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با فشارهای جانبی و بدون نظر گرفتن اثرات ناشی از رینگ حلقوی و پایه الاستیک با شرایط مرزی ساده

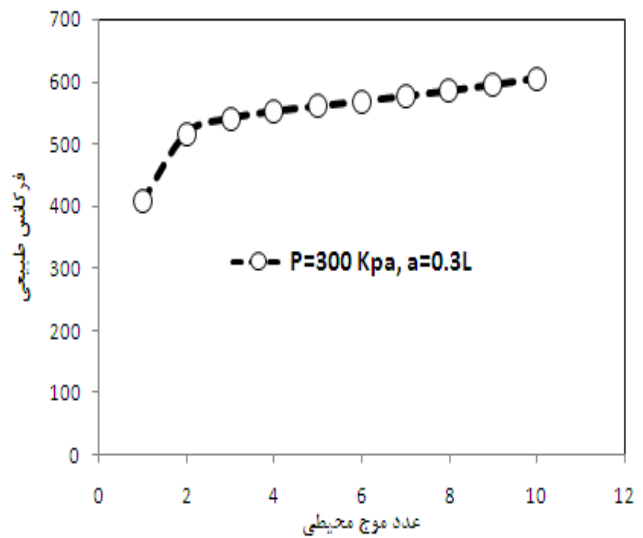
فرکانس‌های طبیعی		
عدد موج محیطی	فشار صفر	فشار ۳۰۰ کیلو پاسکال
1	30.09	30.09
2	10.045	38.939
3	5.97	65.6
4	7.485	91.83
5	11.393	117.587
6	16.541	143.137
7	22.708	168.642
8	29.846	194.205
9	37.945	219.894
10	46.999	245.764

پوسته استوانه مدرج تابعی دوار با فشار جانبی و رینگ حلقوی و بدون پایه الاستیک

در این بخش فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با نظر گرفتن اثرات فشارهای جانبی و رینگ



شکل ۴- فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با نظر گرفتن اثرات فشارهای جانبی، رینگ حلقوی و پایه الاستیک با شرایط مرزی ساده
($P = 300\text{kpa}$, $h/R = 0.002$, $L/R = 20$, $a = 0.3L$, $R = 1$, $N = 1$, $k_w = 10^6$, $k_p = 3 \cdot 10^6$)



شکل ۳- فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با نظر گرفتن اثرات فشارهای جانبی و رینگ حلقوی و بدون پایه الاستیک با شرایط مرزی ساده
($P = 300\text{kpa}$, $h/R = 0.002$, $L/R = 20$, $a = 0.3L$, $R = 1$, $N = 1$)

جدول ۵- فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار تحت فشارهای جانبی و پایه الاستیک با تغییر موقعیت محل قرارگیری رینگ حلقوی در طول پوسته با شرایط مرزی ساده
($h/R = 0.002$, $L/R = 20$, $R = 1$, $N = 1$, $k_p = 3 \cdot 10^6$, $k_w = 10^6$)
فرکانس‌های طبیعی

موقعیت رینگ حلقوی a/L	فشار ۳۰۰ کیلو پاسکال
0	328.32
0.1	370.62
0.2	410.11
0.3	480.56
0.4	543.99
0.5	610.05
0.6	550.91
0.7	488.62
0.8	408.79
0.9	380.06
1	345.24

ضرایب سختی پایه الاستیک پاسترنیک (K_p) و ضریب سختی پایه الاستیک وینکلر (K_w) مقدار $k_p = 3 \cdot 10^6$, $k_w = 10^6$ فشارهای جانبی ۳۰۰ کیلو پاسکال در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت موقعیت به طول از ابتدا تا مرکز پوسته فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند و سپس با افزایش نسبت موقعیت به طول از مرکز تا انتهای پوسته فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند. ماکزیمم مقدار

محل قرارگیری رینگ حلقوی روی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار در فاصله ۰٫۳ از ابتدای طول پوسته می‌باشد. برای ضرایب سختی پایه الاستیک یعنی ضریب سختی پایه الاستیک پاسترنیک (K_p) و ضریب سختی پایه الاستیک وینکلر (K_w) مقدار $k_p = 3 \cdot 10^6$, $k_w = 10^6$ برای یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با نظر گرفتن اثرات فشارهای جانبی و رینگ تقویتی در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که وجود پایه الاستیک روی فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ی استوانه‌ای مدرج تابعی دوار اثر می‌گذارد و سبب افزایش فرکانس‌ها می‌گردد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که شیب نمودار با وجود پایه الاستیک نسبت به اعداد موج محیطی افزایش چشمگیری دارد.

پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با تغییر دادن موقعیت رینگ حلقوی در طول پوسته

در این بخش اثرات تغییر موقعیت محل قرارگیری رینگ حلقوی روی فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوار با فشارهای جانبی و پایه الاستیک با شرایط مرزی ساده در جدول ۵ نشان داده شده است. نسبت موقعیت رینگ حلقوی به طول پوسته بین صفر تا یک در نظر گرفته شده است.

این افزایش سختی باعث می‌شود که پوسته در برابر تغییر شکل‌های دینامیکی مقاومت بیشتری داشته باشد و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی افزایش یابند. همچنین فشارهای جانبی نیز می‌توانند به افزایش سختی کلی سیستم کمک کنند. این فشارها می‌توانند ناشی از بارهای خارجی یا شرایط محیطی باشند و با افزایش سختی، فرکانس‌های طبیعی سیستم را بالا ببرند.

مراجع

- [1] M. S. Qatu, "Recent research advances in the dynamic behavior of shells", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 55, No. 5, September 2002, pp. 415–434.
- [2] E. E. Sechler, *Thin-shell structures theory experiment and design*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, California, 1974.
- [3] A.W. Leissa, *Vibration of Shells*, The Acoustical Society of America, 1973.
- [4] A. H. Adawiya, An investigation of dynamic behavior of the cylindrical shells under thermal effect, *Case Studies in Thermal Engineering*, Vol. 12, No. 8, September 2018. pp. 537-545.
- [5] F. Shadmehri, S. Hoa, M. Hojjati, The Effect of Displacement Field on Bending, Buckling, and Vibration of Cross-Ply Circular Cylindrical Shells, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 21(21) (2014) 14-22.
- [6] V. Birman, L. W. Byrd, "Modeling and analysis of functionally graded materials and structures", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 60, No. 5, September 2007, pp. 195–216.
- [7] C. T. Loy, K. Y. Lam, J. N. Reddy, "Vibration of functionally graded cylindrical shells", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, No. 3, March 1999, pp. 309–324.
- [8] Z. Iqbal, M. N. Naeem, N. Sultana, "Vibration characteristics of FGM circular cylindrical shells using wave propagation approach", *Acta Mechanica*, Vol. 208, No. 5, December 2009, pp. 237–248.

فرکانس طبیعی زمانی حاصل می‌شود که رینگ حلقوی در مرکز $a/L=0.5$ پوسته قرار دارد. نتایج نشان می‌دهد که این تغییرات فرکانس‌های طبیعی نسبت به مرکز پوسته در راستای طولی متقارن است که علت آن وجود تکیه‌گاه‌های متقارن در دلبه پوسته می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق اثر پارامترهای پایه الاستیک، فشارهای یکنواخت جانبی، رینگ حلقوی و شرایط تکیه‌گاهی متقارن روی فرکانس‌های ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای دوار ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی بررسی شده است. جنس پوسته از مواد مدرج تابعی با ترکیبی از فولاد ضد زنگ و نیکل تشکیل شده است. معادلات حاکم استخراج شده در این تحقیق بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به دست آمده است. شرایط تکیه‌گاهی متقارن در لبه‌های دو انتهای مدل به صورت ساده در نظر گرفته شده است. اثر پارامترهای پایه الاستیک، فشارهای یکنواخت جانبی، رینگ حلقوی و شرایط تکیه‌گاهی متقارن روی فرکانس‌های ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای دوار ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که فرکانس‌های طبیعی با عدد موج محیطی تغییر می‌کنند و با افزایش عدد موج محیطی فرکانس‌ها افزایش می‌یابند. همچنین نتایج نشان داد که افزایش فشارهای جانبی باعث افزایش فرکانس طبیعی در پوسته‌ی استوانه‌ای مدرج تابعی دوار می‌گردد و وجود رینگ حلقوی روی فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ی استوانه‌ای مدرج تابعی دوار اثر می‌گذارد و سبب افزایش فرکانس‌ها می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد که وجود پایه الاستیک روی فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ی استوانه‌ای مدرج تابعی دوار اثر می‌گذارد و سبب افزایش فرکانس‌ها می‌گردد و شیب نمودار با وجود پایه الاستیک نسبت به اعداد موج محیطی افزایش چشمگیری دارد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت موقعیت به طول از ابتدا تا مرکز پوسته فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند و سپس با افزایش نسبت موقعیت به طول از مرکز تا انتهای پوسته فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند. ماکزیمم مقدار فرکانس طبیعی زمانی حاصل می‌شود که رینگ حلقوی در مرکز $a/L=0.5$ پوسته قرار دارد. در نهایت نتایج بررسی شده نشان داد رینگ حلقوی به عنوان یک تقویت‌کننده عمل می‌کند و سختی محوری و جانبی پوسته را افزایش می‌دهد.

- [9] D. H. Bich, N. X. Nguyen, "Nonlinear vibration of functionally graded circular cylindrical shells based on improved Donnell equations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 25, December 2012, pp. 5488–5501.
- [10] M. Strozzi, F. Pellicano, "Nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells", *Thin-walled structures*, Vol. 67, No. 1, June 2013, pp. 63–77.
- [11] H. Shen, "Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 3, February 2012 pp. 1144–1154.
- [12] M. Mohammadimehr, M. Moradi, A. Loghman, Influence of the elastic foundation on the free vibration and buckling of thin-walled piezoelectric-based FGM cylindrical shells under combined loadings, *Journal of Solid Mechanics*, 6(4) (2014) 347-365.
- [13] G.G. Sheng, X. Wang, Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 27(2) (2008) 117–134.
- [14] W. Soedel, *Vibration of shells and plates*, 3rd edn. Marcel Dekker Inc, New York, 2004.
- [15] O. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko and O. V. Boichuk, Free Vibrations of a Corrugated Closed Cylindrical Shell, *International Applied Mechanics*, Vol. 58, No. 33, July 2022, pp. 43-52.
- [16] C. T. Loy, K. Y. Lam, J. N. Reddy, "Vibration of functionally graded cylindrical shells", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, No. 3, March 1999, pp. 309–324.