

تحلیل فاصله خطای ناوبری تناسبی با استفاده از

معادلات بی‌بعدشده با اثر رادوم، اشباع شتاب و بازخورد سرعت زاویه‌ای بدنه

جلالی نائینی، سید حمید*

استادیار گروه مهندسی هوافضا، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۱۰/۰۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۰۵/۰۷)

چکیده

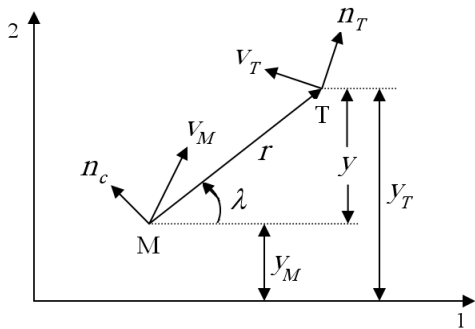
در این مقاله، معادلات خطی‌شده هدایت ناوبری تناسبی برای حرکت در صفحه با اعمال اثر اشباع شتاب و در حضور اثر رادوم بی‌بعد شده و با استفاده از آن تحلیل فاصله خطا انجام شده است. دینامیک سیستم کنترل با یک تابع تبدیل مرتبه اول مدل شده است. سپس به منظور کاهش اثر رادوم در فاصله خطا، فیدبک سرعت زاویه‌ای بدنه به دستور شتاب افزوده شده و تحلیل خطا صورت پذیرفته است. با استفاده از روش ارائه شده، نمودارهای بی‌بعد مفیدی برای بررسی رفتار پارامترهای مختلف جهت طراحی و اصلاح هدایت ناوبری تناسبی بدست می‌آید. در ادامه، معادلات بی‌بعد برای هدایت تناسبی با جمله‌های غیرخطی شامل توانهای مختلف نرخ چرخش خط‌دید نیز استخراج شده است.
واژه‌های کلیدی: فاصله خطا، اثر رادوم، هدایت ناوبری تناسبی، معادلات بی‌بعد

مقدمه

هدایت ناوبری تناسبی (یا به اختصار هدایت تناسبی) و استراتژیهای بهبودیافته آن کاربرد زیادی در هدایت پایانی موشکهای رهگیر دارد [۱-۳]. در این روش، دستور شتاب متناسب با نرخ چرخش خط‌دید اعمال می‌شود. افزایش مقدار ضریب ناوبری مؤثر سبب کاهش فاصله خطا می‌شود. از طرف دیگر، با تکمیل مدلسازی مسئله مشخص می‌شود که افزایش ضریب ناوبری مؤثر سبب کاهش حاشیه پایداری و ناپایداری موشک می‌شود. اثر رادوم یکی از مهمترین عوامل تأثیرگذار بر طراحی سیستم هدایت موشکهای آشیانه‌یاب راداری است. عبور پرتوهای امواج الکترومغناطیس از دماغه غیرفلزی موشک سبب شکست پرتوها شده و سبب ظاهر شدن هدفی مجازی می‌شود. اگرچه مقدار شکست پرتوها ناچیز است، اما سبب کاهش حاشیه پایداری و یا ناپایداری حلقه هدایت تناسبی می‌شود [۳]. این موضوع در منابع و تحلیل آن در حوزه لاپلاس و فرکانس برای دینامیک ساده تا نسبتاً پیچیده (بطور نمونه: مرتبه یک، مرتبه پنج و همچنین شامل دینامیک تک کاناله

سیستم کنترل) آمده است [۳-۵]. اثر رادوم در ارتفاع بالا حادث می‌شود که این موضوع در مرجع [۶] بررسی شده است. تحلیل فاصله خطا یکی از مهمترین تحلیل‌های سیستم هدایت است؛ چرا که تأثیر هر عاملی را بر خطای نهایی موشک مشخص می‌کند. لذا تحقیقات زیادی در این خصوص انجام شده است. یکی از روش‌های توانمند در تحلیل فاصله خطا، روش الحاقی است [۳]. در این روش با یک بار اجرای کد مربوطه می‌توان فاصله خطا را بر حسب زمان بی‌بعد بدست آورد. یکی از محدودیتهای این روش، خطی بودن (و یا خطی-سازی) المانهای سیستم هدایت و کنترل و همچنین اشباع شتاب موشک است. تحلیل‌های انجام‌شده در این زمینه، فاقد بررسی اثر اشباع شتاب و جمله‌های غیرخطی است. لذا برای بررسی این موضوع باید از روشهای دیگر بهره گرفت. یکی از این روشها، روش مونت کارلو است که روشی توانمند است. اما لزوماً نمودارهای بی‌بعدشده جهت طراحی از آن منتج نمی‌شود. برای این منظور، معادلات استفاده‌شده باید بی‌بعد باشند. تولید معادلات بی‌بعدشده این مزیت مهم را دارد که با یکبار تولید

به عبارت دیگر، شتابها در راستای y فرض می‌شود. در شکل مذکور و همچنین برای پایین‌نویس علائم، M و T به ترتیب نمایانگر موشک و هدف است. همچنین n شتاب در راستای محور y است. با فرض زوایای کوچک برای زاویه خطدید (λ) ، زاویه خطدید بصورت $\lambda = y/r$ تقریب زده می‌شود که r فاصله موشک از هدف است. با مشتقگیری از رابطه اخیر نسبت



شکل ۱- نمایش هندسه مسئله

به زمان (t) ، رابطه نرخ چرخش خطدید حاصل می‌شود:

$$\dot{\lambda} = \frac{y + vt_{go}}{v_c t_{go}^2} \quad (2)$$

که در آن، v_c سرعت نزدیک شدن موشک به هدف، \dot{y} $v = \dot{y}$ زمان باقیمانده تا اصابت به هدف است t_{go} (در این بررسی، زمان نهایی t_f معلوم فرض می‌شود. یکی از فرضیات خطی‌سازی، استفاده از تقریب $r = v_c t_{go}$ است. دستور شتاب در هدایت تناسبی بصورت

$$n_c = N' v_c \dot{\lambda} \quad (3)$$

نوشته می‌شود که در آن N' ضریب ناوبری مؤثر و n_c دستور شتاب است. رابطه خطی‌شده هدایت تناسبی با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۳) بدست می‌آید [۳]:

$$n_c = \frac{N'}{t_{go}^2} (y + vt_{go}) \quad (4)$$

در اینجا تابع تبدیل از دستور شتاب به شتاب موشک با تابع تبدیل رسته یک با ثابت زمانی T مدل می‌شود:

نتایج آن، برای تمام مقادیر پارامترها قابل استفاده است و اهمیتی نزدیک به حل تحلیلی برای مسئله دارد. در مرجع [۳] تحلیل فاصله خطای بی‌بعدشده با اثر شتاب اشباع بدون اثر رادوم و همچنین تحلیل فاصله خطا با اثر رادوم بدون اشباع شتاب انجام شده‌است. در مرجع [۷] نمودارهای بی‌بعد تقریبی با اثر رادوم و نویزهای مختلف بدون اثر اشباع و فیدبک سرعت زاویه‌ای بدنه آمده‌است.

بنابر اهمیت اثر رادوم در پایداری و فاصله خطا، تاکنون روشهای متعددی برای جبران این اثر برای مسئله دوبعدی و سه‌بعدی در منابع آمده‌است که بطور نمونه می‌توان به استفاده از انواع روشهای کنترل کلاسیک، مدرن، اتفاقی و فیلترینگ برای جبران اثر رادوم اشاره کرد [۸-۱۳]. بعلاوه استفاده از منطق فازی و شبکه عصبی برای هدایت، فیلترینگ و کالیبراسیون برای جبران اثر رادوم در منابع مشاهده می‌شود [۱۴-۱۶]. در این میان، فیدبک سرعت زاویه‌ای بدنه موشک، روش شناخته‌شده‌ای در منابع می‌باشد. برای بهبود پاسخ موشک در مسیر فیدبک سرعت زاویه‌ای بدنه، از جبران‌ساز (بطور نمونه، جبران‌ساز پیش فاز-پس فاز) استفاده می‌شود. روش مذکور از نوع جبران‌سازی کنترل کلاسیک است. البته تحلیل فاصله خطا در منابع عموماً از شبیه‌سازی عددی، روش الحاقی، انتشار کوواریانس و یا مونت کارلو انجام شده‌است [۲،۳،۱۷].

در این تحقیق، با بی‌بعدسازی معادلات خطی‌شده هدایت تناسبی، تحلیل فاصله خطا توأمان با اثر رادوم و اشباع شتاب به‌مراه فیدبک سرعت زاویه‌ای بدنه در قانون هدایت با فرضیات دینامیک رسته یک برای سیستم کنترل، حرکت در صفحه، خطای رادوم به عنوان تابع خطی از زاویه بین محور موشک و خطدید انجام می‌شود. در ادامه، معادلات مذکور برای هدایت تناسبی با جمله‌های غیرخطی شامل توانهای مختلف نرخ چرخش خطدید استخراج شده‌است.

معادلات خطی‌شده هدایت تناسبی

مطابق شکل ۱، معادله شتاب در خطی‌سازی تنها در راستای y نوشته می‌شود [۳]:

$$\ddot{y} = n_T - n_M \quad (1)$$

$$\hat{n}_c = \begin{cases} R_{\text{sat}} \operatorname{sgn}(\hat{a}_c) & |\hat{a}_c| > R_{\text{sat}} \\ \hat{a}_c & |\hat{a}_c| \leq R_{\text{sat}} \end{cases} \quad (13)$$

که در آن، $\hat{a}_c = a_c / |n_T|$ ، $R_{\text{sat}} = A_{\text{sat}} / |n_T|$ قدرمطلق حداکثر دستور شتاب مجاز موشک است. برای حالت مذکور، نمودار فاصله خطای بی‌بعد، بدون ذکر معادلات بی‌بعد در مرجع [۳] موجود است.

معادلات بی‌بعد هدایت تناسبی با اثر رادوم

همانطور که اشاره شد، در اثر عبور پرتوهای الکترومغناطیس از دماغه غیرفلزی موشک، پرتوی عبوری مطابق شکل ۲ به اندازه زاویه r_{dome} منحرف می‌شود [۳]:

$$r_{\text{dome}} = R(\lambda - \theta) \quad (14)$$

فرض کنید که تغییرات زاویه r_{dome} نسبت به $(\lambda - \theta)$ خطی و شیب آن R باشد. زاویه محور طولی با مرجع اینرسی با θ نمایش داده شده است. مقدار زاویه خطدید اندازه‌گیری شده (λ_m) در حضور اثر رادوم بصورت زیر نوشته می‌شود [۳]:

$$\lambda_m = \lambda + r_{\text{dome}} = (1 + R)\lambda - R\theta \quad (15)$$

بنابراین نرخ چرخش خطدید اندازه‌گیری شده در حضور اثر رادوم بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{\lambda}_m = \dot{\lambda} + \dot{r}_{\text{dome}} = (1 + R)\dot{\lambda} - R\dot{\theta} \quad (16)$$

دستور شتاب محاسبه شده با استفاده از رابطه اخیر بصورت زیر بدست می‌آید:

$$n_c = N'v_c[(1 + R)\dot{\lambda} - R\dot{\theta}] \quad (17)$$

نشان می‌دهد که اگر به دستور شتاب، فیدبک $\dot{\theta}$ افزوده شود، می‌توان اثر نامطلوب رادوم را کاهش داد. برای این منظور، دستور شتاب بصورت زیر اصلاح نوشته می‌شود:

$$n_c = N'v_c(\dot{\lambda} + K_B\dot{\theta}) \quad (18)$$

با توجه به رابطه (۱۶)، دستور شتاب محاسبه شده بصورت زیر حاصل می‌آید:

$$n_c = N'v_c[(1 + R)\dot{\lambda} + (K_B - R)\dot{\theta}] \quad (19)$$

$$\frac{n_M}{n_c} = \frac{1}{1 + Ts} \quad (5)$$

که در آن s متغیر حوزه لاپلاس است. رابطه اخیر در حوزه زمان بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{n}_M = (n_c - n_M)/T \quad (6)$$

معادلات بی‌بعد شده هدایت تناسبی

معادلات حاکم بر مسئله در قسمت قبل، با فرض هدف با شتاب ثابت و با استفاده از روابط

$$\hat{y} = \frac{y}{|n_T|T^2}, \hat{\nu} = \frac{\nu}{|n_T|T}, \tau = \frac{t}{T}, \tau_f = \frac{t_f}{T} \quad (7)$$

بی‌بعد می‌شود؛ به عبارت دیگر:

$$\hat{y}' = \hat{\nu} \quad (8)$$

$$\hat{\nu}' = \operatorname{sgn}(n_T) - \hat{n}_M \quad (9)$$

$$\hat{n}_M' = \hat{n}_c - \hat{n}_M \quad (10)$$

که در آن، sgn تابع علامت و $(\cdot)'$ نمایانگر مشتق نسبت به متغیر زمان بی‌بعد (τ) است. همچنین

$$\hat{n}_M = n_M / |n_T|, \hat{n}_c = n_c / |n_T| \quad (11)$$

البته معادلات مسئله برای هدف با مانورهای مختلف (غیر ثابت) نیز با فرضیاتی قابل بی‌بعدسازی است. اما در این تحقیق، تحلیل فاصله خطا برای هدف با مانور ثابت، انجام می‌پذیرد. برای محاسبه رابطه (۱۰) باید دستور شتاب را بی‌بعد کرد:

$$\hat{n}_c = \frac{N'}{(\tau_f - \tau)^2} [\hat{y} + (\tau_f - \tau)\hat{\nu}] \quad (12)$$

حل عددی معادلات (۱۰-۱۲) و (۱۲) به ازای شرایط اولیه صفر برای سه متغیر n_M, ν, y (در زمان صفر)، خطای نهایی (MD) به ازای یک زمان نهایی مفروض را نتیجه می‌دهد.

در مرحله بعد، اثر شتاب اشباع اعمال می‌شود. برای این حالت a_c را دستور شتاب قبل از اشباع و n_c را دستور شتاب بعد از اعمال اشباع در نظر بگیرید. بنابراین

$$\hat{\nu}' = \text{sgn}(n_T) - \hat{n}_M \quad (26)$$

$$\hat{n}'_M = \hat{n}_c - \hat{n}_M \quad (27)$$

$$\hat{\theta}' = \hat{n}_M + \frac{T_\alpha}{T} \hat{n}'_M \quad (28)$$

که در آن \hat{n}_c از رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود. با استفاده از روابط (۲۷) و (۲۸) و با تعریف ضریب

$$K_{\text{eq}} = \frac{N'v_c R_{\text{eq}}}{v_M} \quad (29)$$

رابطه دستور شتاب (۲۰) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\hat{n}_c = \frac{\frac{N'(1+R)}{(\tau_f - \tau)^2} [\hat{y} + (\tau_f - \tau)\hat{\nu}] - K_{\text{eq}} \left(1 - \frac{T_\alpha}{T}\right) \hat{n}_M}{1 + K_{\text{eq}} \frac{T_\alpha}{T}} \quad (30)$$

رابطه فوق، شکل بی‌بعد دستور شتاب زیر است:

$$n_c = \frac{N'(1+R)v_c \dot{\lambda} - K_{\text{eq}} \left(1 - \frac{T_\alpha}{T}\right) n_M}{1 + K_{\text{eq}} \frac{T_\alpha}{T}} \quad (31)$$

در مدل ساده‌شده مفروض، دستور شتاب (۳۱) معادل دستور شتاب (۱۹) شده‌است. در حالتی که شتاب اشباع نیز اعمال شود، رابطه (۱۳) همچنان برقرار است:

$$\hat{n}_c = \begin{cases} R_{\text{sat}} \text{sgn}(\hat{a}_c) & |\hat{a}_c| > R_{\text{sat}} \\ \hat{a}_c & |\hat{a}_c| \leq R_{\text{sat}} \end{cases} \quad (32)$$

که در آن \hat{a}_c همان \hat{n}_c در رابطه (۳۰) می‌شود؛ به عبارت دیگر:

$$\hat{a}_c = \frac{\frac{N'(1+R)}{(\tau_f - \tau)^2} [\hat{y} + (\tau_f - \tau)\hat{\nu}] - K_{\text{eq}} \left(1 - \frac{T_\alpha}{T}\right) \hat{n}_M}{1 + K_{\text{eq}} \frac{T_\alpha}{T}} \quad (33)$$

برای سادگی، رابطه اخیر برای حل عددی مسئله با اعمال شتاب اشباع استفاده می‌شود. در اینجا برای حل عددی از روش

بنابراین، معادله بی‌بعدشده دستور شتاب بر حسب پارامتر بی‌بعد $v_c R_{\text{eq}} / v_M$ حاصل می‌شود ($R_{\text{eq}} = R - K_B$):

$$\hat{n}_c = \frac{N'(1+R)}{(\tau_f - \tau)^2} [\hat{y} + (\tau_f - \tau)\hat{\nu}] - \frac{N'v_c R_{\text{eq}}}{v_M} \frac{d\hat{\theta}}{d\tau} \quad (20)$$

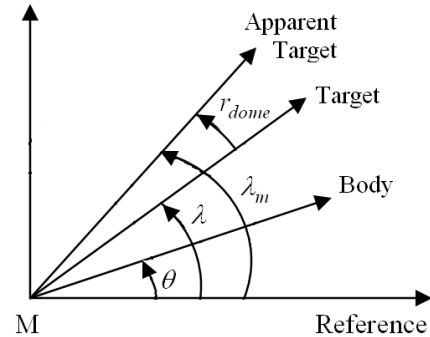
که در آن v_M سرعت موشک است و

$$\hat{\theta} = \frac{v_M \theta}{T |n_T|} \quad (21)$$

با توجه به این که در رابطه (۲۰)، $\hat{\theta}$ و یا شکل بی‌بعد آن ظاهر شده‌است، بنابراین معادله‌ای نیز برای محاسبه آن نیاز است. روش متداول در مراجع، تعریف ثابت زمانی نرخ چرخش $(T_\alpha = \alpha / \dot{\gamma})$ و یا فرم معادل آن بصورت زیر است:

$$\frac{\dot{\gamma}}{\theta} = \frac{1}{1 + T_\alpha s} \quad (22)$$

که در آن، γ زاویه بردار سرعت موشک نسبت به افق است ($n_M = v_M \dot{\gamma}$). با فرض سرعت ثابت می‌توان نوشت:



شکل ۲- هندسه مسئله و نمایش زوایا

$$\dot{\theta} = \frac{n_M}{v_M} + \frac{T_\alpha}{v_M} \dot{n}_M \quad (23)$$

شکل بی‌بعد رابطه اخیر بصورت زیر است:

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\tau} = \hat{n}_M + \frac{T_\alpha}{T} \frac{d\hat{n}_M}{d\tau} \quad (24)$$

در نتیجه معادلات بی‌بعدشده بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{y}' = \hat{\nu} \quad (25)$$

در این شکل، مقدار عبارت $N'(1+R)$ در رابطه (۳۳) با N' جایگزین شده‌است؛ چرا که تأثیر آن در این مرحله قابل صرف‌نظر کردن است. این موضوع در شکل ۴ نمایش داده شده‌ است. در این شکل، منحنی خط‌چین به ازای $R = -0.05$ و منحنی خط توپر با فرض جایگزینی مذکور، بدست آمده‌است. در شکل‌های ۳ و ۴ مقدار R_{sat} برابر ۲۰ منظور شده‌است که در عمل تقریبی از حالت بدون اشباع است؛ اما شکل ۵ به ازای مقادیر $R_{sat} = 3, 20$ ترسیم شده‌است. البته نکته جالب این است که فاصله خطا به ازای محدودیت بیشتر، کمتر شده‌است. این موضوع به این علت است که در حالت مذکور، حلقه هدایت ناپایدار می‌شود و محدودیت شتاب، به نوعی محدود کردن سرعت واگرایی مسئله است. اما در شکل ۶ فاصله خطای بی‌بعد به ازای $K_{eq} = 0.6$ ترسیم شده‌است که در این حالت حلقه هدایت پایدار است و مشخص است که محدودیت بیشتر در شتاب مانوری موشک، سبب فاصله خطای زیادتر می‌شود و میزان آن به مقداری است که در طراحی سیستم هدایت، تعیین کننده است و قابل صرف‌نظر نیست.

اعمال تأخیر زمانی برای اندازه‌گیری $\dot{\theta}$

با توجه به این که نرخ چرخش بدنه موشک توسط ژيروسکوپ نرخ‌گیری اندازه‌گیری می‌شود، کیفیت این اندازه‌گیری در جبران اثر رادوم مؤثر است. فرض کنید که ژيروسکوپ نرخ‌گیری با یک تابع تبدیل رسته یک با ثابت زمانی T_s مدل شود؛ به عبارت دیگر،

$$\frac{\dot{\theta}_m}{\dot{\theta}} = \frac{1}{1 + T_s s} \quad (34)$$

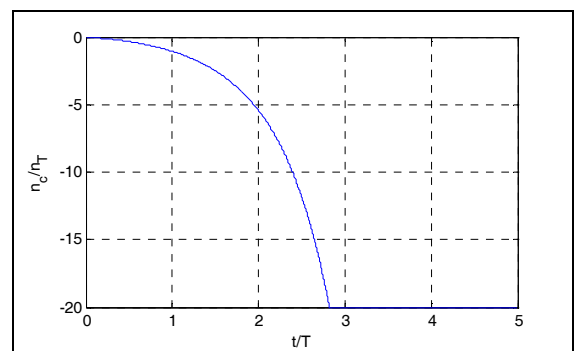
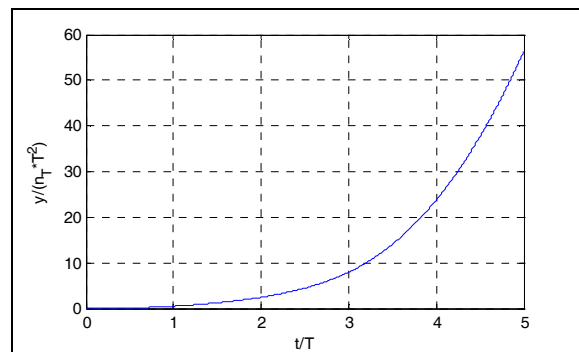
همانطور که قبلاً اشاره شد، پایین‌نویس m نمایانگر مقدار اندازه‌گیری شده‌است. بنابراین، $\dot{\theta}_m$ خروجی ژيروسکوپ نرخ‌گیری است و در ادامه با q_m نمایش داده می‌شود. برای این حالت معادلات مسئله بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{y} = v \quad (35)$$

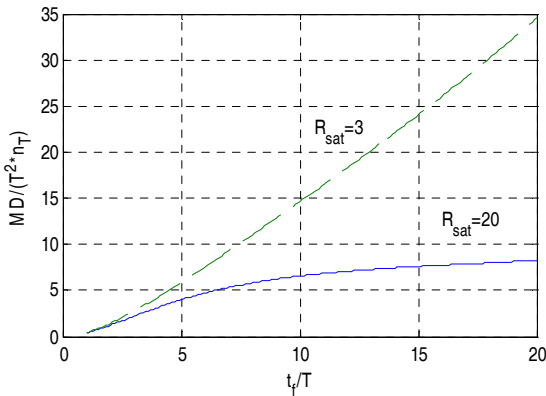
$$\dot{v} = n_T - n_M \quad (36)$$

$$\dot{n}_M = (n_c - n_M)/T \quad (37)$$

رانگ کوتای مرتبه ۴ استفاده می‌شود. در نتیجه برای حل مسئله، معادلات (۲۸-۲۵) به‌مراه دو معادلهٔ اخیر (و اعمال شرایط اولیه) کافی است. همانطور که از رابطه (۲۹) مشاهده می‌شود، سعی شده است تا اثر R در K_{eq} لحاظ شود و به عنوان یک کمیت مستقل ظاهر نشود؛ اما متأسفانه در رابطه (۳۳) بطور مستقل ظاهر شده‌است. برای این که تعداد کمیتهای مستقل کاهش یابد، عبارت $N'(1+R)$ در رابطه (۳۳) با N' جایگزین می‌شود. این بدان معناست که ضریب ناوبری مؤثر به میزان $N'(1+R)$ (به ازای ثابت K_{eq}) تغییر یابد. بطور مثال به ازای $N' = 3$ و $R = 0.03$ ، مقدار $N'(1+R)$ برابر ۳.۰۹ می‌شود که به معنای افزایش ضریب ناوبری مؤثر به میزان ۰.۰۹ است. در شکل ۳ نتایج حل عددی مسئله شامل نمودار $\hat{y} = y / |n_T| T^2$ و دستور شتاب بی‌بعد برای شرایط اولیهٔ صفر و به ازای $N' = 3$ ، $R_{sat} = 20$ ، $T_\alpha / T = 4$ ، $K_{eq} = -0.6$ شده‌است.



شکل ۳- فاصله بی‌بعد و نسبت شتاب بر حسب زمان بی‌بعد به ازای $N' = 3$ ، $K_{eq} = -0.6$ ، $T_\alpha / T = 4$ ، $t_f / T = 5$ ، $R_{sat} = 20$



شکل ۶- فاصله خطای بی بعد بر حسب زمان نهایی بی بعد به ازای

$$N' = 3, K_{eq} = 0.6, T_\alpha / T = 4, R_{sat} = 3, 20$$

«هدایت تناسبی افزوده»، جمله $N'_a n_T$ به دستور شتاب هدایت تناسبی اضافه شده است که در آن N'_a ضریب شتاب است. البته لازم به ذکر است که دستور شتاب بصورت

$$a_c = N'v_c(\dot{\lambda} + K_B q_m) + N'_a n_T \quad (42)$$

است؛ اما به علت نحوه اندازه گیری نرخ چرخش خطدید بصورت رابطه (۱۹) و یا (۴۱) نوشته شده است. حال شکل بی بعد روابط مذکور نوشته می شود:

$$\hat{y}' = \hat{v} \quad (43)$$

$$\hat{v}' = \text{sgn}(n_T) - \hat{n}_M \quad (44)$$

$$\hat{n}'_M = \hat{n}_c - \hat{n}_M \quad (45)$$

$$\hat{\theta}' = \hat{n}_M + \frac{T_\alpha}{T} \hat{n}'_M \quad (46)$$

$$\hat{q}'_m = \frac{T}{T_s} (\hat{\theta}' - \hat{q}_m) \quad (47)$$

که در آن $\hat{q}_m = v_m q_m / |n_T|$

$$\hat{n}_c = \begin{cases} R_{sat} \text{sgn}(\hat{a}_c) & | \hat{a}_c | > R_{sat} \\ \hat{a}_c & | \hat{a}_c | \leq R_{sat} \end{cases} \quad (48)$$

$$\dot{\theta} = \frac{n_M}{v_m} + \frac{T_\alpha}{v_m} \dot{n}_M \quad (38)$$

$$\dot{q}_m = (\dot{\theta} - q_m) / T_s \quad (39)$$

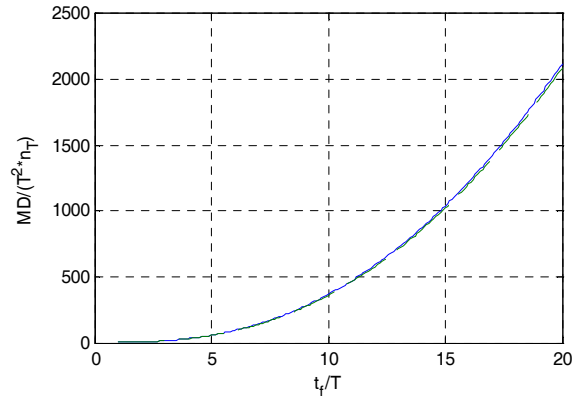
که در آن

$$n_c = \begin{cases} A_{sat} \text{sgn}(a_c) & | a_c | > A_{sat} \\ a_c & | a_c | \leq A_{sat} \end{cases} \quad (40)$$

و

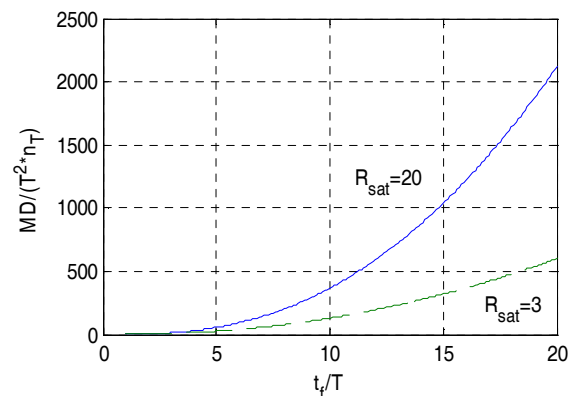
$$a_c = N'v_c[(1+R)\dot{\lambda} - Rq + K_B q_m] + N'_a n_T \quad (41)$$

که در آن، $\dot{\lambda}$ از رابطه (۲) جایگزین می شود. در رابطه فوق و به منظور کاهش فاصله خطا ناشی از مانور هدف، مشابه



شکل ۴- اثر جایگزینی $N'(1+R)$ با N' در فاصله خطا به ازای

$$N' = 3, K_{eq} = -0.6, T_\alpha / T = 4, R_{sat} = 20$$



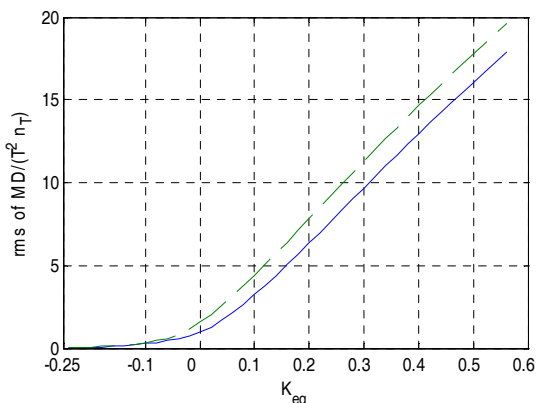
شکل ۵- فاصله خطای بی بعد بر حسب زمان نهایی بی بعد به ازای

$$N' = 3, K_{eq} = -0.6, T_\alpha / T = 4, R_{sat} = 3, 20$$

برای این منظور، از جذر میانگین مجذور فاصله خطای بی- بعد شده به ازای مقادیر مختلف t_f / T استفاده می‌شود:

$$\text{rms}(\widehat{\text{MD}}) = \left[\frac{1}{S} \sum_{j=1}^S \left(\frac{\text{MD}_j}{T^2 n_T} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (51)$$

که در آن MD_j فاصله خطای بی‌بعد به ازای j امین مقدار τ_f است. تعداد مقادیر گسسته $\tau_f = t_f / T$ نیز با S نمایش داده شده‌است. در اینجا برای حل عددی کد مربوطه در داخل یک حلقه به ازای مقادیر مختلف τ_f از یک تا ۲۰ با گام زمانی ۰/۲ اجرا می‌شود. البته بازه زمانی τ_f بسته به زمان هدایت پایانی برای یک موشک خاص باید انتخاب شود. در شکل ۷ ابتدا تأثیر جایگزینی N' به جای عبارت $N'(1+R)$ در فاصله خطا برای $K_{eq} > -0.25$ به ازای $N' = 3$ ، $T_\alpha / T = 4$ و $R_{\text{sat}} = 3$ بررسی می‌شود. توجه این که به ازای $K_{eq} = -0.25$ و مقادیر مذکور برای کمیت‌های بی‌بعد، مخرج کسر در رابطه (۳۳) صفر می‌شود. نمودار خط‌چین در این شکل به ازای $R = -0.05$ در عبارت $N'(1+R)$ و نمودار خط توپر با تقریب N' به ازای



شکل ۷- اثر جایگزینی N' با $N'(1+R)$ در فاصله خطا به ازای $N' = 3$ ، $T_\alpha / T = 4$ ، $R_{\text{sat}} = 3$ ؛ خط توپر نمایانگر حل تقریبی و خط‌چین برای حل دقیق به ازای $R = -0.05$

آن عبارت است. مقایسه این دو نمودار نشان می‌دهد که تقریب مذکور برای تحلیل اولیه، نتیجه قابل قبولی دارد. البته در عمل مقدار $R = -0.05$ ، مقدار بزرگی است. البته نتایج در یک همسایگی کوچک حول $K_{eq} = -0.25$ قابل اعتنا نیست. لازم به ذکر است که محدودیت شتاب اشباع در این همسایگی

$$\hat{a}_c = \frac{N'(1+R)}{(\tau_f - \tau)^2} [\hat{y} + (\tau_f - \tau)\hat{v}] + \frac{N'v_c}{v_m} (K_B \hat{q}_m - R\hat{\theta}') + N'_a \text{sgn}(n_T) \quad (49)$$

با جایگذاری روابط (۴۵) و (۴۶) در رابطه فوق و برای حالت بدون اشباع می‌توان نوشت:

$$\hat{a}_c = \frac{\frac{N'(1+R)}{(\tau_f - \tau)^2} [\hat{y} + (\tau_f - \tau)\hat{v}]}{1 + \frac{N'v_c R T_\alpha}{v_m T}} + \frac{\frac{N'v_c}{v_m} [K_B \hat{q}_m - R(1 - \frac{T_\alpha}{T})\hat{n}_M]}{1 + \frac{N'v_c R T_\alpha}{v_m T}} + N'_a \text{sgn}(n_T) \quad (50)$$

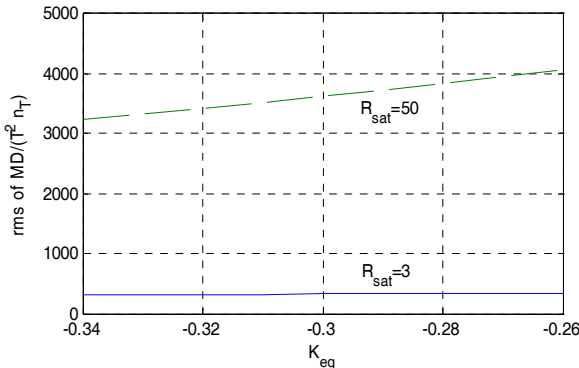
در این حالت، فاصله خطای بی‌بعد بر حسب کمیت بی‌بعد $N'v_c R / v_m$ و مقادیر مشخص K_B قابل رسم است و دیگر مقدار R و K_B مستقیماً با هم جمع جبری نمی‌شود.

بحث و نتایج

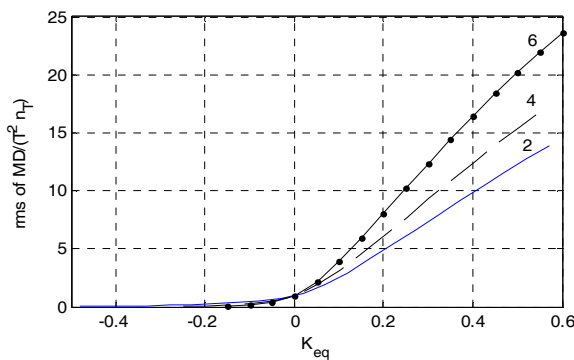
با استفاده از حل عددی معادلات بی‌بعد شده می‌توان تحلیل فاصله خطا را به ازای مقادیر مختلف پارامترهای بی‌بعد بدست آورد. در این مطالعه، تحلیل فاصله خطا با فرض هدف با شتاب مانوری ثابت انجام می‌شود. همچنین در خطی‌سازی معادلات، فرض می‌شود که v_c ثابت و مثبت است. شرایط اولیه برای چهار متغیر y, v, n_M, θ (و یا بی‌بعد شده آنها)، صفر منظور می‌شود.

در ابتدا هدایت تناسبی با بازخورد نرخ زاویه بدنه از رابطه (۳۳) و با فرض ژيروسکوپ نرخی ایده‌آل را در نظر بگیرید. همانطور که قبلاً شرح داده‌شد، نمودارهای شکل ۶ به ازای مقادیر ثابت K_{eq} و T_α / T ترسیم شده‌است. در صورتی که بتوان فاصله خطا را بر حسب مقادیر مختلف K_{eq} و T_α / T ترسیم نمود، کاربرد بهتری برای طراحی دارد. یک راهکار برای این موضوع، ترسیم نمودارها به ازای یک مقدار مشخص t_f / T است. راهکار دوم متوسط‌گیری از فاصله خطاست.

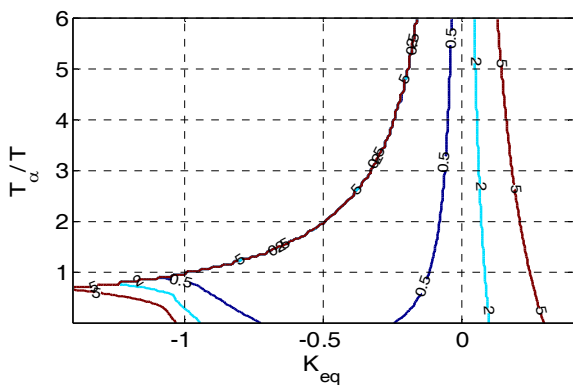
به ازای مقادیر مختلف N' نشان داده شود. $K_{eq} = N'v_c R_{eq} / v_M$



شکل ۸- جذر میانگین مجذور فاصله خطای بی‌بعد شده به ازای $N' = 3, T_\alpha / T = 4, R_{sat} = 3, 50$



شکل ۹- فاصله خطای بی‌بعد بر حسب $K_{eq} = N'v_c R_{eq} / v_M$ به ازای مقادیر $N' = 3, R_{sat} = 3, T_\alpha / T = 2, 4, 6$



شکل ۱۰- نمودارهای فاصله خطای بی‌بعد ثابت $rms(\widehat{MD}) = 0.5, 2, 5$ به ازای مقادیر $N' = 3$ و $R_{sat} = 3$

(و همچنین برای $K_{eq} < -0.25$) سبب محدودیت در فاصله خطا می‌شود و مسئله تنها در مقدار $K_{eq} = -0.25$ تکین می‌باشد. این موضوع در شکل ۸ برای $K_{eq} < -0.25$ با دو مقدار $R_{sat} = 3, 50$ نشان داده شده‌است. در شکل ۹ فاصله خطای بی‌بعد بر حسب $K_{eq} = N'v_c R_{eq} / v_M$ به ازای $N' = 3, R_{sat} = 3$ و سه مقدار ۲، ۴ و ۶ برای کمیت بی‌بعد T_α / T ترسیم شده‌است. لازم به ذکر است که در شکل ۸ و ۹، مقدار عبارت $N'(1 + R)$ در رابطه (۳۳) با N' جایگزین شده‌است. استفاده از فیدبک نرخ چرخش موشک (اعمال K_B در روابط) نمودار فاصله خطا را جابجا می‌کند. بطور نمونه، در صورتی که نمودار در محدوده ناپایدار $R < -0.25$ قرار گیرد، با اعمال مقادیر منفی برای K_B می‌توان نمودار را به سمت مقادیر بزرگتر K_{eq} جابجا کرد. البته در صورتی که در هر لحظه در حین پرواز موشک، تخمینی از مقدار R موجود باشد، اثر رادوم قابل جبرانسازی است.

موضوع دیگر این است که مطالعه اولیه نشان می‌دهد که اعمال دینامیک ژيروسکوپ برای تخمین اولیه فاصله خطا، خطای زیادی در حل مسئله ایجاد نمی‌کند، در عوض امکان رسم نمودارهای بی‌بعد مناسبتری را برای طراحی فراهم می‌کند. بطور نمونه، می‌توان به امکان رسم کانتورهای $rms(\widehat{MD}) = \text{const.}$ برای محور T_α / T بر حسب K_{eq} اشاره نمود. این نمودارها در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ مشاهده می‌شود. در نهایت می‌توان برای تقریبهای مذکور (در نمودارهای بی‌بعد) ضرایب تصحیحی بدست آورد. در شکل ۱۰ نمودارهای فاصله خطای بی‌بعد ثابت $rms(\widehat{MD}) = 0.5, 2, 5$ برای محور T_α / T بر حسب $K_{eq} = N'v_c R_{eq} / v_M$ به ازای $N' = 3$ و $R_{sat} = 3$ ترسیم شده‌است (با گام یک‌گام برای مقادیر K_{eq} و گام پنج‌گام برای مقادیر T_α / T). بخش سمت چپ نمودارهای رسم شده برای هر سه مقدار مفروض فاصله خطای بی‌بعد بر روی هم افتاده‌است. بطور نمونه، اگر نقاط انتخابی داخل کانتور $rms(\widehat{MD}) = 5$ باشد، فاصله خطای بی‌بعد آن کمتر از پنج می‌شود. برای انتخاب پارامترهای طراحی اولیه، مطابق شکل ۱۱، بهتر است تا نتایج به ازای یک فاصله خطای بی‌بعد مشخص برای محور T_α / T بر حسب

ثابت) نیز با فرضیاتی قابل بی‌بعدسازی است. در ادامه نشان داده شد که افزودن بازخورد سرعت زاویه‌ای بدنه می‌تواند سبب کاهش فاصله خطا شود. همچنین در پیوست الف نشان داده شد که روش ارائه شده برای قانون هدایت تناسبی با جمله‌های غیرخطی (توانهای مختلف نرخ چرخش خطدید) نیز قابل اعمال است.

پیوست الف: معادلات بی‌بعد هدایت تناسبی با جمله‌های غیرخطی

در این پیوست، کاربرد روش بی‌بعدسازی معادلات برای هدایت تناسبی با جمله‌های غیرخطی نشان داده می‌شود. همانطور که اشاره شد، روش الحاقی در این موارد قابل اعمال نیست. در مرجع [۱۹] دستور شتاب هدایت تناسبی بصورت زیر پیشنهاد شده است:

$$n_c = N'v_c\dot{\lambda} + K_3\dot{\lambda}^3 \quad (52)$$

معادله مذکور را می‌توان بصورت

$$n_c = N'v_c\dot{\lambda} + K_n |\dot{\lambda}|^n \operatorname{sgn}(\dot{\lambda}) \quad (53)$$

تعمیم داد. دستور شتاب با توجه به رابطه (۱۶) بصورت زیر قابل اصلاح است:

$$n_c = N'v_c(\dot{\lambda} + k_1\dot{\theta}) + K_n |\dot{\lambda} + k_2\dot{\theta}|^n \operatorname{sgn}(\dot{\lambda} + k_2\dot{\theta}) \quad (54)$$

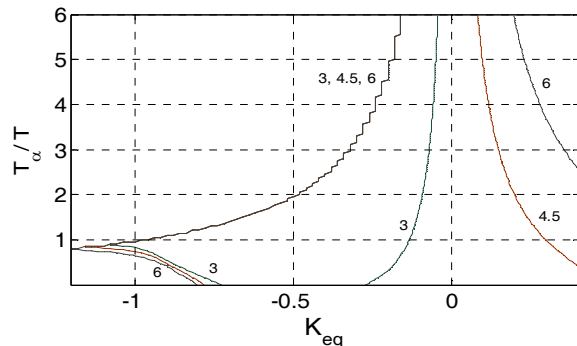
برای بی‌بعدسازی معادلات، ضریب N_n بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_n = \frac{K_n |n_T|^{n-1}}{v_c^n} \quad (55)$$

با توجه به این که در این نوع تحلیل، v_c ثابت فرض می‌شود و برای سادگی تحلیل، شتاب هدف نیز ثابت منظور شده است؛ لذا رابطه (۵۴) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$n_c = N'v_c(\dot{\lambda} + k_1\dot{\theta}) + \frac{N_n v_c^n}{|n_T|^{n-1}} |\dot{\lambda} + k_2\dot{\theta}|^n \operatorname{sgn}(\dot{\lambda} + k_2\dot{\theta}) \quad (56)$$

در شکل ۱۱، در صورتی که فاصله خطای بی‌بعد با توجه به میزان مانور هدف و شعاع انهدام سرچنگی بطور مثال ۰/۵ لحاظ شده باشد و $R_{\text{sat}} = 3$ باشد، انتخاب N' و T مناسب با توجه به سرعت و ارتفاع موشک میسر می‌شود. در این شکل، کانتورهای $\widehat{\text{rms}}(\text{MD}) = 0.5$ به ازای مقادیر $N' = 3, 4.5, 6$ ترسیم شده است. لازم به ذکر است که در این شکل، ظاهر دندان‌های در قسمت سمت چپ نمودار با زیرتر شدن گام‌های اجرای حلقه‌های کد حل عددی مرتفع خواهد شد. در مرجع [۱۸] اطلاعات جامعی در خصوص محاسبه R موجود است که برای طراحی مفید خواهد بود.



شکل ۱۱- رفتار T_α/T بر حسب K_{eq} برای $\widehat{\text{rms}}(\text{MD}) = 0.5$ به ازای مقادیر $N' = 3, 4.5, 6$ و $R_{\text{sat}} = 3$

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، تحلیل فاصله خطای هدایت تناسبی با اعمال اثر اشباع شتاب و در حضور اثر رادوم و با استفاده از معادلات بی‌بعد شده و همچنین با اعمال بازخورد سرعت زاویه‌ای بدنه در قانون هدایت، ارائه شده است. دینامیک سیستم کنترل با یک تابع تبدیل مرتبه اول مدل شده است و حرکت موشک و هدف در صفحه فرض شده است. حل عددی معادلات بی‌بعد شده این مزیت مهم را دارد که با یک بار حل عددی مسئله به ازای کمیت‌های بی‌بعد، نمودار فاصله خطای بی‌بعد شده بدست می‌آید. با استفاده از نتایج شبیه سازی پرواز می‌توان اثرات غیرخطی و غیر مدل شده را بر روی نمودارهای بی‌بعد شده مشخص نمود و روابط اصلاحی برای نمودارها پیشنهاد داد. لذا نمودارهای حاصل به ازای مقادیر مختلف پارامترها قابل استفاده است. در اینجا تحلیل فاصله خطا برای هدف با مانور ثابت انجام شده است. البته معادلات مسئله برای هدف با مانورهای مختلف (غیر

عبارت اول و دوم رابطه اخیر بصورت زیر تفکیک می‌شود:

$$n_{c1} = N'v_c(\dot{\lambda} + k_1\dot{\theta}) \quad (57)$$

$$n_{c2} = \frac{N_n v_c^n}{|n_T|^{n-1}} |\dot{\lambda} + k_2\dot{\theta}|^n \operatorname{sgn}(\dot{\lambda} + k_2\dot{\theta}) \quad (58)$$

البته در روابط فوق بجای $\dot{\lambda}$ ، باید مقدار اندازه‌گیری شده آن از رابطه (۱۶) جایگزین شود. بی‌بعدسازی رابطه (۵۷) مشابه رابطه (۲۰) است:

$$\hat{n}_{c1} = \frac{N'(1+R)}{(\tau_f - \tau)^2} [\hat{y} + (\tau_f - \tau)\hat{v}] + \frac{N'v_c(k_1 - R)}{v_M} \hat{\theta}' \quad (59)$$

که در آن $\hat{n}_{c1} = n_{c1} / |n_T|$ همچنین رابطه (۵۸) بصورت زیر بی‌بعد می‌شود:

$$\hat{n}_{c2} = \frac{n_{c2}}{|n_T|} = N_n |f|^n \operatorname{sgn}(f) \quad (60)$$

که در آن

$$f = \frac{(1+R)}{(\tau_f - \tau)^2} [\hat{y} + (\tau_f - \tau)\hat{v}] + \frac{v_c(k_2 - R)}{v_M} \hat{\theta}' \quad (61)$$

که در روابط فوق، $\hat{\theta}'$ با استفاده از روابط (۲۷) و (۲۸) باید جایگزین شود، به عبارت دیگر:

$$\hat{\theta}' = \left(1 - \frac{T_\alpha}{T}\right) \hat{n}_M + \frac{T_\alpha}{T} \hat{n}_c \quad (62)$$

در نتیجه معادلات بی‌بعد شده بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{y}' = \hat{v} \quad (63)$$

$$\hat{v}' = \operatorname{sgn}(n_T) - \hat{n}_M \quad (64)$$

$$\hat{n}'_M = \hat{n}_c - \hat{n}_M \quad (65)$$

$$\hat{\theta}' = \hat{n}_M + \frac{T_\alpha}{T} \hat{n}'_M \quad (66)$$

که در آن \hat{n}_c از حل یک معادله جبری حاصل از روابط (۶۲)- (۵۹) بدست می‌آید. با فرض $K_B = k_1 = k_2$ رابطه \hat{n}_c بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\hat{n}_c = N'f + N_n |f|^n \operatorname{sgn}(f) \quad (67)$$

که در آن f تابعی از \hat{n}_c می‌شود. به ازای n های فرد، روابط ساده‌تر می‌شود؛ چرا که رابطه (۵۳) بصورت $n_c = N'v_c\dot{\lambda} + K_n\dot{\lambda}^n$ بازنویسی می‌شود. در این حالت

$$\hat{n}_c = N'f + N_n f^n \quad (68)$$

نوشته می‌شود که در آن

$$f = \frac{(1+R)}{(\tau_f - \tau)^2} [\hat{y} + (\tau_f - \tau)\hat{v}] - \frac{v_c R_{\text{eq}}}{v_M} \left[\left(1 - \frac{T_\alpha}{T}\right) \hat{n}_M + \frac{T_\alpha}{T} \hat{n}_c \right] \quad (69)$$

با توجه به این که حل مسئله عددی است، محاسبه \hat{n}_c از معادله جبری (۶۷) یا (۶۸) میسر می‌شود.

در ادامه می‌توان دستور شتاب را بصورت زیر در نظر گرفت:

$$n_c = N'v_c\dot{\lambda} + \sum_{j=2} K_j |\dot{\lambda}|^{n_j} \operatorname{sgn}(\dot{\lambda}) \quad (70)$$

رابطه فوق با اعمال فیدبک نرخ زاویه‌ای با بهره‌های مختلف k_j بصورت زیر اصلاح می‌شود:

$$n_c = N'v_c(\dot{\lambda} + k_1\dot{\theta}) + \sum_{j=2} K_j |\dot{\lambda} + k_j\dot{\theta}|^{n_j} \operatorname{sgn}(\dot{\lambda} + k_j\dot{\theta}) \quad (71)$$

برای این حالت، رابطه (۶۷) بصورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\hat{n}_c = N'f_1 + \sum_{j=2} N_j |f_j|^{n_j} \operatorname{sgn}(f_j) \quad (72)$$

که در آن

$$N_j = \frac{K_j |n_T|^{n_j-1}}{v_c^{n_j}} \quad (73)$$

$$f_j = \frac{(1+R)}{(\tau_f - \tau)^2} [\hat{y} + (\tau_f - \tau)\hat{v}] + \frac{v_c(k_j - R)}{v_M} \hat{\theta}' \quad (74)$$

منابع و مراجع

- [12] نیکوسخن لامع، مهدی، و محمدخانی، محمدعلی، "جبران- سازی سه‌بعدی خطای ریدوم در صفحه دید با استفاده از نرخ بدنی" نهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، تهران، ۱۳۸۸.
- [13] محمدخانی، محمدعلی، و نیکوسخن لامع، مهدی "تحلیل پایداری حلقه هدایت با بازخورد پارازیتی" نهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، تهران، ۱۳۸۸.
- [14] Lin, C.L., "Stability Analysis of Radome Error and Calibration Using Neural Network," IEEE Transactions on AES, Vol. 37, No. 4, 2001, pp.1442-1450.
- [15] Cao, X., Dong, C., Wang, Q., and Chen, Y., "Radome Slope Estimation in Flight Using Fuzzy Adaptive Multiple Model for Active Homing Missile," The 9th International Conference on Electronic Measurement & Instruments, 2009.
- [16] Lin, J.-M., and Lin, C.-H., "High Altitude Air Defense with Intelligent Fuzzy Terminal Guidance Law by Taking Turning Rate and Radome Error slope into Consideration," Proc. of the 8th Asian Control Conference, Taiwan, 2011.
- [17] Miwa, S., "Radome Effect on the Miss Distance of a Radar Homing Missile," Electronics and Communications in Japan, Part 1, Vol. 81, No. 7, 1998.
- [18] Kozakoff, D. J., Analysis of Radome-Enclosed Antennas, 2nd Ed, Artech House, Inc., Norwood, MA, 2010.
- [19] Yanushevsky, R., Modern Missile Guidance, CRC Press, 2008.
- [1] Garnell, P., Guided Weapon Control System, Pergamon Press, 2nd Ed., 1980.
- [2] Lin, C.-F., Modern Navigation, Guidance, and Control Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [3] Zarchan, P., Tactical and Strategic Missile Guidance, 3rd ed., Progress in Astronautics and Aeronautics, 176, AIAA, 1997.
- [4] Neslin, F.W., "Missile Guidance for Low-Altitude Air Defense," Journal of Guidance and Control, Vol. 2. No. 4, 1979, pp. 283-289.
- [5] Neslin, F.W., and Zarchan, P., "Wing Size vs Radome Compensation in Aerodynamically Controlled Radar Homing Missiles," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 9. No. 6, 1986, pp. 645-649.
- [6] Neslin, F.W., and Zarchan, P., "Missile Guidance Design Tradeoffs for High Altitude Air Defense," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 6. No. 3, 1983, pp. 207-212.
- [7] Neslin, F.W., and Zarchan, P., "Radome Induced Miss Distance in Aerodynamically Controlled Homing Missiles," AIAA Guidance and Control Conference, AIAA-84-1845, USA, 1984.
- [8] Yueh, W.R., and Lin, C. F., "Guidance Performance Analysis with in-Flight Radome Error Compensation," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 8, No. 5, 1985, pp. 666-669.
- [9] Lin J.-M., and Chau, Y.-F., "Radome Slope Compensation Using Multiple-Model Kalman Filters," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 18. No. 3, 1995, pp. 637-640.
- [10] Gurfil, P., and Kasdin, J., "Improving Missile Guidance Performance by In-Flight Two-Step Nonlinear Estimation of Radome Aberration," IEEE Trans. on Control System Technology, Vol. 12, No. 4, 2004, pp.532-541.
- [11] Zarchan, P., and Gratt, H., "Adaptive Radome Compensation Using Dither," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 22, No. 1, 1999, pp. 51-57.