

بررسی عددی خانواده آسم (AUSM) در جریان‌های تقارن محوری لزج و غیرلزج

علی قربانی^۱، عدنان محمدی^۲، محمدحسن جوارشکیان^{۳*}

۱. کارشناس ارشد هوافضا، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

۲. دکتری هوافضا، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

۳. استاد گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۰۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۰۳)

چکیده

در این پژوهش خانواده آسم در جریان‌های تقارن محوری تراکم پذیر، پایا، لزج و غیرلزج در یک کد بر مبنای روش حجم محدود و در یک شبکه با ساختار ذخیره‌سازی بی‌سازمان مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته‌اند. جریان‌های تقارن محوری با در نظر گرفتن اثرات سرعت جانبی می‌توانند مانند یک مسئله سه‌بعدی در صفحه طولی در نظر گرفته شوند که در آن صورت حجم محاسبات در مقایسه با محاسبات سه‌بعدی کاهش می‌یابد. جهت شناسایی روش‌های کارآمدتر در خانواده آسم به لحاظ پیش‌بینی دقیق ویژگی‌های میدان جریان دارای تقارن محوری، مهم‌ترین و جدیدترین اصلاحات این خانواده توسعه و در آزمایش‌های جریان تقارن محوری داخلی و خارجی، لزج و غیرلزج سرعت‌بالا همراه با موج ضربه‌ای، مورد بررسی قرار گرفتند. لازم به ذکر است نکته بدیع این پژوهش ارزیابی و مقایسه انجام‌شده بر روی خانواده‌ی آسم در حل میدان جریان تراکم پذیر دارای تقارن محوری است که در تحقیقات پیشین کمتر مورد توجه بوده است. در بررسی‌های انجام‌شده معین می‌گردد که روش AUSM+M در برابر موج ضربه‌ای قوی در مقابل سایر روش‌های بررسی‌شده در این پژوهش بهتر عمل می‌کند و با توجه به اصلاحات صورت گرفته در این نواحی برخلاف روش‌های دیگر نوساناتی ندارد. همچنین مشخص می‌شود روش AUSM+M از نرخ سرعت همگرایی بهتری نسبت به دو طرح AUSM+ و SLAU بهره می‌برد. در جریان‌های لزج نیز روش AUSM+M نسبت به سایر طرح‌ها از لحاظ لرزش در محل برخورد موج ضربه‌ای و تولید کمینه نرخ اتلاف انرژی جنبشی متمایز است.

واژه‌های کلیدی: طرح آسم، تقارن محوری، جریان لزج، جریان تراکم‌پذیر

Numerical Investigation of the AUSM-Family in Viscous and Inviscid Axisymmetric Flow Field

Abstract

This research explores and compares the AUSM scheme family based on compressible, steady, viscous, and inviscid axisymmetric flows in a finite-volume method-based and unstructured data storage grids code. When the effects of side-velocity are taken into account, axisymmetric flows can be considered a three-dimensional problem in the longitudinal plane; as a result, there is a considerably decreased number of computations required compared to computations in three dimensions. The most important and latest modifications of the AUSM-family were developed to identify more efficient methods in the AUSM-family in terms of accurate prediction of the axisymmetric flow field in internal and external axisymmetric flows, viscous (inviscid), and high-speed flows with shock waves characteristics. The novelty of this investigation is the assessment and comparison done on the AUSM-family in resolving the compressible axisymmetric flow field, which has received less attention in prior studies. The studies determine that the AUSM+M method performs better against a strong shock wave than other methods investigated in this research. According to the modifications made in this scheme, unlike other methods, there are no wiggles in the regions mentioned earlier. Furthermore, it is discovered that the AUSM+M method has a higher rate of convergence than the AUSM+ and SLAU approaches. In addition, the AUSM+M scheme is distinctive from other techniques in viscous flows because it produces the minimum kinetic energy dissipation rate and fewer shock anomalies in the shock wave region.

Keywords: AUSM scheme, Axisymmetric, Viscous flow, Compressible flow

مقدمه

در این روزها دینامیک سیالات محاسباتی^۱ به مهم‌ترین روش بررسی و تکنیک طراحی در هوانوردی و فضاوردی تبدیل شده است. با گسترش روزافزون استفاده از دینامیک سیالات محاسباتی قابلیت اطمینان در حل مسائل محاسباتی توجه بیشتری به خود جلب کرده است. قابلیت اطمینان در طرح‌های عددی نشان‌دهنده انعطاف‌پذیری و دقت حل است. در حوزه دینامیک سیالات محاسباتی طرح‌های بالادستی^۲ به دلیل سادگی در پیاده‌سازی و هزینه محاسباتی معقول در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر بالغ و غالب شده‌اند. اگرچه، بسیاری از تحقیقات انجام‌شده نشان می‌دهد که طرح‌های بالادستی در جریان مافوق صوت [۳-۱] و سرعت‌های بسیار پائین [۴، ۵] با مشکلاتی مواجه هستند. در نتیجه قابلیت اطمینان آن‌ها در شبیه‌سازی جریان تمام اعداد ماخ کاهش می‌یابد. بنابراین، هدف از توسعه بیشتر طرح‌های عددی پیشرفته افزایش انعطاف‌پذیری و بالا بردن دقت آن‌ها است. طرح‌های بالادستی به دودسته، تقسیم تفاضل شار^۳ و تقسیم بردار شار^۴ تقسیم می‌شوند. بر اساس ساختار امواج روش‌های تقسیم تفاضل شار را می‌توان به دو دسته، روش‌های کامل و غیر کامل مسئله ریمان تقسیم کرد. روش‌های کامل مسئله ریمان همانند روش حل دقیق مسئله ریمان دارای سه موج شامل دو موج غیرخطی و یک ناپیوستگی تماسی است. از نمایندگان این روش می‌توان روش‌های رو^۵ [۶]، اچ ال ال سی^۶ [۷] و اوشر^۷ [۸] نام برد. این روش‌ها به دلیل قابلیت حل دقیق در بخش‌هایی که پیوستگی تماسی، لایه‌مرزی و موج ضربه‌ای ثابت وجود دارد، به‌طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما روش‌های کامل در معرض مشکلات فاجعه‌آمیز مانند پدیده کربنسل^۸ [۱] یا ناپایداری موج ضربه‌ای در وسایل مافوق صوتی پیچیده، قرار می‌گیرند. بسیاری از تحقیق‌ها با هدف بهبود ناپایداری کربنسل شکل گرفته‌اند، که متداول‌ترین روش، اصلاح آنتروپی در طرح

رو است. اما تصحیح آنتروپی برای عملکرد بهتر (برای مثال تحقیق هارتن یی^۹ [۹] برای اصلاح آنتروپی) نیازمند ترم‌های آزمایشی مصنوعی است، که استحکام موج ضربه‌ای به انتخاب این پارامترها به شدت بستگی دارد و همچنین ممکن است دقت لایه‌مرزی را دچار مشکل کند [۲].

روش‌های غیر کامل مسئله ریمان به دلیل عدم وجود موج خطی از مدل موج با ضخامت بزرگ‌تر استفاده می‌کند، که منجر به پوشش بهتر ناپیوستگی و دقت آشفتگی می‌شود. بزرگ‌ترین ویژگی روش‌های غیر کامل قدرت آن‌ها در برابر ناپایداری کربنسل است و همچنین قادر به پیش‌بینی موج‌های ضربه‌ای بسیار قوی هستند. روش‌های غیر کامل شامل حل-کننده تقریبی ریمان دو موجی (اچ ال ال^{۱۰} [۹]) و حل‌کننده ریمان یک موجی (روسانوف^{۱۱} [۱۰]) است. مشکل عمده این روش‌ها دقت کم و نتیجه هموار در ناپیوستگی تماسی است.

روش‌های تقسیم بردار شار، پیچیدگی الگوریتمی چندانی ندارند و هزینه محاسباتی کمتری را بدون استفاده از ساختار ماتریسی پیچیده دارند. این روش‌ها عمدتاً شامل طرح‌های ون-لیر^{۱۲} [۱۱] و طرح استیگر-وارمینگ^{۱۳} [۱۲] است. مشابه با طرح‌های غیر کامل تفاضل بردار شار، روش تقسیم بردار شار نیز از پایداری خوبی در برابر موج ضربه‌ای برخوردار است اما نمی‌تواند ناپیوستگی تماسی را به‌خوبی پیش‌بینی کند.

لیو و استفان^{۱۴} [۱۳]، برای اولین بار دو گروه تقسیم تفاضل شار و تفاضل بردار شار را ترکیب و خانواده آسم^{۱۵} را پایه‌گذاری کرده‌اند. در این روش شار غیر لزج به دو سیستم مجزای فشاری و جابجایی تقسیم می‌شود. این روش مزیت و پایداری روش‌های تقسیم بردار شار در امواج ضربه‌ای و دقت روش‌های تقسیم تفاضل شار در ناپیوستگی تماسی را باهم دارد. به دلیل عملکرد بسیار مطلوب این روش با کمترین اتلافات و پایداری بسیار خوب آن در مواجهه با امواج ضربه‌ای، طرح‌های AUSM+ [۱۴]، AUSMPW+ [۱۵] و باقی خانواده آسم مطرح و توسعه پیدا کردند. با این حال همچنان طرح‌های

^۱ Computational Fluid Dynamics (CFD)

^۲ Upwind

^۳ Flux Difference Splitting (FDS)

^۴ Flux Vector Splitting (FVS)

^۵ Roe

^۶ HLLC

^۷ Osher

^۸ Carbuncle

^۹ Harten-Yee's

^{۱۰} HLL

^{۱۱} Rusanov

^{۱۲} van Leer

^{۱۳} Steger-Warming

^{۱۴} Liou and Steffen

^{۱۵} Advection Upstream Splitting Method (AUSM)

الف- توسعه طرح‌های خانواده آسم در میدان تراکم پذیر پایا دوبعدی تقارن محوری لزج و غیر لزج، در جریان‌های داخلی و خارجی
ب- مقایسه و موشکافی طرح‌های ذکر شده در راستای معرفی بهترین طرح عددی این خانواده در جریان لزج و غیر لزج
ج- در راستای بند ب در این پژوهش و در هر آزمایش طراحی شده قسمت‌های مختلف اتلافات عددی طرح‌های مطرح شده جهت تبیین ریشه‌های خطا و جواب‌های غیر فیزیکی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

معادلات

جریان در این پژوهش تراکم پذیر، تقارن محوری، غیر لزج و لزج است. معادلات حاکم بقای جرم، منتوم و انرژی هستند. مدل به کار رفته برای شبیه‌سازی آشفتگی مدل SST- $k-\omega$ است. معادلات حاکم به شکل بقایی در حالت تقارن-محوری به صورت کلی زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dE^I}{dx} + \frac{dF^I}{dy} + H^I = \frac{dE^V}{dx} + \frac{dF^V}{dy} + H^V \quad (1)$$

در معادلات فوق و کلیه معادلات x در جهت طول و y نشان-دهنده جهت شعاعی (به جای r) است. در این رابطه Q بردار متغیرهای بقایی، E^I و F^I بردارهای شار جابه‌جایی، H^I معرف شار جابه‌جایی تقارن محوری، E^V و F^V بردارهای شار لزج، H^V شار لزج تقارن محوری است و به شکل زیر تعریف می‌شوند [۱۸]:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} \quad E^I = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (\rho e + P)u \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$F^I = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (\rho e + P)v \end{pmatrix} \quad H^I = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (\rho e + P)v \end{pmatrix}$$

خانواده آسم از مشکلاتی رنج می‌برد. برای مثال طرح AUSM+ در برابر گرادیان‌های فشار در نزدیکی دیوار و نوسانات عددی در پشت امواج ضربه‌ای قوی آسیب‌پذیر است [۴]. علاوه بر این در طرح‌های خانواده آسم اگر در ناحیه موج ضربه‌ای شبکه محاسباتی کیفیت پائینی داشته باشد ممکن است در این ناحیه نوسانات ایجاد شود [۱۵].

لیو^{۱۶} [۴]، طرح AUSM+UP با اصلاحات روی ترم‌ها پخش فشاری و سرعت جهت این که در تمام رژیم‌های جریان با اعداد ماخ مختلف جواب‌های قابل قبولی ارائه دهد، مطرح کرد. اما این طرح دقت کافی در مقابله نوسانات موج ضربه‌ای ندارد و توزیع گرما در وسایل چندبعدی مافوق صوتی را به خوبی پیش‌بینی نمی‌کند. شیمان^{۱۷} و همکاران [۵]، نسخه اصلاح شده AUSM به نام SALU^{۱۸} که اتلاف کم و هیچ متغیر وابسته‌ای وجود ندارد، را معرفی کرد. اما طرح SALU ممکن است در مواجهه با امواج ضربه‌ای قوی وقتی سلول‌ها نسبت ابعادی زیادی داشته، دچار نوساناتی می‌شود [۳، ۱۶]. در این راستا چن^{۱۹} و همکاران [۱۷]، طرح AUSM+M جهت برطرف نمودن مشکلات موجود در روش‌های AUSM+UP و SLAU با اصلاحاتی روی ترم‌های اتلافی شار جرمی، شار فشاری و سرعت صوت مطرح کردند.

بررسی و تحلیل میدان‌های سرعت بالا تقارن محوری (اصلاح نگارش) به علت کاربرد در طراحی اجسام پرنده، ورودی‌ها و ... حائز اهمیت هستند، در این راستا و در این تحقیق مجموعه از آزمایش‌های مطرح تقارن محوری داخلی و خارجی لزج و غیر لزج طراحی و طرح‌های ذکر شده در آن واکاوی می‌شوند (اصلاح نگارش). همچنین در این پژوهش سه طرح از خانواده آسم در یک برنامه با ساختار سلول مبنا و تقارن محوری توسعه داده شده‌اند. برنامه تنظیم شده در زبان فرترن به صورت صریح در یک روند تکرار بر مبنای رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای و با استفاده از روش حجم محدود مقادیر مجهول معادلات بقا را گزارش می‌دهد.

بنابراین اهداف اصلی این پژوهش عبارت‌اند از:

^{۱۶} Liou
^{۱۷} Shima
^{۱۸} Simple low-dissipation AUSM
^{۱۹} Chen

μ_t ضریب لزجت آشفته است که در ادامه نحوه محاسبه آن ارائه می‌شود. هم‌چنین K ضریب انتقال حرارت بوده و به صورت رابطه (۶) محاسبه می‌گردد:

$$K = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \quad (۶)$$

در رابطه (۶) Pr معرف عدد پراتل است که برای هوا برابر 0.7 و Pr_t عدد پراتل آشفته است که برابر 0.9 فرض شده است. متغیر γ نسبت گرماهای ویژه است.

گسسته سازی معادلات حاکم

برای گسسته سازی معادلات حاکم، از یک شبکه بی‌سازمان و روش حجم محدود استفاده می‌شود. قسمت زمانی معادلات نیز طبق روش رانگ کوتا مرتبه ۴ به صورت صریح گسسته می‌شود. رابطه (۱) با گسسته سازی به روش حجم محدود به رابطه (۷) تبدیل می‌شود:

$$\frac{A_i}{\Delta t} \Delta Q_i + \sum_j S_{i,j} (K_{i,j} - G_{i,j}) + A_i (H^l - H^v) = 0 \quad (۷)$$

در رابطه (۷) A_i مساحت هر سلول، Δt گام زمانی، ΔQ_i تغییر مقادیر بقایی، $K_{i,j}$ شار غیر لزج عبوری از هر وجه، $G_{i,j}$ شار لزج عبوری از هر وجه، $S_{i,j}$ معرف بردار عمود بر وجه سلول، H^l شار غیر لزج تقارن محوری و H^v شار لزج تقارن-محوری است.

معادلات مدل آشفته‌گی $k-\omega SST$

مدل $k-\omega SST$ یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین مدل‌های آشفته‌گی است که به صورت گسترده در جریان‌های آیرودینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مدل، دو معادله انتقال برای دو متغیر k و ω ، که به صورت زیر تعریف می‌شوند نوشته می‌شود [۲۰]:

$$k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \overline{u_i^2} \quad (۸)$$

$$\omega = \frac{\mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}{\rho k}$$

$$E^V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + K \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$F^V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + K \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$H^V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{y} \right) \\ \tau_{yy} - \tau_{\theta\theta} - \frac{2}{3} \mu \frac{v}{y} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{y} \right) \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + K \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \frac{v^2}{y} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{v^2}{y} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{vu}{y} \right) \end{pmatrix}$$

که در رابطه (۲)، u و v مؤلفه‌های سرعت در جهات x و y ، P مشخصه فشار، ρ چگالی و e انرژی کل مخصوص سیال است. مقادیر تنش برشی نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\tau_{xx} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \rho k \quad (۳)$$

$$\tau_{yy} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \rho k$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left(-\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \frac{2}{3} \rho k$$

در رابطه (۳) k انرژی جنبشی آشفته‌گی و μ لزجت مولکولی است که از رابطه شبه تجربی ساترلند به صورت رابطه (۴) محاسبه می‌شود [۱۹]:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{T_0 + 110.4}{T + 110.4} \quad (۴)$$

برای جریان آشفته لزجت مؤثر طبق رابطه (۵)، با ترکیبی از لزجت مولکولی و لزجت آشفته‌گی که از مدل آشفته‌گی استخراج می‌شود حاصل می‌گردد:

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \quad (۵)$$

برای تابع ترکیب بر اساس فاصله از نزدیک‌ترین دیوار به صورت رابطه (۱۳) است:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (13)$$

که عبارت \arg در رابطه (۱۳) طبق رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود:

$$\arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{y^2\omega\rho} \right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}y^2} \right] \quad (14)$$

در رابطه (۱۴) y فاصله از نزدیک‌ترین دیوار است. همچنین عبارت $CD_{k\omega}$ طبق رابطه (۱۵) به دست می‌آید:

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (15)$$

پس از حل معادلات انتقال مربوط به معادلات آشفتگی مقدار لزجت آشفتگی (μ_t) محاسبه می‌شود. در مدل $k-\omega SST$ مقدار لزجت آشفتگی با استفاده از یک محدودکننده طبق رابطه (۱۶) به دست می‌آید [۲۱]:

$$\mu_t = \frac{0.31\rho k}{\max(0.31\omega, \Omega F_2)} \quad (16)$$

Ω در رابطه (۱۶) بیانگر اندازه گردابه در هر نقطه است که به صورت رابطه (۱۷) محاسبه می‌گردد:

$$\Omega = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \quad (17)$$

F_2 نیز همانند F_1 ، یک تابع ترکیب است تحت رابطه (۱۸) تعریف می‌گردد:

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2) \quad (18)$$

$$\arg_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{y^2\omega\rho} \right)$$

شرح خانواده آسم

به‌طور کلی شار عددی در خانواده آسم طبق رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود [۱۷]:

ω معرف فرکانس آشفتگی، u_i' مقادیر نوسانی سرعت را نشان می‌دهد. معادله انتقال k در مدل $k-\omega SST$ در فرم تانسوری، به صورت رابطه (۹) نوشته می‌شود [۲۱]:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P_k - \beta^* \rho \omega k \quad (9)$$

در رابطه (۹) P_k بیان‌گر میزان تولید انرژی جنبشی آشفتگی، ناشی از اندرکنش میان جریان متوسط و میدان جریان آشفته است که به صورت رابطه (۱۰) است:

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (10)$$

ترم $\beta^* \rho \omega k$ در معادله (۹)، میزان استهلاک انرژی جنبشی آشفتگی را نشان می‌دهد. معادله انتقال برای متغیر ω نیز در فرم تانسوری به صورت رابطه (۱۱) است [۲۱]:

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i \omega) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) + \frac{\rho \gamma}{\mu_t} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 2\rho(1-F_1)\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \rho \beta \omega^2 \quad (11)$$

ثوابت موجود در این معادلات از طریق رابطه خطی (۱۲) محاسبه می‌گردند:

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1-F_1) \phi_2 \quad (12)$$

که در رابطه (۱۲)، ثوابت ϕ_1 مربوط به مدل $k-\omega$ است و می‌تواند مقادیر زیر باشد:

$$\phi_{k1} = 0.85, \phi_{\omega 1} = 0.5, \beta_1 = 0.075, \beta^* = 0.09, \gamma_1 = \frac{5}{9}$$

و ثوابت ϕ_2 که مربوط به مدل $k-\varepsilon$ است نیز به صورت زیر است:

$$\phi_{k1} = 1.0, \phi_{\omega 1} = 0.856, \beta_1 = 0.0828, \beta^* = 0.09, \gamma_1 = 0.44$$

محاسبه درست تابع ترکیب F_1 در مدل $k-\omega SST$ نقش اساسی در مدل‌سازی صحیح آشفتگی دارد. رابطه ارائه‌شده

طرح SLAU

در طرح SLAU شار جرمی طبق رابطه (۲۳) محاسبه می‌گردد:

$$\dot{m} = \frac{1}{2}(\rho_L(V_{nL} + |\bar{V}_n|^+) + \rho_R(V_{nR} + |\bar{V}_n|^-)) - \frac{x}{c} \Delta P \quad (23)$$

در این طرح ترم p_s در شار فشاری رابطه (۱۹) به صورت رابطه (۲۴) حاصل می‌شود:

$$P = \frac{P_L + P_R}{2} + \frac{P^+|_{\alpha=0} - P^-|_{\alpha=0}}{2}(P_L - P_R) + (1-X) \times \left(P^+|_{\alpha=0} - P^-|_{\alpha=0} - 1 \right) \frac{(P_L - P_R)}{2} \quad (24)$$

جزئیات محاسبه ترم‌های $P^+|_{\alpha=0}$, $P^-|_{\alpha=0}$, $|\bar{V}_n|^+$, $|\bar{V}_n|^-$ در [۵] ارائه شده است.

طرح AUSM+M

این روش در واقع اصلاحی بر طرح AUSM+UP است، که روابط (۲۵) جهت محاسبه شار جرمی است همچنین جزئیات دقیق این روابط در مرجع [۱۷] قابل پیگیری است:

$$M_{\frac{1}{2}} = M^+ + M^- + M_p$$

$$M^{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|) & , |M| \geq 1 \\ \pm \frac{1}{4}(M+1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2-1)^2 & , |M| < 1 \end{cases}$$

$$M_p = -\frac{1}{2}(1-f) \frac{\Delta p}{\rho_1 c_1^2 \frac{1}{2}}, \quad (25)$$

$$\Delta p = p_R - p_L, \\ f = \frac{1 - \cos(\pi M)}{2},$$

$$M = \min(1, \max(|M_L|, |M_R|))$$

برای محاسبه شار جرمی در این طرح طبق رابطه (۲۶) عمل می‌شود:

$$K_{i,j} = \frac{\dot{m}^+ |\dot{m}^+|}{2} \Phi_L + \frac{\dot{m}^- |\dot{m}^-|}{2} \Phi_R + P_{\frac{1}{2}}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ h \end{bmatrix}, P_{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_s \cdot n_x \\ p_s \cdot n_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\dot{m} = M_{\frac{1}{2}} c_{\frac{1}{2}} \begin{cases} \rho_L, M_{\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \rho_R, M_{\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}$$

در رابطه (۱۹)، \dot{m} شار جرمی، $P_{\frac{1}{2}}$ شار فشاری، $c_{\frac{1}{2}}$ سرعت صوت عددی و $M_{\frac{1}{2}}$ عدد ماخ هر وجه سلول است.

طرح AUSM+

در طرح AUSM+ مقدار $M_{\frac{1}{2}}$ در رابطه (۱۹) به صورت رابطه (۲۰) محاسبه می‌گردد:

$$M_{\frac{1}{2}} = M^+ + M^-$$

$$M^{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|) & , |M| \geq 1 \\ \pm \frac{1}{4}(M+1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2-1)^2 & , |M| < 1 \end{cases} \quad (20)$$

همچنین در این طرح عبارت p_s در شار فشاری رابطه (۱۹) تحت رابطه (۲۱) به دست خواهد آمد:

$$p_s = P^+ + P^-$$

$$P^{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 (2 \mp M) \pm \frac{3}{16} M (M^2 - 1)^2 & |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(M)) & |M| > 1 \end{cases} \quad (21)$$

برای محاسبه $c_{\frac{1}{2}}$ از رابطه (۲۲) در این طرح استفاده می‌شود:

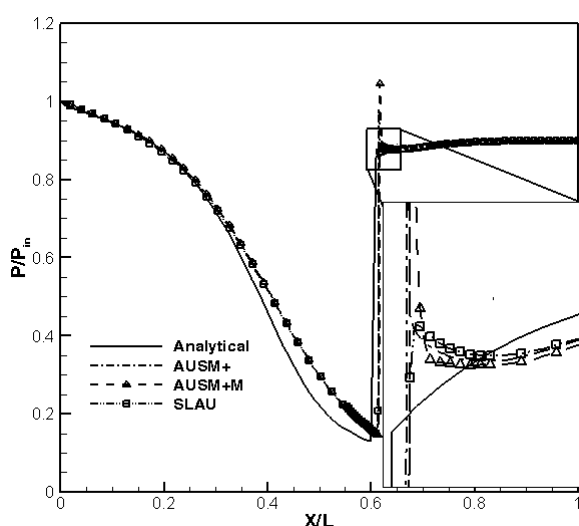
$$c_{\frac{1}{2}} = \min(c_L, c_R)$$

$$c_{L/R} = c^* / \max(c^*, |V_n|) \quad (22)$$

$$c^* = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)} h$$

جزئیات بیشتر این طرح در مرجع [۱۴] مطرح شده است.

می تواند منتج به پاسخ های بهتری در محاسبه فشار شود، لازم به ذکر است که این روش به همراه روش AUSM+ نوساناتی را در پیش بینی امواج ضربه ای دارند. روش AUSM+M در محاسبه ترم شار فشاری و جرمی همانند روش های مرتبه بالاتر برای محاسبه شار از سلول های همسایه بهره می برد، بنابراین دقت بالاتری در پیش بینی موج تراکمی دارد، هرچند در محل رخداد امواج تراکمی نوساناتی قابل مشاهده است. روش AUSM+ نیز به دلیل اتلافات پراشی در ترم فشاری دارای نوسانات در محل موج تراکمی دارد.



شکل ۳- مقایسه توزیع فشار بی بعد روش های AUSM+، AUSM+M و SLAU با نتایج تحلیلی

شکل ۴، توزیع دما بی بعد روی خط محوری نازل همگرا-واگرا حاوی موج ضربه ای برای روش های AUSM+، AUSM+M و SLAU به همراه جواب تحلیلی مسئله را نشان می دهد. در توزیع دما نیز دو روش AUSM+M و AUSM+ دچار نوسان بعد از موج ضربه ای می شوند. اما روش SLAU به دلیل اینکه در شار جرمی از روش HSUS استفاده می کند [۵] که برمبنای روش رو است (از خصوصیات ذاتی روش های تجزیه اختلاف بردار شار دقت بالا در پیش بینی موج ضربه ای است)، بعلاوه اینکه در این روش از تعریف عدد ماخ چندبعدی به جای عدد ماخ یک بعدی در تنظیم بخش های اتلافی استفاده می شود، بنابراین بعد از موج ضربه ای دچار نوسان نمی شود و در این زمینه به نسبت دو روش دیگر بهتر عمل می کند. روش AUSM+ نیز به علت عدم تناسب کافی در ترم اتلافی

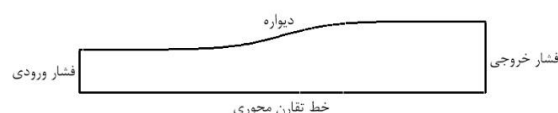
انتخاب شده با توجه به آزمایش های انجام شده در شبکه ها با اندازه سلول مختلف جهت بهترین دقت نتایج و به صرفه ترین شبکه از لحاظ هزینه محاسباتی انتخاب شده است.

نازل همگرا-واگرا

آزمایش اول برای نازل همگرا-واگرا تقارن محوری حاوی موج ضربه ای انجام شده است. تا توانمندی این خانواده برای بررسی موج ضربه ای در حالت تقارن محوری جریان داخلی مورد بررسی قرار گیرد. رابطه (۲۷) مساحت تابعی از طول نازل همگرا-واگرا را نشان می دهد:

$$A(x) = 1.398 + 0.347 \tanh(0.8x - 4) \quad (27)$$

در شکل ۲، شماتیکی از نازل همگرا-واگرا به همراه شرایط مرزی نشان داده است. در این مسئله جریان غیر لزج، ناپایا و تقارن محوری فرض شده است.

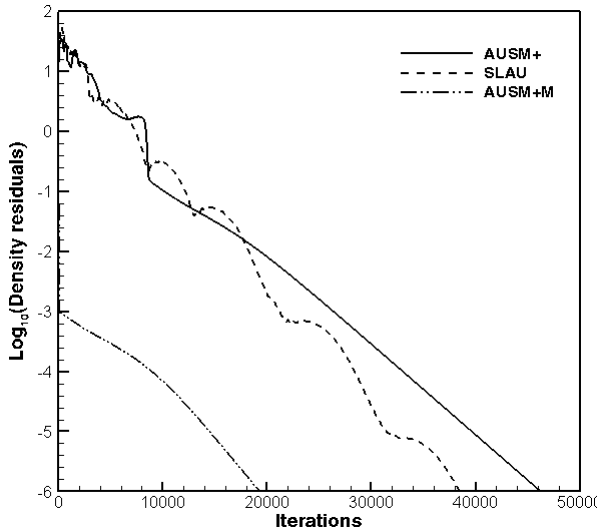


شکل ۲- شماتیک نازل همگرا - واگرا به همراه شرایط مرزی

طول نازل ۱۰ متر و ۱۰۰ سلول در جهت عمودی و ۲۵۰ سلول در جهت افقی برای شبکه بندی در نظر گرفته شده است. همچنین در ورودی نازل دمای کل برابر ۲۹۸/۱۵ درجه کلوین، فشار کل ۱۰۱۳۲۵ پاسکال و عدد ماخ ۱ در نظر گرفته شده و برای خروجی فشار ۴۸۱۴۵ پاسکال اعمال شده است.

شکل ۳، نمودار فشار بی بعد روی خط محوری از نتایج برنامه تدوین شده با سه طرح خانواده AUSM به همراه جواب تحلیلی نمایش داده شده است. درصد خطا نتایج سه طرح AUSM+، AUSM+M و SLAU با نتیجه حل تحلیلی به دست آمده به ترتیب ۵/۹، ۴/۵ و ۹/۴ درصد اختلاف دارد. از مقایسه سه طرح مشخص می شود روش AUSM+M موج ضربه ای را به لحاظ تیزی^{۲۰} و محل رخداد آن با دقت بهتری نسبت به سایر روش های مطرح شده پیش بینی می کند، زیرا با توجه به رابطه (۲۶) در محاسبه اتلاف های مرتبط با شار فشاری تابع g معرفی شده به دلیل کمینه کردن گرادینان شار فشاری

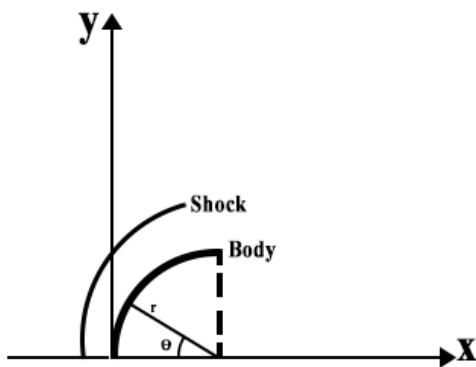
^{۲۰} Sharpness



شکل ۵- مقایسه نمودار همگرایی در مسئله نازل همگرا-واگرا

جریان غیر لزج حول کره

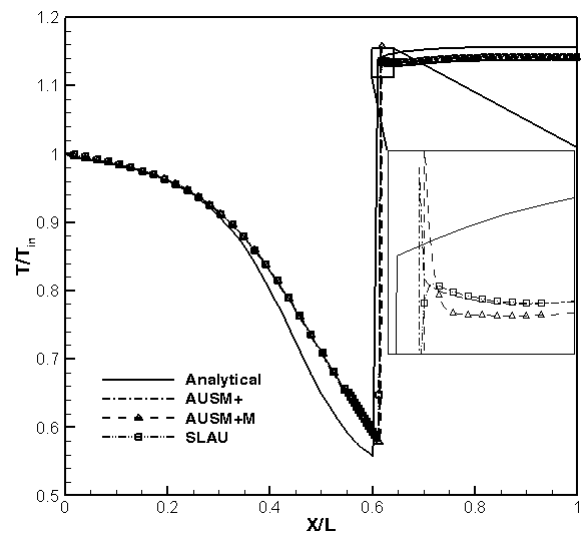
جهت بررسی جریان متقارن محوری خارجی و مقایسه خانواده آسم، جریان مافوق صوت با عدد ماخ ۲ حول دماغه به شکل کره مورد بررسی قرار گرفته است. همان طور که در شکل ۶، نشان داده شده است هندسه مورد بررسی کره‌ای به شعاع ۱ متر که نسبت به طول مرجع بی بعد سازی شده است. شرایط جریان بر طبق داده‌های نتایج تجربی در مرجع [۲۳] در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۶- نمایی از هندسه دماغه کروی مورد بررسی در حل جریان

برای شبکه‌بندی حول دماغه کروی شبکه‌ای به اندازه 300×600 سلول استفاده شده است. همچنین شرایط مرزی مورد استفاده را در شکل ۷، می‌توانید مشاهده کنید.

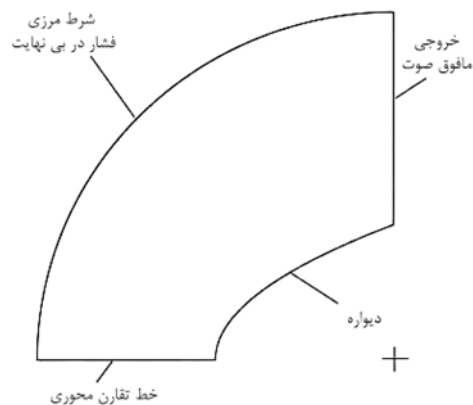
فشاری نوساناتی را در ناحیه موج تراکمی دارد. به دلیل استفاده از روابط آیزنتروپیک برای به دست آوردن جواب تحلیلی از آنجاکه در این روابط جریان یک‌بعدی فرض می‌شود و اثرات تغییر مساحت ناگهانی اعمال نمی‌شود اختلاف بین جواب تحلیلی و نتایج عددی در قبل از موج ضربه‌ای، و در محلی که اختلاف مساحت زیاد است، شکل می‌گیرد. یکی دیگر از منشأهای خطا و اختلاف در نمودارهای ارائه شده بعد از محل موج ضربه‌ای با جواب تحلیلی گسسته سازی مکانی مرتبه اول بالادستی است و این خود می‌تواند منجر به نتایج هموار شده شود.



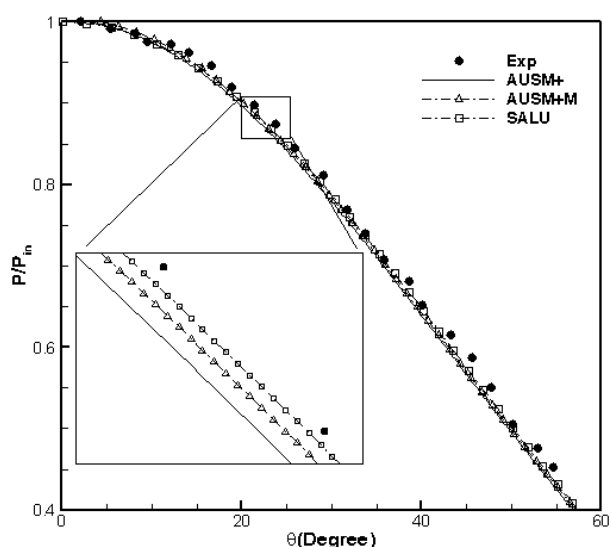
شکل ۴- مقایسه توزیع دما بی بعد روش‌های AUSM+، AUSM+M و SLAU با نتایج تحلیلی

در شکل ۵، نمودار باقی مانده چگالی میدان بر حسب تعداد تکرار برای سه طرح مورد بررسی در نازل همگرا-واگرا نشان می‌دهد. دو طرح AUSM+ و SLAU به دلیل وجود موج ضربه‌ای باقی مانده‌های چگالی با سرعت کمتر و با چند بار بالا زدن کاهش پیدا می‌کنند در مقابل طرح AUSM+M به علت پیمایش سلول‌های همسایه و محاسبه کمینه گرادیان حاصله در سلول‌های همسایه و تزریق مناسب آن با کمک تابع f در رابطه (۲۵) می‌تواند نرخ همگرایی را در سرعت‌های بالا به مقدار قابل توجهی کاهش دهد. همچنین روش SLAU نسبت به روش AUSM+ به علت استفاده از سرعت‌های چندبعدی در محاسبه اتلافات فشاری می‌تواند در محل گرادیان‌های شدید موفق‌تر باشد.

در شکل ۹، مقدار فشار بی‌بعد روی سطح کره برای سه طرح خانواده آسم ذکر شده با مقدار متناظر آن در مورد نمونه مرجع [۲۳] مقایسه شده‌اند. با توجه به شکل ۹، در پیش‌بینی مقدار فشار روی سطح کره دو روش AUSM+M و SLAU دقت بهتری از دو روش دیگر دارند. روش AUSM+ ضعیف‌تری به دلیل ضعف در محاسبه ترم فشاری از خود نشان می‌دهند. لازم به ذکر است در رابطه (۲۵) ذکر شده در روش AUSM+M برای محاسبه شار فشاری در وجه مورد بررسی، وجوه همسایه نیز جاروب می‌شود و کمینه‌گرادیان فشار طی یک تابع هموار شده وارد میدان حل می‌شود.



شکل ۷- شرایط مرزی مورد استفاده برای تحلیل جریان خارجی تقارن محوری

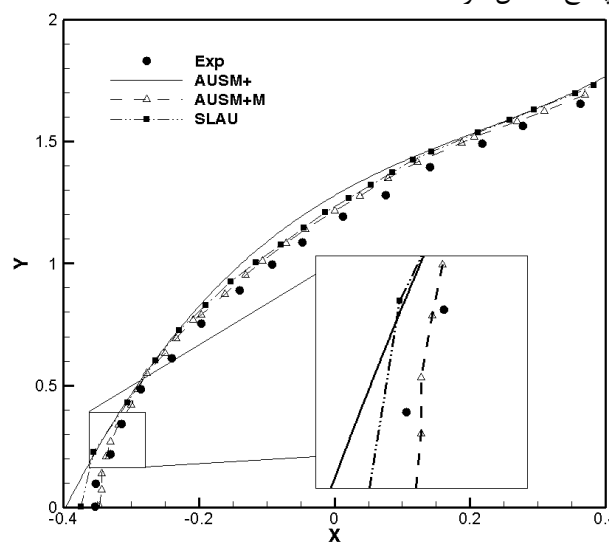


شکل ۹- مقایسه نمودار فشار روی سطح در روش‌های AUSM+، AUSM+M و SLAU با نتایج تجربی مرجع [۲۳]

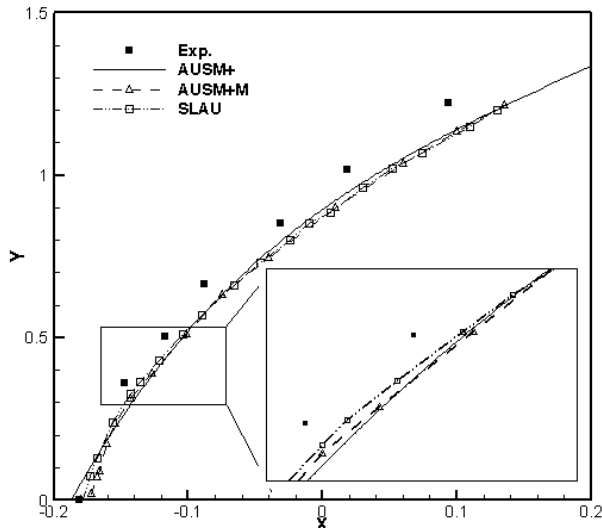
جریان غیر لزج حول دماغه سرپخ

سومین مسئله مورد بررسی، تحلیل جریان حول دماغه سرپخ است که هندسه آن در شکل ۱۰، نشان داده شده است. در این هندسه زاویه سرپخ برابر ۶۰ درجه و نسبت $\frac{R_n}{R_b} = 0.25$ است. شرایط جریان بر طبق داده‌های تجربی مرجع [۲۴] در نظر گرفته شده‌اند. شبکه مورد استفاده برای حل جریان در این آزمایش شبکه‌ای حاوی ۳۰۰ در ۶۰۰ سلول است و شرایط مرزی مورد استفاده طبق شکل ۶ است. نتایج عددی برای سه طرح از خانواده آسم استخراج شده و تأثیرات این روش‌ها در شبیه‌سازی جریان مورد بررسی قرار گرفتند. عدد ماخ جریان آزاد در این تحلیل ۲/۹۶ است.

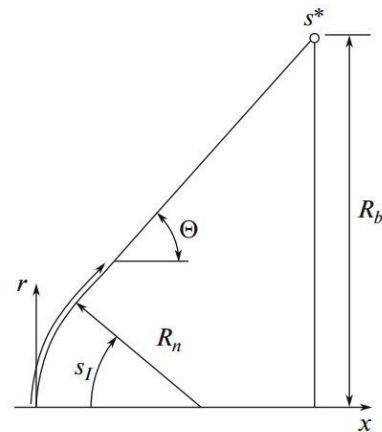
برای ارزیابی صحت و دقت حل، محل دقیق موج ضربه‌ای حل متقارن محوری حاصل از روش‌های AUSM+، AUSM+M و SLAU با نتایج در مرجع [۲۳] در شکل ۸، مقایسه شده‌اند. درصد خطا طرح‌های AUSM+، SLAU و AUSM+M با نتایج تجربی در پیش‌بینی موج ضربه‌ای به ترتیب ۳/۲، ۲/۲ و ۱/۴ درصد است. در جریان خارجی تقارن محوری نیز روش AUSM+ نسبت به سایر روش‌ها دقت بهتری را از خود در نشان دادن محل موج ضربه‌ای ارائه می‌دهد که دلیل آن، تابع f معرفی شده در رابطه (۲۵) در راستای هوشمندانه‌تر کردن اتلافات مرتبط با شار جرمی و تعریف دقیق سرعت صوت منجر به این شده است که با از دست دادن کمترین میزان دقت و با تزریق صحیح اتلافات عددی بهترین پاسخ حاصل گردد.



شکل ۸- مقایسه محل موج ضربه‌ای در روش‌های AUSM+، AUSM+M و SLAU با نتایج تجربی مرجع [۲۳]



شکل ۱۱- مقایسه محل موج ضربه‌ای در روش‌های AUSM+، AUSM+M و SLAU با نتایج تجربی مرجع [۲۴]



شکل ۱۰- نمایی از هندسه دماغه سرپخ کروی مورد بررسی

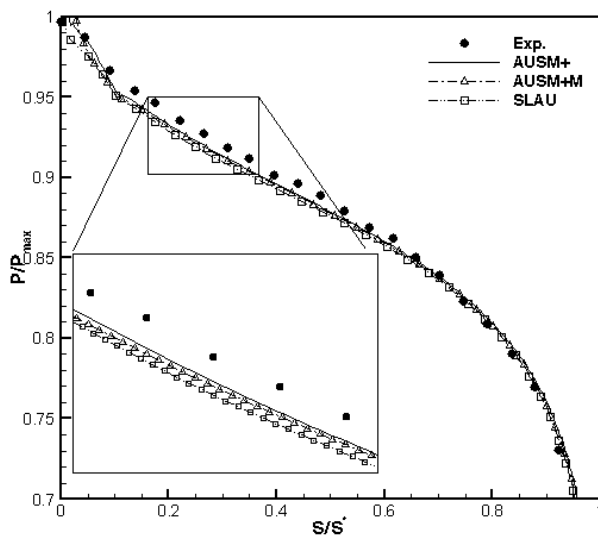
در شکل ۱۱، به مقایسه محل موج ضربه‌ای حل متقارن-محوری حاصل از روش‌های AUSM+، و SLAU با نتایج در مرجع [۲۴] پرداخته شده‌اند. در پیش‌بینی محل موج ضربه‌ای در این هندسه روش SLAU و AUSM+M برخلاف روش دیگر به خاطر اصلاحات انجام شده در این دو روش جهت بهینه کردن اتلافات شاری توانسته‌اند محل موج ضربه‌ای را بهتر پیش‌بینی کنند. طرح AUSM+M در مقایسه با نتیجه آزمایشی در پیش‌بینی محل موج ضربه‌ای ۱/۵ درصد اختلاف دارد و دو طرح SLAU و AUSM+ به ترتیب ۱/۹ و ۲/۶ درصد اختلاف دارد.

نمودار شکل ۱۲، مقدار فشار بی‌بعد روی سطح دماغه سرپخ برای سه طرح AUSM+، AUSM+M و SLAU با مقدار متناظر آن در مورد نمونه مرجع [۲۴] مقایسه شده‌اند. با توجه به این شکل تفاوت فاحشی بین نتایج در طرح‌های عددی مختلف مشاهده نمی‌شود. درصد خطا طرح‌های AUSM+، SLAU و AUSM+M با فشار بی‌بعد تجربی به ترتیب ۰/۸، ۱/۱ و ۰/۸۲ درصد می‌باشد. هرچند روش AUSM+M به دلایل زیر توانسته است تا در محاسبه فشار بی‌بعد شده نتایج نسبتاً بهتری را ارائه دهد:

الف- تعریف دقیق سرعت صوت

ب- کمینه کردن اتلافات عددی در سرعت‌های پایین

ج- معرفی یک تابع جدید در محاسبه گرادیان‌های فشار بر مبنای کمینه کردن نسبت فشار در جوه مورد بررسی



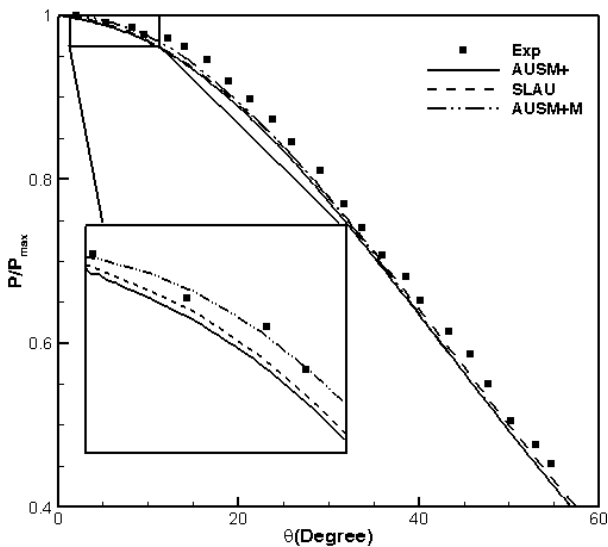
شکل ۱۲- مقایسه نمودار فشار روی سطح در روش‌های AUSM+، AUSM+M و SLAU با نتایج تجربی مرجع [۲۴]

در شکل ۱۳، به مقایسه کانتورهای فشار در سه طرح AUSM+، AUSM+M و SLAU پرداخته شده است که مشاهده می‌شود طرح AUSM+M در مقایسه با دو طرح دیگر لرزش‌های غیر فیزیکی فشار در نزدیکی دیواره که یک پدیده نامطلوب است از بین می‌برد. اصلاح شار فشاری (رابطه ۲۷) در طرح AUSM+M برای شبیه‌سازی جریان سرعت پائین و اضمحلال لرزش‌های غیر فیزیکی فشار نزدیک دیواره در جریان‌های مافوق صوت مؤثر است. به عبارت دقیق‌تر مدیریت دقیق بخش‌های اتلافی در سرعت‌های پایین در تزریق به موقع و

جریان لزج حول کره

به منظور بررسی جریان تقارن محوری لزج و مقایسه خانواده آسم در این جریان، جریان حول کره با شعاع ۱ که نسبت به طول مرجع بی بعد شده است و عدد ماخ جریان برابر ۲ و عدد رینولدز 9.6×10^5 طبق داده‌های نتایج تجربی در مرجع [۲۳] در نظر گرفته شده‌اند. مدل توربولانسی استفاده شده برای این مسئله مدل $k-\omega SST$ است.

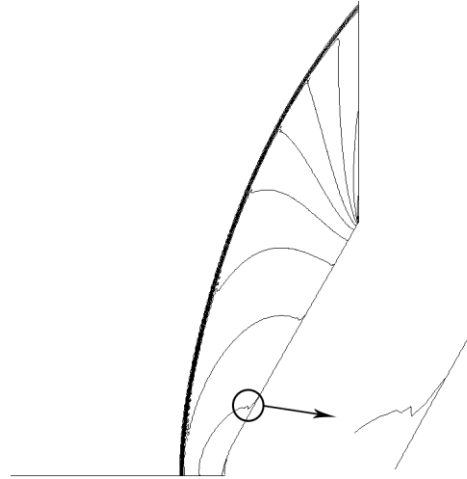
در شکل ۱۴، نمودار نسبت فشار به بیشینه فشار روی سطح کره برای سه طرح مورد بررسی و نتیجه تجربی در مرجع [۲۳] نشان می‌دهد. طبق نتایج به دست آمده درصد اختلاف نتایج طرح‌های SLAU, AUSM+ و AUSM+M با فشار بی بعد تجربی به ترتیب ۲/۲، ۲ و ۱/۴ درصد اختلاف دارد. همان طور که پیداست طرح AUSM+M توانسته است نسبت به دو طرح دیگر جواب نزدیک‌تر به نتایج تجربی بدهد. کنترل بخش‌های اتلافی در جریان غیرلزج و در طرح عددی AUSM+M به واسطه استراتژی بیان شده در بخش‌های پیشین منتج به آلودگی عددی کمتر در میدان لزج شده است. در واقع لزج‌های مصنوعی عددی کمترین تأثیر و تداخل را با لزجت حقیقی میدان دارند.



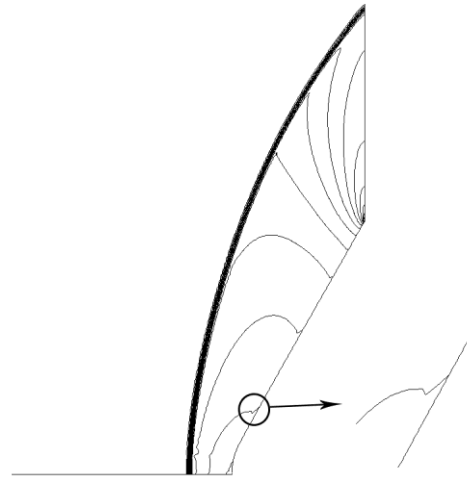
شکل ۱۴- نمودار نسبت فشار به بیشینه فشار روی سطح کره جریان لزج

شکل ۱۵، نرخ اتلاف انرژی جنبشی (ϵ) در سه طرح از خانواده آسم مورد بررسی را روی خط محوری در نزدیکی کره محلی که موج ضربه‌ای رخ می‌دهد نشان می‌دهد، این آزمایش

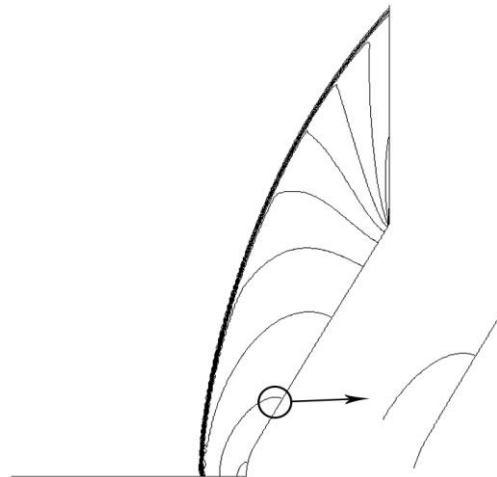
به جای اتلافات عددی می‌تواند در سرعت‌های بالا نیز به جواب‌های مبرا از آلودگی عددی منتهی شود.



(الف)

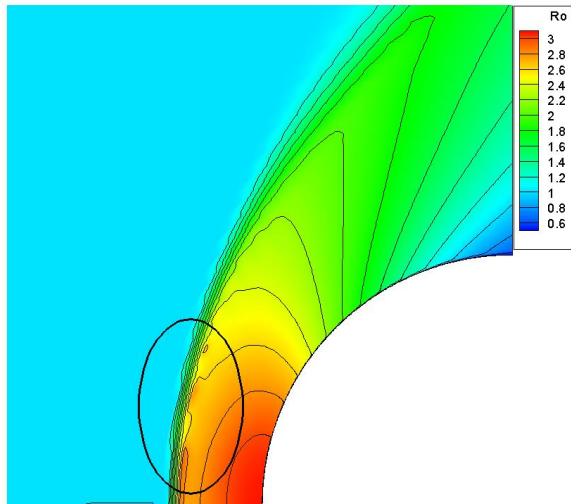


(ب)

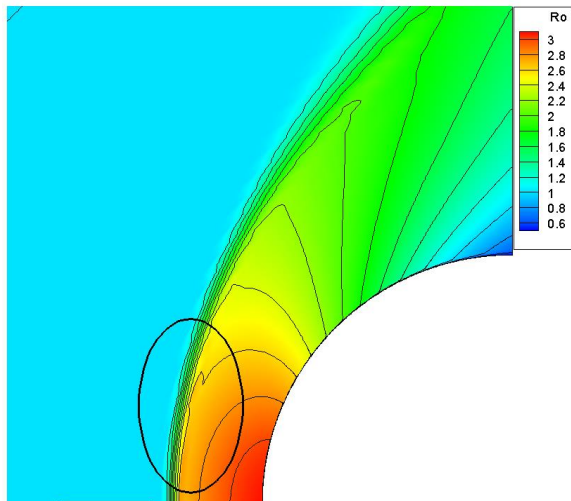


(پ)

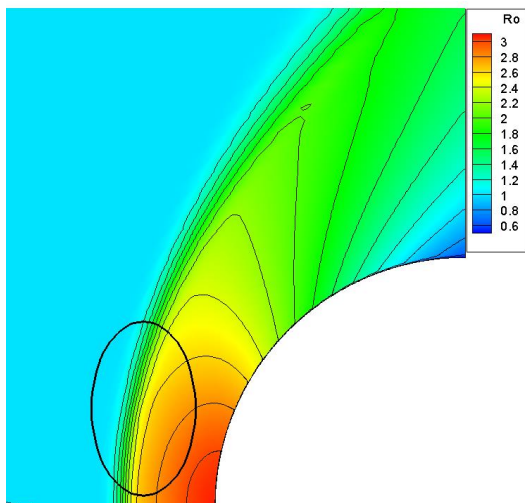
شکل ۱۳- مقایسه کانور فشار دماغه سربخ (الف) طرح AUSM+ (ب) طرح SLAU (پ) طرح AUSM+M



(الف)



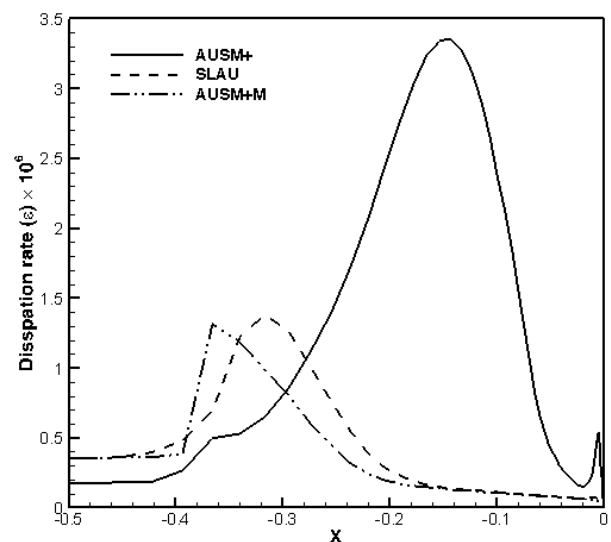
(ب)



(پ)

شکل ۱۶- کانتور چگالی سه طرح مورد بررسی برای جریان لزج حول کره الف) AUSM+ (ب) SLAU (پ) AUSM+M

می تواند به عنوان شاخص دیگری جهت سنجش تأثیر میزان اتلافات غیر لزج بر پارامترهای لزجی باشد، لذا با توجه به شکل ۱۴، و از آنجا که معین گردید روش AUSM+M بهترین عملکرد ممکن را دارد، این مطلب در شکل ۱۵، نیز به طور کامل تأیید می شود همان طور که در این شکل (شکل ۱۵) مشاهده می شود روش های SLAU و AUSM+M میزان کمتری بر بخش اتلاف انرژی جنبشی مؤثر هستند، از سوی دیگر روش AUSM+ به علت عدم مقایسه دهی مناسب در ترم های اتلافی شار فشاری میزان زیادی از نرخ اتلاف انرژی جنبشی را گزارش می دهد.



شکل ۱۵- نرخ اتلاف انرژی جنبشی روی خط محوری در محل موج ضربه ای

شکل ۱۶، کانتور چگالی برای سه طرح AUSM+، SLAU و AUSM+M را نشان می دهد. طبق کانتور چگالی طرح AUSM+M هیچ نوسانی در محدوده موج ضربه ای تولید نمی کند اما دو روش دیگر در این ناحیه حاوی نوسانات است. طبق شکل ۱۶ الف) طرح AUSM+ دچار نوسانات بیشتری در محدوده موج ضربه ای به نسبت طرح SLAU می شود. لرزش های معین شده در این شکل از منابع خطای عددی مستخرج می شوند و کاهش (عدم) رخداد این لرزش ها گواهی بر انعطاف پذیری و قدرتمندی طرح عددی در محل گردایان های شدید است.

for Godunov-type schemes against carbuncle phenomenon," *Journal of Computational Physics*, vol. 373, pp. 662-672, 2018.

- [۴] M.-S. Liou, "A sequel to AUSM, Part II: AUSM+_{up} for all speeds," *Journal of Computational Physics*, vol. 214, no. 1, pp. 137-170, 2006.
- [۵] E. Shima and K. Kitamura, "Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds," *AIAA Journal*, vol. 49, no. 8, pp. 1693-1709, 2011.
- [۶] P. L. Roe, "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes," *Journal of computational Physics*, vol. 43, no. 2, pp. 357-372, 1981.
- [۷] E. F. Toro, M. Spruce and W. Speares, "Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver," *Shock Waves*, vol. 4, no. 1, pp. 25-34, 1994.
- [۸] S. Osher and F. Solomon, "Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws," *Mathematics of Computation*, vol. 38, no. 158, pp. 339-374, 1982.
- [۹] A. Harten, P. D. Lax and B. V. Leer, "On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws," *SIAM review*, vol. 25, no. 1, pp. 35-61, 1983.
- [۱۰] V. V. E. Rusanov, *Calculation of Interaction of Non-Steady Shock Waves with Obstacles*. NRC, Division of Mechanical Engineering, 1962.
- [۱۱] B. V. Leer, "Flux-vector splitting for the Euler equation," in *Upwind and High-Resolution Schemes: Springer*, pp. 80-89, 1997.
- [۱۲] J. L. Steger and R. Warming, "Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods," *Journal of Computational Physics*, vol. 40, no. 2, pp. 263-293, 1981.
- [۱۳] M.-S. Liou and C. J. Steffen Jr, "A new flux splitting scheme," *Journal of Computational physics*, vol. 107, no. 1, pp. 23-39, 1993.

نتیجه گیری

در بررسی‌های صورت گرفته در جریان‌های غیرلزج طرح AUSM+M به دلیل اصلاحات صورت گرفته در ترم‌های شار جرمی و فشار نرخ همگرایی بالاتر و توانایی پیش بینی بهتر موج ضربه‌ای نسبت به دو طرح AUSM+ و SLAU دارد. در جریان‌های داخلی بعد از موج ضربه‌ای طرح AUSM+ دچار نوسانات می‌شوند. در جریان‌های خارجی با سرعت بالا در نزدیکی دیواره کانورتور فشار دو طرح AUSM+ و SLAU دچار نوسان می‌شوند اما طرح AUSM+M با بهبود اتلافات شار فشاری این نوسانات عددی موجود در طرح‌های قبلی را از بین می‌برد. در جریان‌های لزج معین گردید که روش AUSM+M نرخ اتلافات انرژی جنبشی پایین‌تری از سایر روش‌های مطالعه شده تولید می‌کند که باعث دقیق‌تر شدن جواب‌ها در جریان‌های لزج می‌شود، همچنین در جریان‌های فراصوتی لزج هنگام برخورد با موج ضربه‌ای کانورتور چگالی طرح AUSM+M برخلاف دو روش AUSM+ و SLAU نوسانات عددی موجود را به‌طور کل از بین می‌برد. به‌طور کل طرح AUSM+M توانسته است با اصلاحات در ترم‌های شار جرمی و فشاری بهترین نتایج و با کمترین خطاهای عددی و نوسانات گزارش کند.

بنابراین اگر معیارهای دقت در محل گرادینان‌های شدید و در محاسبه ترم‌های مختلف و نرخ همگرایی به‌عنوان المان‌های اصلی تعیین بهترین طرح عددی در نظر گرفته شوند طرح عددی AUSM+M و بعدازآن طرح SLAU بهترین عملکرد را در میدان‌های تقارن محوری داخلی و خارجی ارائه می‌دهد.

منابع و مراجع

- [۱] K. Peery and S. Imlay, "Blunt-body flow simulations," in *24th Joint Propulsion Conference*, 1988, pp. 88-2924.
- [۲] S.-s. Kim, C. Kim, O.-H. Rho and S. K. Hong, "Cures for the shock instability: development of a shock-stable Roe scheme," *Journal of Computational Physics*, vol. 185, no. 2, pp. 342-374, 2003.
- [۳] S.-s. Chen, C. Yan, B.-x. Lin, L.-y. Liu, and J. Yu, "Affordable shock-stable item

- Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson education, 2007.
- [۲۱] F. R. Menter, "Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications," *AIAA Journal*, vol. 32, no. 8, pp. 1598-1605, 1994.
- [۲۲] A. Jameson, W. Schmidt and E. Turkel, "Numerical solution of the euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta Time stepping schemes," *AIAA Paper*, vol. 81, 07/01 1981.
- [۲۳] O. BELOTSEKOVSKIY, "Supersonic gas flow around blunt bodies," *Computer Center of The Academy of Sciences, Moscow*, 1967.
- [۲۴] J. C. South, *Calculation of Axisymmetric Supersonic Flow Past Blunt Bodies with Sonic Corners: Including a Program Description and Listing*. National Aeronautics and Space Administration, 1968.
- [۱۴] M.-S. Liou, "A sequel to ausm: Ausm+," *Journal of Computational Physics*, vol. 129, no. 2, pp. 364-382, 1996.
- [۱۵] K. H. Kim, C. Kim and O.-H. Rho, "Methods for the accurate computations of hypersonic flows: I. AUSMPW+ scheme," *Journal of Computational Physics*, vol. 174, no. 1, pp. 38-80, 2001.
- [۱۶] K. Chakravarthy and D. Chakraborty, "Modified SLAU2 scheme with enhanced shock stability," *Computers & Fluids*, vol. 100, pp. 176-184, 2014.
- [۱۷] S.-s. Chen, F.-j. Cai, H.-c. Xue, N. Wang, and C. Yan, "An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 77, pp. 1065-1081, 2020.
- [۱۸] K. A. Hoffmann and S. T. Chiang, *Computational Fluid Dynamics Volume III* (Engineering education system). 2000.
- [۱۹] F. M. White and J. Majdalani, *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill New York, 2006.
- [۲۰] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An Introduction To Computational Fluid*