

## اثر مقیاس کوچک بر ارتعاشات غیرخطی میکرو ورق دایره‌ای ویسکوالاستیک واقع بر بستر غیرخطی ویسکوالاستیک

مهدی معیری<sup>۱</sup>، بابک دارابی<sup>۲\*</sup>، احمد حسینی سیانکی<sup>۳</sup>، آرمن آدامیان<sup>۴</sup>

۱- دانشجوی دکتری، گروه مکانیک، دانشکده فنی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲، ۳، ۴- استادیار، گروه مکانیک، دانشکده فنی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۰۳)

### چکیده

در این مقاله، ارتعاشات آزاد غیرخطی میکرو ورق دایره‌ای توپر و توخالی ویسکوالاستیک بررسی می‌شود. این میکرو ورق بر روی بستر متقارن و نامتقارن ویسکوالاستیک غیرخطی قرار گرفته است. اثر مقیاس کوچک با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده لحاظ می‌شود. معادلات غیرخطی میکرو ورق با اصل همیلتون بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) به دست آمده است. برای به دست آوردن فرکانس طبیعی غیرخطی از روش اجزای محدود (FEM) و الگوریتم تکرار نیوتن استفاده شده است. نتایج به دست آمده با نتایج محققان مقایسه شده است و تطابق خوبی بین آن‌ها مشاهده است. سپس اثرات پارامترهای مختلف مانند پارامتر مقیاس طول، نسبت شعاع بیرونی به ضخامت، حداکثر انحراف به ضخامت، بستر غیرخطی نرم و سخت شونده، بسترهای غیرخطی متقارن و نامتقارن، شرایط مرزی مختلف، میرایی سازه و بستر بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که شرایط مرزی آزاد و گیردار به ترتیب دارای بالاترین و کمترین فرکانس غیرخطی میکرو ورق دایره‌ای توپر و توخالی هستند. همچنین، بسترهای ویسکوالاستیک غیرخطی متقارن و نامتقارن بر فرکانس غیرخطی تأثیر معناداری دارند و فرکانس غیرخطی میکرو ورق دایره‌ای توخالی در حضور بستر نامتقارن سخت شونده به مقادیر بالاتر برای هر نسبت دامنه به ضخامت تغییر می‌کند. **واژه‌های کلیدی:** ارتعاشات آزاد غیرخطی، میکرو ورق دایره‌ای توپر و توخالی، بستر ویسکوالاستیک غیرخطی، نظریه تنش کوپل اصلاح‌شده، نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، روش اجزاء محدود.

## Effect of Small Scale on Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Circular Microplate Rested on Nonlinear Viscoelastic Foundation

### Abstract

In this paper, the nonlinear free vibrations of viscoelastic solid and annular circular microplates are investigated. These microplates are rested on a viscoelastic symmetrical and asymmetric nonlinear foundations. The small scale effect is considered using the modified coupling stress theory. The nonlinear equations of the microplates are obtained using Hamilton's principle and first order shear deformation theory (FSDT). The finite element method (FEM) and Newton iteration algorithm are used to obtain the nonlinear natural frequency. The obtained results are compared with the results of the researchers and a good agreement is observed between them. Then, the effects of various parameters such as length scale parameter, outer radius to thickness ratio, maximum deflection to thickness ratio, softening and hardening nonlinear foundation, symmetric and asymmetric nonlinear foundation, different boundary conditions, structure and foundation damping were investigated. The results indicate that free and clamped boundary conditions have the highest and lowest nonlinear frequencies of solid and hollow circular microplates respectively. Besides, symmetric and asymmetric nonlinear viscoelastic foundations have a significant effect on the nonlinear frequency and the nonlinear frequency of the hollow circular microplate changes to higher values for each amplitude ratio in the presence of a hardened asymmetric foundation.

**Key words:** Nonlinear free vibrations, Solid and annular circular microplates, Nonlinear viscoelastic foundation, Modified couple stress theory, First order shear deformation theory, Finite element method

## مقدمه

اخیراً پیشرفت‌های زیادی در توسعه ریز سازه‌ها مشاهده شده است. در کنار استفاده از دستگاه‌های میکرو و نانو الکترومکانیکی، کاربردهای مختلفی برای میکرو ورق می‌توان به: برداشت کننده‌های انرژی پیزوالکتریک [۱]، راکتورهای انرژی [۲]، دستگاه‌های اپتوالکترونیک [۳]، پره توربین [۴]، انتقال صدا [۵]، جاذب صدا [۶]، آنتن اتصال چند شیار سه رزونانس [۷]، پنل فتوولتائیک-ترموالکتریک [۸]، ماشین کاری تخلیه الکتروشیمیایی میکرو سیم به کمک ارتعاش اولتراسونیک [۹]، توربین بادی [۱۰]، چاپگر سه بعدی [۱۱]، تصحیح جبهه موج اپتیک تطبیقی و اپتیک فعال [۱۲].

فرکانس‌های ارتعاشات آزاد و شکل مود ورق‌های دایره‌ای و توخالی ضخیم با تغییرات ضخامت غیرخطی (یکنواخت، خطی و درجه دوم) با استفاده از روش ریتز توسط کانگ [۱۳] تعیین شده است. آن‌ها ثابت کردند که روش ریتز همگرایی کران بالایی فرکانس‌ها را تضمین می‌کند و با روش‌های المان محدود نیز می‌تواند این تحلیل را انجام داد. ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق‌های دایره‌ای نازک همسانگرد با تکیه‌گاه ساده از طریق رویکرد چند مودی توسط هاتر بوچ و بنامار [۱۴] شبیه‌سازی شده است. ورق دایره‌ای غیر همگن با تغییرات ضخامت غیرخطی با روش مربع دیفرانسیلی برای شرایط لبه گیره دار، تکیه‌گاه ساده و آزاد توسط گوپتا و همکاران [۱۵] ارائه شده است... آن‌ها نتایج راه‌حل‌های دقیق خود را با روش‌های مختلف سری فروبونیوس، ریتز، ریلی-ریتز و روش‌های رسپتانس مقایسه کردند. نی و ژونگ [۱۶] راه حل نیمه تحلیلی را برای ارتعاشات سه بعدی صفحات و ورق دایره‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف انجام دادند. آن‌ها نشان دادند که کمترین فرکانس بی‌بعد ورق دایره‌ای گیره دار دارای مقدار بیشتری در نسبت ضخامت به عرض و عدد موج محیطی صفحه بالاتر است. پنگ و همکاران [۱۷] روش نیمه تحلیلی را برای پاسخ دینامیکی غیرخطی ورق دایره‌ای با تکیه‌گاه‌های گیره دار و ساده مورد بررسی قرار داد. مدل ویسکوپلاستیک در چارچوب میکروپلان توسط سلیم [۱۸] پیشنهاد شده است.

پس کماتش و ارتعاش غیرخطی تیرهای متصل به بست‌های غیرخطی توسط الطاهر و همکاران [۱۹] پیش‌بینی شده است. آن‌ها از روش مربع دیفرانسیل-انتگرال

عددی با روش نیوتن برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل غیرخطی و به دست آوردن مودهای تیر ناقص استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که ثابت‌های بستر الاستیک تأثیر زیادی بر فرکانس‌های طبیعی دارند و اولین فرکانس طبیعی با افزایش مقادیر بستر الاستیک افزایش می‌یابد. روش اجزای محدود غیرخطی صفحات دایره‌ای متقارن محوری ساخته شده از مواد درجه بندی شده با نظریه تنش زوج اصلاح شده توسط ردی و همکاران [۲۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها روش اجزای محدود را با نظریه‌های کلاسیک و تنش زوج اصلاح شده بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول را برای ورق دایره‌ای توسعه دادند. برای حل معادلات غیرخطی از روش تکرار نیوتن استفاده می‌شود. اثر مقیاس طول برای همه شرایط مرزی میکرو ورق دایره‌ای منجر به سفت شدن ورق می‌شود. اصغری [۲۱] تحلیل ارتعاشات سه بعدی غیرخطی مبتنی بر نظریه تنش کوپل اصلاح شده را برای میکرو تیرهای ریلی ارائه کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که پارامتر مقیاس طول نقش مهمی در فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی دارد. یک نظریه لایه‌ای کارآمد برای ارتعاشات تیرهای منحنی عمیق ساخته شده از مواد مدرج تابعی، تحت محیط حرارتی توسط بگ و یاسین [۲۲] توسعه یافته است. آن‌ها نشان دادند که فرکانس با افزایش دما به دلیل کاهش شدید سفتی تیرهای منحنی کاهش می‌یابد. اثر انرژی سطحی و تنش حرارتی بر ارتعاشات غیرخطی میکرو / نانو ورق دایره‌ای الکترواستاتیکی بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده توسط وانگ و همکاران [۲۳] مورد بررسی قرار گرفته است. آن‌ها نشان دادند که تأثیر کرنش غیرخطی هندسی بر فرکانس‌ها در نسبت شکاف اولیه بزرگ به ضخامت میکرو ورق مهم‌تر است. مهین زارع و همکاران [۲۴] ارتعاشات آزاد نانو ورق دایره‌ای دوار ساخته شده از دو ماده پیزوالکتریک مدرج جهت‌دار تابعی را بر طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول توسعه دادند. ارتعاشات القای حرارتی با دامنه بزرگ ورق دایره‌ای توخالی مدرج تابعی وابسته به دما (*FGMs*) توسط جوانی و همکاران [۲۵] بررسی شده است. در تحقیقات آن‌ها از روش مربع دیفرانسیلی تعمیم یافته و روش‌های تکراری و زمانی نیوتن-رافسون و نیومارک استفاده شده است. مسئله ارتعاشات غیرخطی و خمش استاتیکی نانولوله‌های هیبریدی فعال شده بر اساس نظریه الاستیک غیرمحملی مبتنی بر تنش توسط اوکاد و همکاران [۲۶] بررسی شده است.

دما را تحت بارهای حرارتی و مکانیکی بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده انجام داد. برای حل معادلات غیرخطی از روش تکرار نیوتن رافسون استفاده می‌شود. مدل میرایی غیرخطی برای ارتعاشات غیرخطی هندسی ورق مستطیلی ویسکوالاستیک توسط امابیلی [۳۵] شبیه‌سازی شده است. نتایج به دست آمده با روش پیوستگی و هم‌آهنگی (کالوکیشن) نشان داد که میرایی مکعبی کمتر از خطی افزایش می‌یابد، همان‌طور که به نظر می‌رسد برخی آزمایش‌های اولیه روی ورق لاستیکی نشان می‌دهند. تائو و دای [۳۶] ارتعاشات بدون دامنه بزرگ وابسته به اندازه را در میکرو ورق‌های توخالی کامپوزیت تقویت شده با صفحات گرافن ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر و نظریه چهار متغیره بررسی کردند. آن‌ها عبارت غیرخطی ون کارمان و نظریه تنش کوپل اصلاح شده را فرض کردند. آن‌ها نشان دادند که پارامتر مقیاس طول مواد بالاتر، فرکانس طبیعی خطی میکرو ورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی را افزایش می‌دهد، اما باعث کاهش نسبت فرکانس غیرخطی به خطی می‌شود. ارتعاشات غیرخطی یک ورق دایره‌ای نازک ارتوتروپ تحت بار نقطه‌ای متحرک دایره‌ای با استفاده از نظریه ورق کیرشهووف و روش سری فروبنیوس توسط رای و کوپتا [۳۷] منتشر شده است. روش‌های رانگ-کوتا و موازنه هماهنگ برای پاسخ فرکانسی ورق میرایی نشده و میرا استفاده می‌شود. نظریه زیگزاگ مثلثاتی (تابع سکانشی) برای ارتعاشات آزاد و پاسخ‌های گذرا ورق کامپوزیت چندلایه متقاطع توسط چاندا و ساهو [۳۸] ارائه شده است. آن‌ها ثابت کردند که رفتار غیرخطی تنش‌های برشی عرضی به‌عنوان اثر مؤثر در مدل ریاضی برای استخراج پاسخ‌های درست قابل توجه است. لی و همکاران [۳۹] رفتار خمشی متقارن محوری غیرخطی ورق دایره‌ای نازک را با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل و روش مربع دیفرانسیل بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده با نادیده گرفتن برخی یا همه اجزای گرایان کرنش پیش‌بینی کرد. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که از آنجایی که ضخامت ورق دایره‌ای بسیار بزرگ‌تر از ضریب مقیاس کوچک است، همه پارامترهای گرایان کرنش می‌توانند نادیده گرفته شوند و تفاوت انحراف این نظریه‌ها ناچیز است. تحلیل ارتعاشاتی گذرا غیرخطی ورق ویسکوالاستیک توسط نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر ایزوزئومتریک مبتنی بر *B-Splines* غیریکنواخت (*NURBS*)

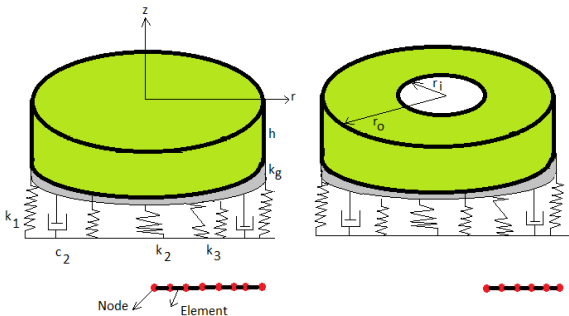
ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری پوسته‌های استوانه‌ای دایره‌ای نازک متحرک محوری توسط محمدی و همکارانش [۲۷] فرمول‌بندی شده‌اند. آن‌ها روش اغتشاش و روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم را به‌عنوان یک روش حل عددی و نیمه‌تحلیلی برای پیش‌بینی فرکانس‌ها و دامنه‌های غیرخطی در نظر گرفتند. اصل همیلتون و استفاده از نظریه پوسته‌های غیرخطی دائل-مشتاری یک راه حل دقیق و سه‌بعدی از تحلیل ارتعاشات آزاد برای ورق مدور ساخته شده از مواد مدرج تابعی توسط روش‌بخش و همکاران [۲۸] انجام شده است. ارتعاشات و پایداری دینامیکی ورق ویسکوالاستیک ساخته شده از مواد مدرج تابعی قرار گرفته بر بسترهای وینکلر و پاسترناک با استفاده از مفاهیم بولتزمن و ولترا توسط سوفیو و همکاران [۲۹] توسعه داده شده است. آن‌ها ثابت کردند که مقادیر زمان بحرانی با افزایش پارامتر ویسکوالاستیسیته به‌طور پیوسته کاهش می‌یابد، درحالی‌که عدد موج محیطی ثابت می‌ماند. همچنین، آن‌ها نشان دادند که اثر بسترهای کشسان پاسترناک در زمان بحرانی بیشتر از اثر بسترهای کشسان وینکلر برای تغییرات  $a/b$  است.

تحلیل ارتعاشات ورق دایره‌ای *FGM* تحت تغییرات دمایی غیرخطی با استفاده از روش مربع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته توسط لال و ساینی [۳۰] انجام شده است. روش نیمه‌تحلیلی یکپارچه برای ارتعاشات آزاد درون صفحه و خارج از صفحه با شکل دلخواه با لبه‌های گیردار با استفاده از توابع نگاشت شوارتز-کریستوفل و توابع نگاشت سری لورنت توسط یوان و همکاران [۳۱] بررسی شده است. تحلیل ارتعاشی ورق دایره‌ای توپر و توخالی مغناطیسی الکتروالاستیک ساخته شده از مواد مدرج تابعی متخلخل با شرایط الکترومغناطیسی متفاوت با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر توسط ویناس [۳۲] توسعه یافته است. او مدل اجزای محدود را برای ورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی در مختصات قطبی، برای پیش‌بینی واقعی پاسخ فرکانسی ورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی دایره‌ای توپر و توخالی با عبارت غیرخطی ون کارمان تکمیل کرد. روش‌های حوزه کنترل مش بر اساس نظریه تغییر شکل برشی کلاسیک و مرتبه اول و سینماتیک خمش متقارن محوری ورق دایره‌ای توسط ردی و همکاران [۳۳] ارائه شده است. جنائو و همکاران [۳۴] تحلیل اجزای محدود غیرخطی میکرو ورق متخلخل ساخته شده از مواد مدرج تابعی وابسته به

(مقارن) و دوم (نامتقارن) مطالعه می‌شود. اثر بسترهای غیرخطی مقارن سخت شونده و نرم شونده و بسترهای غیرخطی نامتقارن سخت شونده و نرم شونده بر فرکانس طبیعی غیرخطی میکروورق دایره‌ای بررسی خواهد شد. برای محاسبه فرکانس طبیعی غیر خطی از روش عددی اجزای محدود و الگوریتم تکرار نیوتن-رافسون استفاده خواهد شد. اثرات بستر پاسترناک (لایه برشی و فنر وینکلر) بر فرکانس طبیعی غیر خطی نیز اعمال خواهد شد. تمامی پارامترهای هندسی و بستر برای میکروورق دایره‌ای توپر و توخالی در نظر گرفته خواهد شد. در تحقیقات داخلی و خارجی این تاثیر این عوامل برای ارتعاشات غیرخطی میکروورق دایره‌ای با در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک مشاهده نشده است.

#### هندسه مسئله

شکل ۱ هندسه میکرو ورق توپر و توخالی ویسکوالاستیک را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، میکرو ورق‌ها در بستر ویسکوالاستیک غیرخطی (ویسکو-پاسترناک) تعبیه شده‌اند. این بستر غیرخطی از سه فنر و روی دمپر موازی تشکیل شده است.  $k_1$  و  $k_g$  ثابت لایه برشی و فنر خطی (وینکلر) را نشان می‌دهد.  $c_2$  ثابت میرایی بستر است. ثابت‌های فنری غیرخطی  $k_2$  و  $k_3$  در نظر گرفته می‌شوند. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، مدل تک‌بعدی اجزای محدود برای این میکرو ورق‌ها به کار گرفته شده است. شعاع‌های داخلی و خارجی میکرو ورق‌های دایره‌ای هستند.  $h$  ضخامت را نشان می‌دهد.  $c_1$  ویسکوالاستیسیته میکرو ورق توسط مدل کلون-ویت مدل شده است. در این مدل، میکروورق به صورت فنر و دمپر موازی مدل می‌شوند. ثابت میرایی میکرو ورق (ثابت میرایی سازه) است. فرض بر این است که میکرو ورق‌ها مقارن هستند.



شکل ۱ - هندسه میکرو ورق توپر و توخالی

توسط شافعی و همکاران [۴۰] برآورد شده است. آن‌ها نشان دادند که ورق ویسکوالاستیک ضخیم تنش دینامیکی بالاتری نسبت به صفحات الاستیک مشابه نشان می‌دهند و تغییر شکل‌های برشی تأثیر قابل توجهی برای ورق ویسکوالاستیک ضخیم دارد و نسبت تنش به ضخامت حاصله را کاهش می‌دهد. اثر بستر ویسکوالاستیک ناهمگن بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی متعامد ناهمگن با تغییرات پیوسته مدول و چگالی بر حسب سه مختصات فضایی توسط هاسیو و همکاران [۴۱] بررسی شده است. معادله حرکت ورق مستطیل شکل ارتوتروپیک بر اساس تئوری کلاسیک و روش جداسازی متغیرها استخراج می‌شود، سپس از رویکرد *Bubnov-Galerkin* برای به دست آوردن فرکانس‌های بی‌بعد استفاده می‌شود. آن‌ها نشان دادند که تأثیر ناهمگنی بستر الاستیک وینکلر بر مقادیر فرکانس‌های بی‌بعد از ۰٫۵۴٪ به ۱۳٫۶۸٪ با افزایش نسبت  $a/h$  افزایش می‌یابد. علاوه بر این، آن‌ها به این نتیجه رسیدند که فرکانس ورق‌هایی که روی بستر ویسکوالاستیک ناهمگن قرار می‌گیرند بزرگ‌تر از ورق‌هایی است که روی بستر ویسکوالاستیک همگن قرار می‌گیرند و این تفاوت بین ۲٪ تا ۴٪ متغیر است.

تحقیقات گسترده‌ای وجود دارد که رفتار ارتعاشاتی میکرو یا نانو ورق را انجام داده‌اند. در این تحقیقات، هیچ تحقیق قبلی در مورد تحلیل ارتعاشات غیرخطی میکرو ورق توپر و توخالی از جمله بستر ویسکوالاستیک غیرخطی بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده بررسی نشده است. در این مقاله به اثرات غیرخطی بستر پرداخته می‌شود. برای درک بهتر، عبارت غیرخطی ون کارمن در معادلات جابجایی-کرنش آورده شده است. برای به دست آوردن معادلات حرکت میکرو ورق دایره‌ای توپر و توخالی، از اصل همیلتون با غیرخطی بودن بستر با مرتبه سوم استفاده می‌شود. علاوه بر معادلات اساسی، از روش تغییرات در تمامی معادلات استفاده می‌شود. همچنین در میکرو ورق، با توجه به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، ارتعاشات غیرخطی میکرو ورق با ویسکوالاستیسیته بستر بررسی می‌شود. مدل کلون-ویت برای ویسکوالاستیسیته میکرو ورق استفاده می‌شود. معادلات حرکت با روش اجزای محدود حل می‌شود. در این مقاله ارتعاشات غیر خطی میکروورق دایره‌ای با تکیه بر معادلات کرنش-جابجایی غیر خطی و با در نظر گرفتن اثرات بستر غیر خطی مرتبه سوم

انرژی کرنشی و تغییرات انرژی کرنش بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده را می توان به صورت زیر ارائه کرد:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \left( \sigma_{rr} \epsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + 2\sigma_{r\theta} \epsilon_{r\theta} + 2m_{r\theta} \chi_{r\theta} + 2m_{\theta z} \chi_{\theta z} \right) r dr dz d\theta \quad (5)$$

$$\delta U = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \left( \sigma_{rr} \delta \epsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \delta \epsilon_{\theta\theta} + 2\sigma_{r\theta} \delta \epsilon_{r\theta} + 2m_{r\theta} \delta \chi_{r\theta} + 2m_{\theta z} \delta \chi_{\theta z} \right) r dr dz d\theta$$

مؤلفه های تنش زوج اصلاح شده را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$m_{ij} = 2G_{ij} l^2 \chi_{ij}, \quad \chi_{ij} = \frac{1}{2} (\Theta_{i,j} + \Theta_{j,i}),$$

$$\Theta = \frac{1}{2} \text{curl}(U), \quad \Theta_r = 0, \quad \Theta_z = 0 \quad (6)$$

$$\Theta_\theta = \frac{1}{2} \left( -2 \frac{\partial w}{\partial r} + K_4 \kappa \right)$$

$l$  ضریب مقیاس طول مواد است.

معادلات تانسور گرادیان چرخش متقارن را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\chi_{rr} = \Theta_{r,r} = 0$$

$$\Theta_\theta = \frac{1}{2} \left( -2 \frac{\partial w}{\partial r} + K_4 \kappa \right)$$

$$\chi_{\theta\theta} = \Theta_{\theta,\theta} = 0, \quad \chi_{zz} = \Theta_{z,z} = 0,$$

$$\chi_{r\theta} = \frac{1}{4} \left( -2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + K_4 \frac{\partial \kappa}{\partial r} \right),$$

$$\chi_{\theta z} = \frac{1}{4} \left( K_4 \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \chi_{rz} = 0 \quad (7)$$

جایگزینی معادلات (۲)، (۳) و (۷) به معادله (۵)، انرژی

کرنش و تغییرات انرژی کرنش زیر را نتیجه می دهد:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \left( \sigma_{rr} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + K_2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] + \sigma_{\theta\theta} \frac{u}{r} + \sigma_{r\theta} \left[ \frac{u}{r} + \frac{K_2 \kappa}{r} \right] + \sigma_{r\theta} \left[ K_4 \kappa \right] + \frac{1}{2} m_{r\theta} K_4 \frac{\partial \kappa}{\partial r} - m_{r\theta} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + m_{\theta z} \delta \left[ \frac{1}{2} \left( K_4 \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \right) r dr dz d\theta$$

$$\delta U = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \left( \sigma_{rr} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial r} + K_2 \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \delta \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] + \sigma_{\theta\theta} \left[ \frac{1}{r} (\delta u + K_2 \delta \kappa) \right] + \sigma_{r\theta} \left[ K_4 \delta \kappa \right] + m_{r\theta} \left[ \frac{1}{2} \left( -2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2} + K_4 \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} \right) \right] + m_{\theta z} \delta \left[ \frac{1}{2} \left( K_4 \frac{\partial \delta w}{\partial r} \right) \right] \right) r dr dz d\theta$$

$$\delta U = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} \delta u - K_2 \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} \delta \kappa - \frac{\partial(r\sigma_{r\theta})}{\partial r} a_1 \frac{\partial w}{\partial r} \delta w + \sigma_{\theta\theta} \delta u + K_2 \sigma_{\theta\theta} \delta \kappa + K_4 r \sigma_{r\theta} \delta \kappa + \frac{\partial^2(m_{r\theta})}{\partial r^2} \delta w - \frac{1}{2} K_4 \frac{\partial(m_{r\theta})}{\partial r} \delta \kappa - \frac{K_4}{2} \frac{\partial(m_{\theta z})}{\partial r} \delta w \right) r dr dz d\theta$$

$$\delta U = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{1}{r} (N_r^0 \delta u + N_\theta^0 \delta \kappa) \right) + N_{rz}^0 \delta \kappa + \left( P_{r\theta}^0 \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} + P_{z\theta}^0 \frac{\partial \delta w}{\partial r} + P_{z\theta}^1 \delta \kappa \right) r dr d\theta \quad (8)$$

## معادلات میکرو ورق دایره ای

میدان جابجایی برای میکرو ورق دایره ای ویسکوالاستیک

متقارن به صورت زیر بیان می شود:

$$U(r, z, t) = u(r) + z \kappa(r, t),$$

$$V(r, z, t) = 0, W(r, z, t) = w(r, t) \quad (1)$$

صفحه وسط به ترتیب در جهت شعاعی و عرضی در

صفحه وسط به ترتیب در جهت شعاعی و  $z$  هستند.

نشان دهنده چرخش در صفحه  $r - z$  است.

روابط کرنش-جابجایی بر اساس تئوری های تغییر شکل

برشی مرتبه اول را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} + K_2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2,$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} (u + K_2 \kappa), \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} [K_4 \kappa], \quad (2)$$

$$K_2 = z, K_4 = 1$$

لازم به ذکر است که به دلیل تقارن، تمامی مشتقات و

جمله های برابر با صفر هستند. رابطه تنش و کرنش را می توان

به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{rr} = Q_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + K_2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) + Q_{13} \left( \frac{u}{r} + \frac{K_2 \kappa}{r} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = Q_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + K_2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) + Q_{22} \left( \frac{u}{r} + \frac{K_2 \kappa}{r} \right)$$

$$\sigma_{rz} = K_4 Q_{55} \kappa \quad (3)$$

ماتریس ضریب سختی میکرو ورق دایره ای را می توان

به صورت زیر بیان کرد:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, Q_{12} = \nu \frac{E}{1-\nu^2}, Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G$$

می توان از روش تغییرات (حساب تغییرات) روی انرژی

کل میکرو ورق،  $U, K$  و کار خارجی استفاده کرد، سپس

جایگزینی معادلات به دست آمده در اصل همیلتون منجر به

معادلات حرکت می شود. اصل همیلتون را می توان به صورت زیر

بیان کرد:

$$\int_0^t (\delta U^T - \delta W^{Ext} - \delta T) dt = 0 \quad (4)$$

که  $\delta U^T, \delta W^{Ext}$  و  $\delta T$  تغییرات انرژی کرنش، کار

خارجی و انرژی جنبشی میکرو ورق دایره ای ویسکوالاستیک

هستند.

برای ویسکوالاستیسیته سازه (ویسکوالاستیسیته میکرو ورق) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[ \begin{aligned} & \left[ N_r^0 \frac{\partial \delta u}{\partial r} + N_r^2 \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 N_r^0 \delta \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] + \\ & P_{r\theta}^0 \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} + P_{z\theta}^0 \frac{\partial \delta w}{\partial r} + P_{z\theta}^1 \delta \kappa - v_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \\ & \left[ \frac{1}{r} (N_\theta^0 \delta u + N_\theta^2 \delta \kappa) \right] + \left[ N_r^3 \frac{\partial \delta w}{\partial r} + N_r^4 \delta \kappa \right] + \\ & \left( k_{\rho w} \pm k_{\rho w}^2 \pm k_{\rho w}^3 - k_s \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - k_s \frac{\partial w}{r \partial r} - c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w - v_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta \kappa \\ & - v_s \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} \delta \kappa - v_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + c_1 \frac{\partial N_r^2}{\partial t} \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} + \\ & c_1 \frac{\partial}{\partial t} (N_r^0) \frac{\partial \delta u}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 c_1 \frac{\partial}{\partial t} (N_r^0) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \\ & c_1 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial t} (N_\theta^0) \delta u + \frac{\partial}{\partial t} (N_\theta^2) \delta \kappa \right) \\ & + c_1 \frac{\partial N_r^4}{\partial t} \delta \kappa - v_1 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} \delta u + c_1 \frac{\partial N_r^2}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial r} \end{aligned} \right] ndr = 0 \quad (13)$$

با جداسازی بر اساس هر متغیر می توان معادلات زیر را به

دست آورد:

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[ \begin{aligned} & \left( N_r^0 \frac{\partial \delta u}{\partial r} + \frac{1}{r} (N_\theta^0 \delta u) - v_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u \right. \\ & \left. - v_1 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} \delta u + c_1 \frac{\partial}{\partial t} (N_r^0) \frac{\partial \delta u}{\partial r} + c_1 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial t} (N_\theta^0) \delta u \right) \right) ndr = 0 \\ & \left( N_r^2 \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} + P_{r\theta}^0 \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} + P_{z\theta}^1 \delta \kappa + \frac{1}{r} (N_\theta^2 \delta \kappa) + N_r^4 \delta \kappa \right. \\ & \left. - v_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta \kappa - v_s \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} \delta \kappa + c_1 \frac{\partial}{\partial t} (N_r^2) \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} + \right. \\ & \left. c_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} (N_\theta^2) \delta \kappa + c_1 \frac{\partial}{\partial t} (N_r^4) \delta \kappa \right) ndr = 0 \\ & \left( \frac{1}{2} a_1 N_r^0 \delta \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + P_{z\theta}^0 \frac{\partial \delta w}{\partial r} + N_r^3 \frac{\partial \delta w}{\partial r} + \right. \\ & \left. c_1 \frac{\partial}{\partial t} (N_r^3) \frac{\partial \delta w}{\partial r} - v_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right. \\ & \left. + \left( k_{\rho w} \pm k_{\rho w}^2 \pm k_{\rho w}^3 - k_s \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. + k_s \frac{\partial w}{r \partial r} - c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} a_1 c_1 \frac{\partial}{\partial t} (N_r^0) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) ndr = 0 \end{aligned} \right] \quad (14)$$

نیروها و گشتاورهای حاصله را می توان به صورت زیر

نوشت:

$$\begin{aligned} N_r^0 &= A_{11}^0 \frac{\partial u}{\partial r} + A_{11}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 A_{11}^0 + \frac{A_{12}^0}{r} u + \frac{A_{12}^2}{r} \kappa \\ N_\theta^0 &= A_{12}^0 \frac{\partial u}{\partial r} + A_{12}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 A_{12}^0 + \frac{A_{22}^0}{r} u + \frac{A_{22}^2}{r} \kappa \\ N_r^1 &= B_{11}^0 \frac{\partial u}{\partial r} + B_{11}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 B_{11}^0 + \frac{B_{12}^0}{r} u + \frac{B_{12}^2}{r} \kappa \\ N_\theta^1 &= B_{12}^0 \frac{\partial u}{\partial r} + B_{12}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 B_{12}^0 + \frac{B_{22}^0}{r} u + \frac{B_{22}^2}{r} \kappa \\ N_r^2 &= C_{11}^0 \frac{\partial u}{\partial r} + C_{11}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 C_{11}^0 + \frac{C_{12}^0}{r} u + \frac{C_{12}^2}{r} \kappa \\ N_\theta^2 &= C_{12}^0 \frac{\partial u}{\partial r} + C_{12}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 C_{12}^0 + \frac{C_{22}^0}{r} u + \frac{C_{22}^2}{r} \kappa \\ N_r^3 &= D_{33}^3 \frac{\partial w}{\partial r} + D_{33}^4 \kappa, N_r^4 = D_{33}^4 \frac{\partial w}{\partial r} + E_{33}^4 \kappa, P_{z\theta}^1 = D_{11}^1 \frac{\partial w}{\partial r} + E_{11}^1 \kappa \\ M_{r\theta}^1 &= D_{44}^1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + D_{33}^1 \frac{\partial \kappa}{\partial r}, P_{r\theta}^0 = D_{22}^0 \frac{\partial \kappa}{\partial r} + D_{33}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, P_{z\theta}^0 = D_{22}^0 \frac{\partial w}{\partial r} + D_{11}^0 \kappa, \end{aligned} \quad (15)$$

ثابت های  $E_{ij}^e, A_{ij}^e, B_{ij}^e, C_{ij}^e, D_{ij}^e$  در پیوست A فهرست

شده اند.

بر اساس در نظر گرفتن جملات غیرخطی مرتبه سوم (مقارن) و مرتبه دوم (نامقارن) برای بستر، تغییرات کار نیروی خارجی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} W^{ext} &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_1}^{r_2} [F_{Foundation}^w] r dr dz d\theta \\ \delta W^{ext} &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_1}^{r_2} [F_{Foundation}^w \delta w] r dr dz d\theta \end{aligned} \quad (9)$$

$$\delta W^{ext} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left[ \left( k_{\rho w} \pm k_{\rho w}^2 \pm k_{\rho w}^3 - k_s \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - k_s \frac{\partial w}{r \partial r} - c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \right] r dr$$

که  $C_2$  و  $k_1, k_2, k_3, k_g$  ثابت های فنر خطی و غیرخطی، ثابت برشی و ثابت میرایی بستر است. علائم + و - نشان دهنده نرم شوندگی و سخت شوندگی بسترهای غیرخطی است. برای میرایی بستر هیچ گونه عبارت غیرخطی در نظر گرفته نمی شود. انرژی جنبشی و تغییرات انرژی جنبشی را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + K_2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial t} + K_2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] r dr dz d\theta \\ \delta K &= 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left[ -v_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) - \right. \\ & \left. v_1 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta \kappa + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} \delta u \right) - v_s \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} \delta \kappa \right] r dr \end{aligned} \quad (10)$$

$$v_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz, v_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho K_2 dz, v_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho K_2^2 dz$$

$\rho$  نشان دهنده چگالی است. معادله حرکت را می توان

به صورت زیر بیان کرد:

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[ \begin{aligned} & \left[ N_r^0 \frac{\partial \delta u}{\partial r} + N_r^2 \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} + \frac{1}{2} a_1 N_r^0 \delta \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] + \\ & P_{r\theta}^0 \frac{\partial \delta \kappa}{\partial r} + P_{z\theta}^0 \frac{\partial \delta w}{\partial r} + P_{z\theta}^1 \delta \kappa + \\ & \left[ \frac{1}{r} (N_\theta^0 \delta u + N_\theta^2 \delta \kappa) \right] + \left[ N_r^3 \frac{\partial \delta w}{\partial r} + N_r^4 \delta \kappa \right] + \\ & \left( k_{\rho w} \pm k_{\rho w}^2 \pm k_{\rho w}^3 - k_s \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \delta w \\ & + \left( -k_s \frac{\partial w}{r \partial r} - c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + K_2 \frac{\partial \kappa}{\partial r} \right) \delta w \\ & - v_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u - v_1 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} \delta \kappa \\ & - v_s \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} \delta u - v_s \frac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} \delta \kappa - v_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \end{aligned} \right] ndr = 0 \quad (12)$$

و  $M_r^i, M_\theta^i, M_{r\theta}^i, P_{r\theta}^i, P_{z\theta}^i$  و  $N_r^i, N_\theta^i, N_{r\theta}^i$  نیروها و

گشتاورهای منتهی به نشان می دهد که در پیوست A آورده شده است.

برای اعمال ویسکوالاستیسیته میکرو ورق بر روی فرمولاسیون، مدل کلون-ویت در اینجا در نظر گرفته شده

است. مدول الاستیک  $E$  با رابطه  $\left( E + c_1 \frac{\partial}{\partial t} \right)$  در مدل

ویسکوالاستیک کلون-ویت جایگزین شده است. معادله بالا

جایگزینی معادله (۱۵) در معادلات (۱۴):

توابع درون‌یابی لاگرانژ و درون‌یابی هرمیت برای  $u, \kappa$

به صورت زیر استفاده می‌شوند:

$$\begin{aligned} u &= c_1 + c_2 r + c_3 r^2, \\ w &= c_4 + c_5 r + c_6 r^2 + c_7 r^3, \\ \kappa &= c_8 + c_9 r + c_{10} r^2 \end{aligned} \quad (20)$$

با استفاده از روش المان محدود و جایگزینی معادله (۱۹)

به معادلات (۱۶) تا (۱۸) معادلات حرکت زیر به دست می‌آید:

$$\int \left[ \begin{aligned} & \left[ A_{11}^0 \partial_r y_1 + A_{11}^2 \partial_r y_2 + \frac{1}{2} a A_{11}^0 (\partial_r y_3)^2 + \frac{A_{12}^0}{r} y_1 + \frac{A_{12}^2}{r} y_2 \right] \partial_r N_{u1} + \\ & \frac{1}{r} \left[ A_{12}^0 \partial_r y_1 + A_{12}^2 \partial_r y_2 + \frac{1}{2} a A_{12}^0 (\partial_r y_3)^2 + \frac{A_{22}^0}{r} y_1 + \frac{A_{22}^2}{r} y_2 \right] N_{u1} + \\ & c_1 \left[ A_{11}^0 \partial_n y_1 + A_{11}^2 \partial_n y_2 + \frac{A_{12}^0}{r} \partial_r y_1 + \frac{A_{12}^2}{r} \partial_r y_2 \right] \partial_r N_{u1} + \frac{c_1}{r} A_{11}^0 \partial_n y_1 \\ & + \frac{1}{r} c_1 \left[ A_{12}^0 \partial_n y_2 + \frac{1}{2} a A_{12}^0 (\partial_n y_3)^2 + \frac{A_{22}^0}{r} \partial_r y_1 + \frac{A_{22}^2}{r} \partial_r y_2 \right] N_{u1} \\ & \left( -v \partial_n u \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_1 \partial_n y_2 \right) N_{u1} \end{aligned} \right] r dr = 0 \quad (21)$$

$$y_1 = \sum_{j=1}^6 N_{uj} \Gamma_j, y_2 = \sum_{j=1}^4 N_{kj} Y_j, y_3 = \sum_{j=1}^4 N_{wj} \Psi_j$$

$$\int \left[ \begin{aligned} & \left[ C_{11}^0 \partial_r y_1 + C_{11}^2 \partial_r y_2 + \frac{1}{2} a C_{11}^0 (\partial_r y_3)^2 + \frac{C_{12}^0}{r} y_1 + \frac{C_{12}^2}{r} y_2 \right] \partial_r N_{\kappa 1} + \\ & \frac{1}{r} \left[ C_{12}^0 \partial_r y_1 + C_{12}^2 \partial_r y_2 + \frac{1}{2} a C_{12}^0 (\partial_r y_3)^2 + \frac{C_{22}^0}{r} y_1 + \frac{C_{22}^2}{r} y_2 \right] N_{\kappa 1} + \\ & [D_{33}^4 \partial_r y_3 + E_{33}^4] N_{\kappa 1} + [D_{22}^1 \partial_r y_2 + D_{33}^1 \partial_r y_3] \frac{\partial N_{u1}}{\partial r} \\ & + [D_{11}^1 \partial_r y_3 + E_{11}^1] N_{\kappa 1} - v_1 N_{\kappa 1} \partial_n y_1 - v_2 N_{\kappa 1} \partial_n y_2 + \\ & c_1 [D_{33}^4 \partial_r y_3 + E_{33}^4] N_{\kappa 1} + \frac{c_1}{r} \left[ C_{12}^0 \partial_n y_1 + C_{12}^2 \partial_n y_2 + \frac{C_{22}^0}{r} \partial_r y_1 \right] N_{\kappa 1} \\ & \frac{c_1}{r} \left[ \frac{1}{2} a C_{12}^0 \partial_n y_3 \partial_r y_3 + \frac{C_{22}^2}{r} \partial_r y_2 \right] N_{\kappa 1} + c_1 [C_{11}^0 \partial_n y_1 + C_{11}^2 \partial_n y_2] \\ & + c_1 \left[ \frac{a}{2} C_{11}^0 \partial_n y_3 \partial_r y_3 + \frac{C_{12}^0}{r} \partial_r y_1 + \frac{C_{12}^2}{r} \partial_r y_2 \right] \partial_r N_{\kappa 1} \end{aligned} \right] r dr = 0 \quad (22)$$

$$\int \left[ \begin{aligned} & p w_1 \partial_n N_{u1} + [D_{44}^1 \partial_n y_3 + D_{33}^1 \partial_r y_2] \partial_n N_{u1} + a p w_2 \partial_n N_{u1} \partial_r y_3 + \\ & \frac{1}{r} p w_3 \partial_n N_{u1} + [D_{33}^3 \partial_r y_3 + D_{33}^2 \partial_r y_2] \partial_n N_{u1} + \\ & [D_{22}^2 \partial_r y_3 + D_{11}^1 \partial_r y_2] \partial_n N_{u1} + \\ & p w_4 N_{u1} + v_3 \partial_n y_3 \partial_r N_{u1} + \left( \frac{N_{u1}}{r} \partial_r y_3 \right) N_{u1} + \\ & c_1 p w_5 \partial_n N_{u1} - v_4 N_{u1} \partial_n y_3 \\ & + c_1 \left( D_{33}^3 \partial_n y_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + D_{33}^4 \partial_r y_2 \right) \partial_n N_{u1} + \\ & a c_1 p w_2 \partial_n w \partial_r N_{u1} + \frac{1}{r} c_1 p w_3 \partial_n N_{u1} \end{aligned} \right] r dr = 0 \quad (23)$$

که

$$\begin{aligned} p w_1 &= B_{11}^0 \partial_r y_1 + B_{11}^2 \partial_r y_2 + \frac{B_{12}^0}{r} y_1 + \frac{1}{2} a_1 (\partial_r y_3)^2 B_{11}^0 + \frac{B_{12}^2}{r} y_2 \\ p w_2 &= A_{11}^0 \partial_r y_1 + A_{11}^2 \partial_r y_2 + \frac{A_{12}^0}{r} y_1 + \frac{1}{2} a_1 (\partial_r y_3)^2 A_{11}^0 + \frac{A_{12}^2}{r} y_2 \\ p w_3 &= B_{12}^0 \partial_r y_1 + B_{12}^2 \partial_r y_2 + \frac{1}{2} a_1 (\partial_r y_3)^2 B_{12}^0 + \frac{B_{22}^0}{r} y_1 + \frac{B_{22}^2}{r} y_2 \\ p w_4 &= k_1 y_3 \pm k_2 y_3^2 \pm k_3 y_3^3 - k_g \partial_n y_3 - k_g \frac{1}{r} \partial_r y_3 - c_2 \partial_n y_3 \end{aligned} \quad (24)$$

فرم ماتریس زیر را می‌توان برای معادلات بالا نوشت:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Gamma}_j \\ \dot{Y}_j \\ \dot{\Psi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_j \\ Y_j \\ \Psi_j \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_j \\ Y_j \\ \Psi_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11N} & K_{12N} & K_{13N} \\ K_{21N} & K_{22N} & K_{23N} \\ K_{31N} & K_{32N} & K_{33N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_j \\ Y_j \\ \Psi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25) \end{aligned}$$

$$\int_0^L \left[ \begin{aligned} & \left[ A_{11}^0 \partial_r u + A_{11}^2 \partial_r \kappa + \frac{1}{2} a_1 (\partial_r w)^2 A_{11}^0 + \frac{A_{12}^0}{r} u + \frac{A_{12}^2}{r} \kappa \right] \partial_r \delta u + \\ & \frac{1}{r} \left[ A_{12}^0 \partial_r u + A_{12}^2 \partial_r \kappa + \frac{1}{2} a_1 (\partial_r w)^2 A_{12}^0 + \frac{A_{22}^0}{r} u + \frac{A_{22}^2}{r} \kappa \right] \delta u \\ & + v_1 \partial_r \kappa \delta u + v_2 \partial_r u \delta u + \frac{1}{r} c_1 \left[ A_{11}^0 \partial_n u + A_{11}^2 \partial_n \kappa \right] \delta u \\ & + c_1 \left[ A_{11}^0 \partial_n u + A_{11}^2 \partial_n \kappa + \frac{1}{2} a_1 A_{11}^0 \partial_n w \partial_r w + \frac{A_{12}^0}{r} \partial_r u + \frac{A_{12}^2}{r} \partial_r \kappa \right] \delta u + \\ & + \frac{1}{r} c_1 \left[ \frac{1}{2} a_1 A_{12}^0 \partial_n w \partial_r w + \frac{A_{22}^0}{r} \partial_r u + \frac{A_{22}^2}{r} \partial_r \kappa \right] \delta u + \\ & c_1 \frac{A_{12}^2}{r} \partial_r \kappa \delta u \end{aligned} \right] r dr = 0 \quad (16)$$

$$\int_0^L \left[ \begin{aligned} & \left[ C_{11}^0 \partial_r u + C_{11}^2 \partial_r \kappa + \frac{1}{2} a_1 (\partial_r w)^2 C_{11}^0 + \frac{C_{12}^0}{r} u + \frac{C_{12}^2}{r} \kappa \right] \partial_r \delta \kappa + \\ & \frac{1}{r} \left[ C_{12}^0 \partial_r u + C_{12}^2 \partial_r \kappa + \frac{1}{2} a_1 (\partial_r w)^2 C_{12}^0 + \frac{C_{22}^0}{r} u + \frac{C_{22}^2}{r} \kappa \right] \delta \kappa + \\ & [D_{33}^4 \partial_r w + E_{33}^4] \delta \kappa + [D_{22}^1 \partial_r \kappa + D_{33}^1 \partial_r w] \delta \kappa + \\ & \frac{1}{r} \left[ D_{11}^1 \partial_r w + E_{11}^1 \right] \delta \kappa - \frac{1}{r} c_1 \left[ \frac{C_{12}^0}{r} \partial_r u + \frac{C_{12}^2}{r} \partial_r \kappa \right] \delta \kappa + \\ & + v_1 \partial_r u \delta \kappa + v_2 \partial_r \kappa \delta \kappa + c_1 [D_{33}^4 \partial_r w + E_{33}^4] \delta \kappa \\ & \frac{1}{r} c_1 \left[ C_{12}^0 \partial_r u + C_{12}^2 \partial_r \kappa + \frac{1}{2} a_1 \partial_r w \partial_r w C_{12}^0 + \frac{C_{22}^0}{r} \partial_r u + \frac{C_{22}^2}{r} \partial_r \kappa \right] \delta \kappa \\ & + c_1 \left[ C_{11}^0 \partial_n u + C_{11}^2 \partial_n \kappa + \frac{1}{2} a_1 \partial_n w \partial_r w C_{11}^0 + \frac{C_{12}^0}{r} \partial_r \kappa \right] \delta \kappa \end{aligned} \right] r dr = 0 \quad (17)$$

$$\int_0^L \left[ \begin{aligned} & \left[ B_{11}^0 \partial_r u + B_{11}^2 \partial_r \kappa + \frac{1}{2} a_1 (\partial_r w)^2 B_{11}^0 + \frac{B_{12}^0}{r} u + \frac{B_{12}^2}{r} \kappa \right] \partial_n \delta w + \\ & + a_1 \left[ A_{11}^0 \partial_r u + A_{11}^2 \partial_r \kappa + \frac{1}{2} a_1 (\partial_r w)^2 A_{11}^0 + \frac{A_{12}^0}{r} u + \frac{A_{12}^2}{r} \kappa \right] \partial_r w \delta w + \\ & + \frac{a_1 A_{12}^0}{r} \kappa \partial_r w \partial_r \delta w + \frac{1}{r} \left[ \frac{B_{12}^0}{r} \kappa \right] \partial_r \delta w + v_1 \partial_r u \delta w + \\ & \frac{1}{r} \left[ B_{12}^0 A_{11}^0 \partial_r u + B_{12}^2 \partial_r \kappa + \frac{1}{2} a_1 (\partial_r w)^2 B_{12}^0 + \frac{B_{22}^0}{r} u + \frac{B_{22}^2}{r} \kappa \right] \partial_r \delta w + \\ & [D_{33}^4 \partial_r w + D_{33}^4 \kappa] \partial_r \delta w + [D_{11}^1 \partial_r w + D_{33}^1 \partial_r \kappa] \partial_n \delta w + \\ & [D_{22}^2 \partial_r w + D_{11}^1 \kappa] \partial_r \delta w + \left[ k_{1w} \pm k_2 w^2 \pm k_3 w^3 \right. \\ & \left. - k_g \partial_n w - k_g \frac{\partial w}{\partial r} - c_{2d} \partial_n w \right] \delta w \\ & + v_1 \partial_n \delta w + c_1 (D_{33}^4 \partial_r w + D_{33}^4 \kappa) \partial_r \delta w + \frac{c_1}{r} B_{12}^0 \partial_n u \partial_r \delta w \\ & c_1 \left[ \frac{B_{12}^0}{r} \partial_r \kappa \right] \partial_n \delta w + a c_1 \left[ \frac{A_{12}^0}{r} \partial_r \kappa \right] \partial_r w \partial_r \delta w + \\ & + c_1 \left[ B_{11}^0 \partial_n u + B_{11}^2 \partial_n \kappa + a B_{11}^0 \partial_n w \partial_r w + \frac{B_{12}^0}{r} \partial_r u + \frac{B_{12}^2}{r} \partial_r \kappa \right] \partial_n \delta w + \\ & a c_1 \left[ A_{11}^0 \partial_n u + A_{11}^2 \partial_n \kappa + a A_{11}^0 \partial_n w \partial_r w + \frac{A_{12}^0}{r} \partial_r u + \frac{A_{12}^2}{r} \partial_r \kappa \right] \partial_r w \partial_r \delta w + \\ & \frac{1}{r} c_1 \left[ B_{12}^0 \partial_n \kappa + a B_{12}^0 \partial_n w \partial_r w + \frac{B_{22}^0}{r} \partial_r \kappa + \frac{B_{22}^2}{r} \partial_r u \right] \partial_r \delta w \end{aligned} \right] r dr = 0 \quad (18)$$

عملگرهای  $\partial_r, \partial_n, \partial_{nr}$  به ترتیب  $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial^2}{\partial r \partial t}, \frac{\partial^2}{\partial r^2}$

را نشان می‌دهند.

### معادلات اجزای محدود

پس از استخراج معادله حرکت، باید رویکرد اجزای محدود اعمال شود. جابجایی گره را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: [۴۲]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^6 N_{uj} \Gamma_j, \delta u = N_{u1} \\ \kappa &= \sum_{j=1}^4 N_{kj} Y_j, \delta \kappa = N_{\kappa 1} \\ w &= \sum_{j=1}^4 N_{wj} \Psi_j, \delta w = N_{w1} \end{aligned} \quad (19)$$

تکیه‌گاه	۱	۴/۴۷۴	۴/۶۹۹	۵/۷۶۰	۴/۸۹۳
ساده	۲	۲۳/۴۴۵	۲۳/۲۵۴	۲۷/۹۰	۲۸/۲۴۰
آزاد	۱	۹/۰۷۷	۸/۲۶۷	۸/۸۶۸	۸/۸۶۷
	۲	۲۸/۸۶۹	۲۸/۶۰۵	۳۶/۷۷۰	۳۶/۴۱۰

جدول ۲ فرکانس طبیعی غیرخطی بی‌بعد

$$(\Omega_{NL} = \omega_{NL} \frac{r_0}{h} \sqrt{12\rho(1-\nu^2)/E})$$

و توخالی را برای تعداد المان ( $N$ ) نشان می‌دهد. نتایج توسط نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آمده است. مدول یانگ و ضریب پواسن برابر  $E = 200GPa$  و  $\nu = 0.3$  در نظر گرفته شده است. حداکثر دامنه به نسبت ضخامت میکرو ورق ۱.۵ در نظر گرفته می‌شود. نسبت شعاع بیرونی به ضخامت برابر با ۱۵ است. پارامتر مقیاس طول معادل ضخامت است. نرخ همگرایی برای میکرو ورق دایره‌ای توپر بهتر از میکرو ورق دایره‌ای توخالی است. در تعداد المان ۲۷ در رقم چهارم برای دو میکرو ورق دایره‌ای ثابت شد. لازم به ذکر است که به دلیل رفتار منفرد در مرکز میکرو ورق دایره‌ای، به جای صفر برای غیر تکینگی،  $0/0001$  انتخاب می‌شود. خطا کوچک‌تر از  $0,001$  تنظیم شده است.

$$Error = \frac{\Omega_{NL} |_{new} - \Omega_{NL} |_{previous}}{\Omega_{NL} |_{previous}} \quad (28)$$

ابعاد و خواص زیر در نتایج بعدی برای فرکانس‌های طبیعی غیرخطی میکرو ورق‌های دایره‌ای توپر و توخالی استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} E &= 200GPa, \nu = 0.3, k_1 = 1e10 \text{ N} / m^3, \\ k_2 &= 1e10 \text{ N} / m^3, k_3 = 1e15 \text{ N} / m^3, \\ k_g &= 1e10 \text{ N} / m, c_1 = 0.001 \text{ N} \cdot \text{sec} / m, \\ c_2 &= 0.04 \text{ N} \cdot \text{sec} / m, \\ l &= 1e - 7m, \frac{r_0}{h} = 10, \frac{r_i}{r_0} = 0.4 \end{aligned} \quad (29)$$

جدول ۲- همگرایی فرکانس طبیعی غیرخطی بی‌بعد

$$(\Omega_{NL} = \omega_{NL} \frac{r_0}{h} \sqrt{12\rho(1-\nu^2)/E})$$

توخالی

تعداد گره‌ها	توپر	توخالی
۱۲	۱,۴۲۶۱۵۹۰۳	۱,۳۷۶۷۳۹۶۳
۱۴	۱,۴۲۶۱۱۴۶۱	۱,۳۷۶۷۱۸۹۷
۱۶	۱,۴۲۶۰۵۱۰۳	۱,۳۷۶۷۰۳۶۲
۱۸	۱,۴۲۶۰۵۱۱۷	۱,۳۷۶۶۹۱۶۸
۲۰	۱,۴۲۶۰۲۱۸۷	۱,۳۷۶۶۸۲۱۳
۲۲	۱,۴۲۵۹۸۲۴۱	۱,۳۷۶۶۷۴۳۳

ضرایب جرم ( $M_{ij}$ )، سفتی ( $K_{ij}$ ) و میرایی ( $C_{ij}$ ) در ضمیمه B آمده است.

جابجایی گره‌ها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Gamma_j(r, z, t) &= \Gamma_j(r, z, t) e^{i\Omega_{NL}t}, \\ Y_j(r, z, t) &= Y_j(r, z, t) e^{i\Omega_{NL}t}, \\ \Psi_j(r, z, t) &= \Psi_j(r, z, t) e^{i\Omega_{NL}t} \end{aligned} \quad (26)$$

فرکانس طبیعی میکرو ورق دایره‌ای به صورت معادله زیر

محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} (i\Omega_{NL})^2 \\ &+ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} (i\Omega_{NL})^2 + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_j \\ Y_j \\ \Psi_j \end{Bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} K_{11N} & K_{12N} & K_{13N} \\ K_{21N} & K_{22N} & K_{23N} \\ K_{31N} & K_{32N} & K_{33N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_j \\ Y_j \\ \Psi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

ضرایب مختلف در ضمیمه B لیست شده‌اند.

به منظور حل معادلات غیرخطی بالا از روش تکرار نیوتن-رافسون استفاده می‌شود. در این الگوریتم ابتدا یک حدس اولیه از جواب معادله بالا (فرکانس خطی) فرض می‌شود، با استفاده از آن، فرکانس غیرخطی به دست می‌آید و در مرحله بعد به جای آن فرکانس فرض شده، قرار می‌گیرد و این روند تا همگرایی جواب ادامه پیدا می‌کند.

## نتایج

در ابتدا، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ( $\Omega$ ) ورق دایره‌ای توپر بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول برای شرایط مرزی مختلف و نسبت شعاع‌های بیرونی به ضخامت مقایسه می‌شوند. شرایط مرزی گیردار در مرکز میکرو ورق دایره‌ای توپر در نظر گرفته می‌شود. جدول ۱ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعدی حاضر و سایر نتایج محققان را فهرست کرده است. توافق خوبی بین آن‌ها مشاهده می‌شود. در این جدول واضح است که با افزایش نسبت شعاع‌های بیرونی به ضخامت برای عدد مود، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد. پس از آن، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد.

جدول ۱- فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق دایره‌ای بر اساس FSDT

شرایط مرزی	شماره مود	$r_o / h = 10$		$r_o / h = 4$	
		نتایج لیبو	نتایج حاضر [۴۳]	نتایج شجاعی	نتایج فرد [۴۴]
گیردار	۱	۹/۹۴۰	۹/۸۳۵	۸/۸۰۶	۸/۵۲۶
	۲	۳۶/۴۷	۳۵/۷۲۹	۲۷/۲۵۳	۲۷/۹۷۰



سخت کننده متقارن غیرخطی مختلف نشان می دهند. از شکل های ۲ و ۳، می توان دریافت که با در نظر گرفتن فنرهای غیرخطی و خطی متقارن ( $k_2 = 0, k_3 \neq 0$ ) در حضور پارامتر مقیاس کوچک ( $l \neq 0$ ) بالاترین فرکانس غیرخطی بی بعد مربوط به بستر غیرخطی با فنر سخت شونده متقارن ( $k_2 = 0, k_3 > 0$ ) است. پس از آن، فرکانس غیرخطی بی بعد برای بستر با فنر خطی ( $k_3 = 0, k_2 = 0$ ) یا (بستر وینکلر  $k_1 \neq 0, k_3 = k_2 = 0$ ) و سپس بستر غیرخطی با فنر نرم شونده متقارن ( $k_3 < 0, k_2 = 0$ ) دارای مقادیر بالاتری است. ثابت فنر غیرخطی متقارن رفتار فرکانس غیرخطی بی بعد را به هم می ریزد و فرکانس غیرخطی بی بعد از بستر فنر متقارن دارد. این نتایج نشان می دهند که با تنظیم سه ثابت فنر در کنار هم می توان فرکانس غیرخطی را تغییر داد. همچنین برای نسبت شعاع به ضخامت بالاتر اثرات بستر غیرخطی بر فرکانس غیرخطی با اثرات بستر خطی یا وینکلر یکسان است. هم چنین با توجه به شکل های ۲ و ۳، مشخص است که بعد از نسبت شعاع خارجی به ضخامت بزرگ تر از ۲۰، نتایج فرکانس غیرخطی برای بسترهای متقارن نرم شونده و سخت شونده بسیار به یکدیگر نزدیک هستند و تفاوت آنچنانی بین آن ها مشاهده نمی شود. این رفتار به این علت است که نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول برای ورق های متوسط نتایج دقیق تری دارد و با افزایش نسبت شعاع به ضخامت نتایج به هم نزدیک ترند.

جدول ۵ فرکانس های غیرخطی بی بعد میکرو ورق دایره ای توخالی را برای نسبت شعاع بیرونی به ضخامت مختلف نشان می دهد. مطابق انتظار و با توجه به این شکل، هر چه قدر نسبت شعاع بیرونی به ضخامت میکروورق دایره ای توخالی افزایش می یابد، استحکام آن کاهش و در نتیجه فرکانس غیر خطی بی بعد کاهش می یابد.

جدول ۴- فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد

$$(\Omega_{NL} = \omega_{NL} \frac{r_0}{h} \sqrt{12\rho(1-\nu^2)/E})$$

برای شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی			$w/h$
آزاد- آزاد	ساده-ساده	گیردار-گیردار	
۱,۳۷۵۰	۱,۳۷۳۸	۱,۳۶۰۷	۰/۲
۱,۳۵۸۳	۱,۳۵۹۸	۱,۳۷۴۲	۰/۶
۱,۳۷۵۰	۱,۳۵۸۷	۱,۳۵۹۸	۱
۱,۳۷۴۹	۱,۳۶۰۹	۱,۳۶۴۰	۱/۴

۱,۳۷۶۶۶۷۸۲	۱,۴۲۵۹۷۲۸۸	۲۴
۱,۳۷۶۶۶۲۳۲	۱,۴۲۵۹۷۶۱۲	۲۶

جدول ۳ و ۴ فرکانس های غیرخطی بی بعد میکرو ورق دایره ای توپر و توخالی را به ترتیب برای شرایط مرزی مختلف گیردار، ساده و آزاد ( $FF$  و  $SS, CC$ ) نشان می دهند. حروف  $S$  و  $F, C$  به ترتیب نشان دهنده شرایط مرزی گیردار، آزاد و ساده در مرز مورد نظر هستند.  $FF$  و  $SS, CC$  به ترتیب در مرزهای داخلی و خارجی به معنی گیردار-گیردار، تکیه گاه ساده-ساده و آزاد-آزاد هستند. همچنین، شرایط مرزی گیردار در مرکز میکرو ورق دایره ای توپر در نظر گرفته می شود. همان طور که در جدول ۳ مشاهده می شود، بالاترین و کمترین فرکانس غیرخطی بی بعد میکرو ورق دایره ای توپر مربوط به شرایط مرزی  $FF$  و  $SS$  است. طبق جدول ۴، برای میکرو ورق دایره ای توخالی بعد از شرایط مرزی  $FF$ ، بالاترین مقادیر برای شرایط مرزی  $CC$  و کوچک ترین آن ها مربوط به شرایط مرزی  $SS$  است. این نشان دهنده تغییر رفتار میکروورق دایره ای به واسطه وجود پارامترهای بستر غیرخطی و تاثیر آن بر فرکانس غیرخطی بی بعد میکروورق دایره ای است. برای میکروورق دایره ای توپر در شرایط مرزی گیردار-آزاد، فرکانس غیرخطی بی بعد تغییراتی زیادی بر حسب نسبت ماکزیمم انحراف به ضخامت ندارد. علت این رفتار، تاثیر بیشتر پارامترهای بستر غیرخطی بر فرکانس غیرخطی بی بعد در این شرایط مرزی است.

جدول ۳- فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد

$$(\Omega_{NL} = \omega_{NL} \frac{r_0}{h} \sqrt{12\rho(1-\nu^2)/E})$$

شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی			$w/h$
گیردار-گیردار	گیردار-ساده	گیردار-آزاد	
۱,۴۰۸۵	۱,۴۱۲۹	۱,۴۲۲۳	۰/۲
۱,۴۱۲۲	۱,۴۱۷۱	۱,۴۲۲۳	۰/۶
۱,۳۹۰۶	۱,۴۱۳۶	۱,۴۲۲۳	۱
۱,۳۸۰۴	۱,۴۰۴۰	۱,۴۲۲۳	۱/۴
۱,۳۳۱۳	۱,۳۹۷۸	۱,۴۲۲۳	۱/۸
۱,۴۲۵۵	۱,۴۱۰۶	۱,۴۲۲۳	۲

شکل های ۲ و ۳ فرکانس غیرخطی بی بعد میکرو ورق دایره ای توپر و توخالی را به ترتیب برای ثابت های فنر

۱,۳۷۵۰	۱,۳۴۷۵	۱,۳۷۶۷	۱/۸
۱,۳۷۴۹	۱,۳۵۸۳	۱,۳۷۱۹	۲

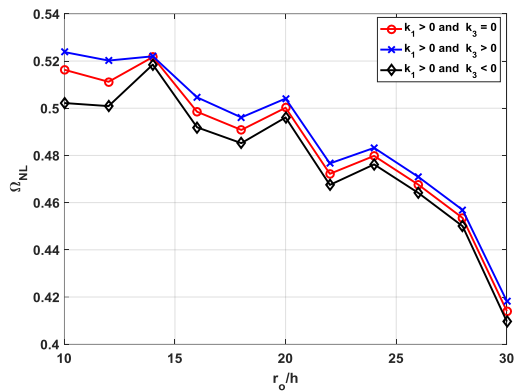
شکل‌های ۴ و ۵ فرکانس غیرخطی میکرو ورق دایره‌ای توپر و توخالی را به ترتیب برای ثابت‌های فنر غیرخطی سخت شونده و نرم شونده نامتقارن مختلف نشان می‌دهند. در شکل‌های ۴ و ۵، بدیهی است که فنر غیرخطی سخت شونده دارای بالاترین فرکانس غیرخطی بی‌بعد در  $w/h$  مختلف است.

جدول ۵- فرکانس طبیعی غیرخطی بی‌بعد

$$(\Omega_{NL} = \omega_{NL} \frac{r_0}{h} \sqrt{12\rho(1-\nu^2)/E})$$

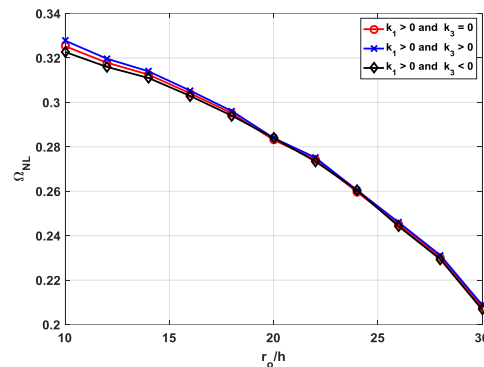
برای نسبت‌های  $r_0/r_i$  مختلف

فرکانس طبیعی غیرخطی بی‌بعد	$r_0/r_i$
۱,۴۱۸۱	۰/۲
۱,۴۰۷۹	۰/۳
۱,۳۹۳۸	۰/۴
۱,۳۷۶۶	۰/۵
۱,۳۵۷۲	۰/۶
۱,۳۳۶۱	۰/۷
۱,۳۱۴۲	۰/۸
۱,۲۹۲۰	۰/۹



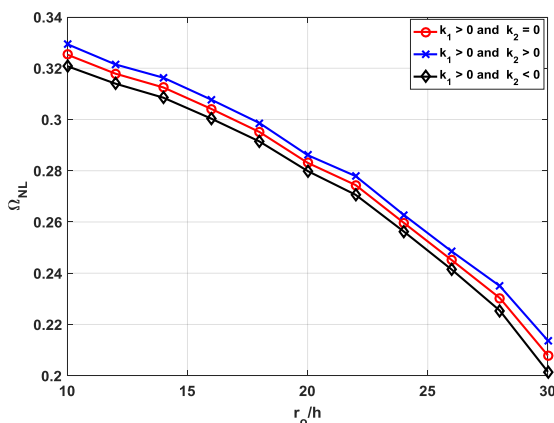
شکل ۳- تأثیر فنرهای نرم شونده و سخت شونده بستر غیرخطی متقارن بر فرکانس غیرخطی بی‌بعد میکرو ورق دایره‌ای توخالی ( $k_1 = 1e10 N/m^3, k_3 = 1e15 N/m^3$ )

اثر فنر سخت شونده نامتقارن بر فرکانس غیرخطی بی‌بعد برای  $w/h$  مختلف غالب است. این به دلیل این واقعیت است که فنر سخت شونده با افزایش دامنه ارتعاشات هماهنگی بیشتری دارد. علاوه بر این، برای میکرو ورق دایره‌ای توخالی، رفتاری تصادفی برای فرکانس غیرخطی بی‌بعد میکرو ورق دایره‌ای توخالی در بستر غیرخطی نامتقارن سخت کننده و نرم کننده دیده می‌شود. با توجه به هر دو شکل مشخص است که اثر بستر غیرخطی نامتقارن سخت شونده بر فرکانس غیرخطی میکرو ورق‌ها بیشتر از اثر بستر خطی و بستر غیرخطی نامتقارن نرم شونده است. با توجه به ماهیت بستر نامتقارن با مرتبه دوم در شکل ۵ مشاهده می‌شود که تغییراتی نامنظم برای نسبت شعاع خارجی به ضخامت میکرو ورق دایره‌ای توخالی برای بستر نامتقارن نرم شونده ایجاد شده است که ناشی از اثرات ناگهانی این بستر بر فرکانس غیرخطی میکرو ورق دایره‌ای توخالی است.

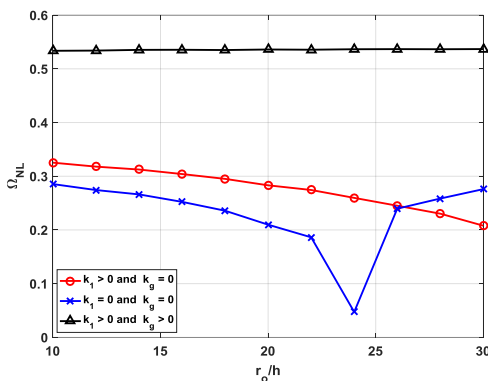


شکل ۲- تأثیر فنرهای نرم شونده و سخت شونده بستر غیرخطی متقارن بر فرکانس غیرخطی بی‌بعد میکرو ورق دایره‌ای توپر

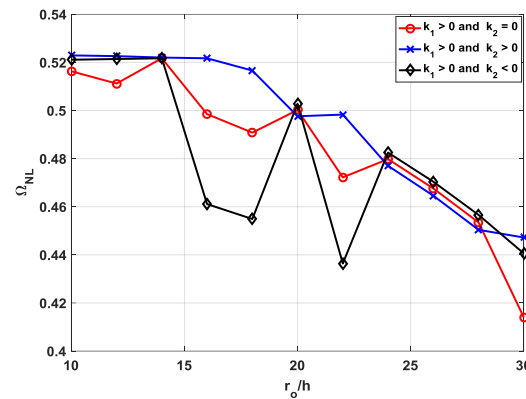
$$(k_1 = 1e10 N/m^3, k_3 = 1e15 N/m^3)$$



(فتر خطی)، بون بستر و بستر پاسترناک (فتر خطی و لایه برشی) آورده شده است. با توجه به هندسه میکرو ورق توخالی اثرات مختلفی مشاهده می‌شود در حالت بدون بستر مطابق با واقعیت و فیزیک هر چه قدر نسبت شعاع به ضخامت افزایش یابد میکروورق نازک‌تر شده است و سفتی کمتری خواهد داشت بنابراین تا نسبت شعاع بیرونی به ضخامت برای ورق متوسط نظریه تغییر شکل برشی مناسب پاسخ داده است. همچنین مطابق انتظاری که از اضافه نمودن بستر می‌رود در این شکل مشخص است که فرکانس غیرخطی بی‌بعد در مقادیر بالاتر از فرکانس غیرخطی بی‌بعد حالت بدون بستر است. همچنین در نظر گرفتن هر دو بستر فتر خطی و لایه برشی باعث استحکام سازه و تغییر روند فرکانس غیرخطی بی‌بعد شده است.



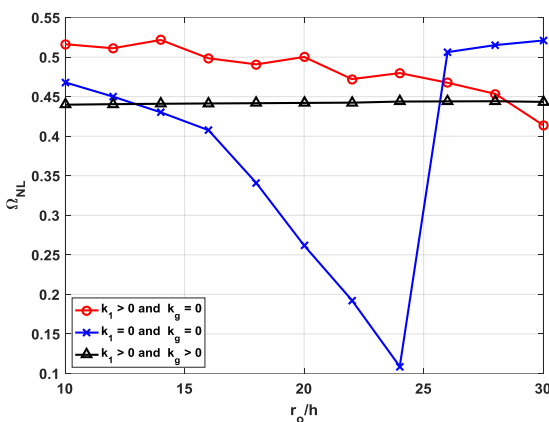
شکل ۴- تأثیر فنرهای نرم شونده و سخت شونده بستر غیرخطی نامتقارن بر فرکانس غیرخطی بی‌بعد میکرو ورق دایره‌ای توپر ( $k_1 = 1e10 N / m^3, k_2 = 1e10 N / m^3$ )



شکل ۵- تأثیر فنرهای نرم شونده و سخت شونده بستر غیرخطی نامتقارن بر فرکانس غیرخطی بی‌بعد میکرو ورق دایره‌ای توخالی ( $k_1 = 1e10 N / m^3, k_2 = 1e10 N / m^3$ )

شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب اثر ثابت لایه برشی را بر روی فرکانس غیرخطی بی‌بعد میکرو ورق دایره‌ای توپر و توخالی نشان می‌دهند. از شکل ۶ می‌توان مشاهده کرد که در نظر گرفتن ثابت لایه برشی، فرکانس غیرخطی بی‌بعد را برای نسبت‌های مختلف شعاع خارجی به ضخامت به ضخامت بهبود می‌بخشد و فرکانس غیرخطی بی‌بعد به سمت مقادیر بالاتر می‌رود. همچنین اثر آن با وجود بستر خطی یا ثابت فتر وینکلر برای میکرو ورق دایره‌ای توپر بیشتر است. با توجه به شکل ۶ در حالتی که میکروورق دایره‌ای توپر بر روی بستری قرار نگرفته است برای نسبت شعاع خارجی به ضخامت بالاتر از ۲۰ تغییر رفتار مشاهده می‌شود که این رفتار به این علت است که نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول برای ورق‌های متوسط کاربرد دارد و برای ورق‌های نازک نتایج معتبری نمی‌دهد با اضافه شدن بسترهای خطی یا لایه برشی این رفتار نیز اصلاح شده است. همچنین برای میکرو ورق دایره‌ای توخالی در شکل ۷، در نظر گرفتن ثابت لایه برشی، فرکانس غیرخطی بی‌بعد را افزایش می‌دهد اما اثر ثابت فتر خطی یا بستر وینکلر بر فرکانس غیرخطی بی‌بعد بیشتر از اثر ثابت برشی بر آن است. همچنین، در مقایسه با میکرو ورق دایره‌ای توخالی، ثابت لایه برشی اثر افزایشی بیشتری بر فرکانس غیرخطی بی‌بعد میکرو ورق دایره‌ای توپر دارد. در این شکل ۷ سه حالت بستر وینکلر

شکل ۶- تأثیر ثابت لایه برشی بر فرکانس غیرخطی بی‌بعد میکرو ورق دایره‌ای توپر ( $k_1 = 1e10 N / m^3, k_g = 1e10 N / m$ )



شکل ۷- تأثیر ثابت لایه برشی بر فرکانس غیرخطی بی‌بعد میکرو ورق دایره‌ای توخالی ( $k_1 = 1e10 N / m^3, k_g = 1e10 N / m$ )

فرکانس طبیعی غیرخطی میکرو ورق با استفاده از الگوریتم تکراری نیوتن-رافسون حل شد. تأثیر پارامترهای هندسی، میرایی سازه و بستر و پارامترهای بستر فتر غیرخطی بر فرکانس غیرخطی انجام شد. نتایج قابل توجه زیر به دست آمد:

۱- شرایط مرزی  $FF$  و  $SS$  برای تئوری تنش کوپل اصلاح شده به ترتیب دارای بالاترین و کمترین فرکانس های غیرخطی بی بعد میکرو ورق دایره ای توپر و توخالی هستند.

۲- برای بستر غیرخطی متقارن، در حضور پارامتر مقیاس کوچک ( $l \neq 0$ )، بزرگ ترین و کوچک ترین فرکانس غیرخطی بی بعد مربوط به بستر غیرخطی با فتر سخت شونده ( $k_2 = 0, k_3 > 0$ ) و بستر غیرخطی با فتر نرم شونده ( $k_2 = 0, k_3 < 0$ ) است.

۳- اثر بستر سخت شونده با ثابت فنری نامتقارن ( $k_1 \neq 0, k_2 < 0$ ) نسبت به سایر بسترهای غیرخطی نامتقارن بر فرکانس غیرخطی میکرو ورق دایره ای توپر و توخالی غالب است.

۴- اثر لایه برشی در کنار ثابت فنر خطی یا ثابت وینکلر بر فرکانس غیرخطی بی بعد میکرو ورق دایره ای توپر و توخالی قابل ملاحظه است.

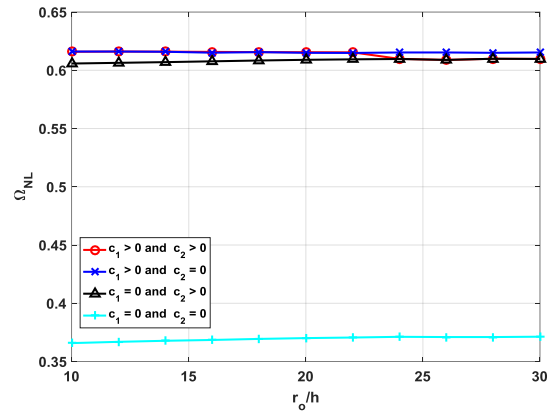
۵- فرکانس غیرخطی بی بعد میکرو ورق دایره ای توپر و توخالی با حضور میرایی بستر افزایش می یابد.

### پی نوشت ها

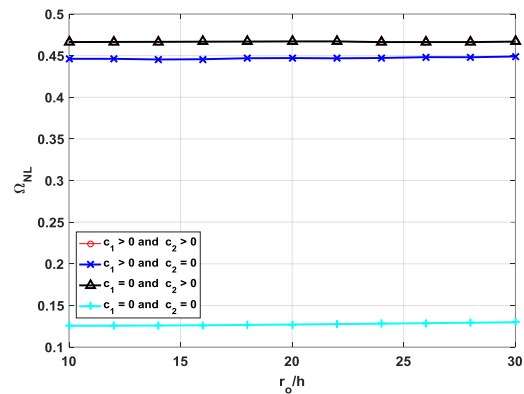
$$\begin{aligned}
 A_0^i &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} K_i Q_i dz, B_0^i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} K_i K_i Q_i dz, C_0^i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} K_i K_i Q_i dz, D_0^i = k_i \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} K_i K_i Q_i dz, \\
 E_{0i} &= k_i \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} K_i K_i Q_{0i} dz, D_{0i}^1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(K_i - 2)^2}{8} 2l_0^2 G dz, D_{0i}^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(K_i - 2)K_i}{8} 2l_0^2 G dz, \\
 D_{0i}^3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{K_i K_i}{8} 2l_0^2 G dz, D_{0i}^4 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{K_i K_i}{8} 2l_0^2 G dz, E_{0i}^1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{K_i K_i}{8} 2l_0^2 G dz, N_{0i}^1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_i(z) \Delta T Q_i dz, \\
 N_{0i}^2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_i(z) \Delta T Q_i dz, M_{0i}^1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_i(z) \Delta T Q_i K_i dz, M_{0i}^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_i(z) \Delta T Q_i K_i dz, \\
 P_{0i}^1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_i(z) \Delta T Q_i K_i dz, P_{0i}^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_i(z) \Delta T Q_i K_i dz
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \int_{\Omega} (-N_w v_0 \partial_r z_1) ndr, M_{12} = \int_{\Omega} (-N_w v_1 \partial_r z_2) ndr, M_{13} = \int_{\Omega} (-N_w v_2 \partial_r z_3) ndr \\
 K_{11} &= \int_{\Omega} \left( \partial_r N_w A_{11}^0 \partial_r z_1 + \partial_r N_w \frac{A_{12}^0}{r} z_1 + \frac{1}{r} N_w A_{12}^0 \partial_r z_1 + N_w \frac{1}{r} \frac{A_{33}^0}{r} z_1 \right. \\
 &\quad \left. + (-N_w^T \partial_r z_1 - N_w^T \frac{\partial z_1}{r} - N_{12}^T \partial_r z_1 - N_{12}^T \frac{\partial z_1}{r}) N_w \right) ndr \\
 K_{12} &= \int_{\Omega} \left( \partial_r N_w \frac{A_{12}^0}{r} z_2 + \partial_r N_w A_{11}^0 \partial_r z_2 + N_w \frac{1}{r} A_{12}^0 \partial_r z_2 + N_w \frac{1}{r} \frac{A_{33}^0}{r} z_2 \right) ndr \\
 K_{13} &= \int_{\Omega} \left( \partial_r N_w A_{11}^0 \partial_r z_3 + \partial_r N_w \frac{A_{12}^0}{r} z_3 + N_w \frac{1}{r} A_{12}^0 \partial_r z_3 + N_w \frac{1}{r} \frac{A_{33}^0}{r} \partial_r z_3 \right) ndr \\
 K_{13w} &= \int_{\Omega} \left( \partial_r N_w \frac{1}{2} a_1 (\partial_r z_3)^2 A_{11}^0 + N_w \frac{1}{2} a_1 (\partial_r z_3)^2 A_{12}^0 \right) ndr \\
 C_{11} &= c_1 K_{11}, C_{12} = c_1 K_{12}, C_{13} = c_1 K_{13}, z_1 = \sum_{j=1}^6 N_{wj}, z_2 = \sum_{j=1}^6 N_{wj}, z_3 = \sum_{j=1}^6 N_{wj}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

اثرات میرایی میکرو ورق ( $c_1$ ) و بستر ( $c_2$ ) بر فرکانس غیرخطی بی بعد در شکل های ۸ و ۹ نشان داده شده است. با توجه به این شکل ها، در نظر گرفتن میرایی بستر، فرکانس غیرخطی بی بعد میکرو ورق های دایره ای توخالی و توپر را افزایش می دهد. مشاهده می شود که میرایی بستر بر هر دو فرکانس غیرخطی بی بعد میکرو ورق های دایره ای توخالی و توپر تأثیر معنی داری دارد و تأثیر آن قابل ملاحظه است.



شکل ۸- تأثیر میرایی سازه و بستر بر فرکانس غیرخطی بی بعد میکرو ورق دایره ای توپر ( $c_1 = 0.001 N \cdot sec/m, c_2 = 0.04 N \cdot sec/m$ )



شکل ۹- تأثیر میرایی سازه و بستر بر فرکانس غیرخطی بی بعد میکرو ورق دایره ای توخالی ( $c_1 = 0.001 N \cdot sec/m, c_2 = 0.04 N \cdot sec/m$ )

### نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاشات غیرخطی میکرو ورق دایره ای توپر و توخالی واقع بر روی بستر غیرخطی بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و نظریه تنش کوپل اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفت. روش اجزای محدود برای حل معادلات به دست آمده از اصل همیلتون توسعه داده شده است، سپس

conversion”, Current Opinion Chemistry Engineering, Vol.17, pp. 108-125, 2017

[3]. Tang, X., Hu, Z., Yuan, W., Hu, W., Haibing, S., Han, D., Zheng, J., Hao, J., Zang, Z., Du, J., Leng, Y., Fang, L., Zhou, M., “Perovskite CsPb2Br5 Microplate Laser with Enhanced Stability and Tunable Properties”, Advanced Optic and Material, Vol. 5, No. 3, 1600788, 2019.

[4]. Qi, Y., Xu, S., Huang, D., “Investigation on aerodynamic performance of horizontal axis wind turbine by setting micro-plate in front of the blade leading edge”, Renewable Energy, Vol. 179, pp. 2309-2321, 2021

[5]. Kim, H. S., Ma, P. S., Kim, B. K., Lee, S.H., Seo, Y.H., “Sound transmission loss of multi-layered elastic micro-perforated plates in an impedance tube”, Applied Acoustic, Vol. 166, 107348, 2020

[6]. Maury, C., Bravo, T., “Wideband sound absorption and transmission through micro-capillary plates: Modelling and experimental validation”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 478, 115356, 2020

[7]. Temur, K., Imeci, S. T., “Tri resonance multi slot patch antenna”, Heritage Sustainable Deviation, Vol. 2 No. 1, pp. 30-37, 2020

[8]. Shittu, S., Li, G., Zhao, X., Zhou, J., Ma, X., Golizadeh Akhlaghi, Y., “Experimental study and exergy analysis of photovoltaic-thermoelectric with flat plate micro-channel heat pipe”, Energy Conversion Management, Vol. 207, 112515, 2020

[9]. Feng, X., Xin, G., “Experimental Study on Ultrasonic Vibration-Assisted WECDM of Glass Microstructures with a High Aspect Ratio”, Micromachines, Vol. 12, No. 2, 125, 2021

[10]. Qi, Y., Xu, S., Huang, D., “Investigation on aerodynamic performance of horizontal axis wind turbine by setting micro-plate in front of the blade leading edge”, Renewable Energy, Vol. 179, pp. 2309-2321, 2021

[11]. Yao, T., Ouyang, H., Dai, S., Deng, Z., Zhang, K., “Effects of manufacturing micro-structure on vibration of FFF 3D printing plates: Material characterisation,

$$\begin{aligned}
 M_{21} &= \int_0^{\zeta} (-N_{wi} v_r \partial_r z_1) ndr, M_{22} = \int_0^{\zeta} (-N_{wi} v_r \partial_r z_2) ndr, M_{23} = \int_0^{\zeta} (-N_{wi} v_r \partial_r z_3) ndr \\
 K_{21} &= \int_0^{\zeta} \left( \partial_r N_{wi} \frac{C_{12}^0}{r} z_1 + \frac{\partial N_{wi}}{\partial r} C_{11}^0 \partial_r z_1 + N_{wi} \frac{1}{r} \frac{C_{22}^0}{r} z_1 + \frac{1}{r} N_{wi} C_{12}^0 \partial_r z_1 \right) ndr \\
 K_{22} &= \int_0^{\zeta} \left( \partial_r N_{wi} \frac{C_{22}^0}{r} z_2 + \frac{\partial N_{wi}}{\partial r} C_{21}^0 \partial_r z_2 + N_{wi} \frac{1}{r} \frac{C_{33}^0}{r} z_2 + N_{wi} \frac{1}{r} C_{22}^0 \partial_r z_2 + \right. \\
 &\quad \left. N_{wi} E_{33}^0 z_2 + \partial_r N_{wi} D_{22}^0 \partial_r z_2 + N_{wi} E_{11}^0 z_2 + \right. \\
 &\quad \left. (-P_{11}^T \partial_r z_2 - P_{12}^T \frac{\partial z_2}{r} - P_{21}^T \partial_r z_2 - P_{22}^T \frac{\partial z_2}{r}) N_{wi} \right) ndr \\
 K_{23} &= \int_0^{\zeta} \left( \partial_r N_{wi} \frac{C_{12}^0}{r} \partial_r z_3 + \partial_r N_{wi} C_{11}^0 \partial_r z_3 + N_{wi} \frac{1}{r} \frac{C_{22}^0}{r} \partial_r z_3 + \frac{1}{r} N_{wi} C_{12}^0 \partial_r z_3 \right) ndr \\
 &\quad \left( + N_{wi} D_{22}^0 \partial_r z_3 + \partial_r N_{wi} D_{33}^0 \partial_r z_3 + N_{wi} D_{11}^0 \partial_r z_3 \right) ndr \\
 K_{23V} &= \int_0^{\zeta} \left( \partial_r N_{wi} \frac{1}{2} a_1 (\partial_r z_3)^2 C_{11}^0 + N_{wi} \frac{1}{2} a_1 (\partial_r z_3)^2 C_{12}^0 \right) ndr \\
 C_{21} &= c_1 K_{21}, C_{22} = c_1 K_{22}, C_{23} = c_1 K_{23}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
 M_{31} &= \int_0^{\zeta} (v_r \partial_r N_{wi} \partial_r z_1) ndr, M_{32} = \int_0^{\zeta} (v_r \partial_r N_{wi} \partial_r z_2) ndr, \\
 M_{33} &= \int_0^{\zeta} (-v_r \partial_r z_3 + v_r \partial_r N_{wi} \partial_r z_3) ndr \\
 K_{31} &= \int_0^{\zeta} \left( B_{11}^0 \partial_r N_{wi} \partial_r z_1 + \frac{B_{12}^0 \partial_r^2 N_{wi}}{r \partial r^2} z_1 + \frac{B_{12}^0}{r} \partial_r N_{wi} \partial_r z_1 + \partial_r N_{wi} \frac{B_{22}^0}{r} \frac{1}{r} z_1 \right) ndr \\
 K_{32} &= \int_0^{\zeta} \left( B_{11}^0 \partial_r N_{wi} \partial_r z_2 + \frac{B_{12}^0}{r} \partial_r N_{wi} z_2 + \frac{B_{22}^0}{r^2} \partial_r N_{wi} z_2 + D_{11}^0 \partial_r N_{wi} z_2 + \right. \\
 &\quad \left. D_{22}^0 \partial_r N_{wi} z_2 + D_{33}^0 \partial_r N_{wi} \partial_r z_2 + \frac{B_{12}^0}{r} \partial_r N_{wi} \partial_r z_2 \right) ndr \\
 K_{31V} &= \int_0^{\zeta} \left( \partial_r N_{wi} a_1 \partial_r z_3 A_{11}^0 \frac{\partial z_1}{\partial r} + \partial_r N_{wi} a_1 \partial_r z_3 \frac{A_{12}^0}{r} z_1 \right) ndr \\
 K_{32V} &= \int_0^{\zeta} \left( \partial_r N_{wi} a_1 \partial_r z_3 A_{11}^0 \partial_r z_2 + \partial_r N_{wi} a_1 \partial_r z_3 \frac{A_{12}^0}{r} z_2 \right) ndr \\
 C_{31} &= c_1 K_{31}, C_{32} = c_1 K_{32}, C_{33} = c_1 K_{33} - c_2 \partial_r z_3 N_{wi}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
 K_{33} &= \int_0^{\zeta} \left( B_{11}^0 \partial_r N_{wi} \partial_r z_3 + \frac{B_{12}^0}{r} \partial_r N_{wi} \partial_r z_3 + \frac{B_{12}^0}{r} \partial_r N_{wi} \partial_r z_3 + \right. \\
 &\quad \left. D_{22}^0 \partial_r N_{wi} \partial_r z_3 - N_{wi} k_r \partial_r z_3 + \frac{B_{12}^0}{r^2} \partial_r N_{wi} \partial_r z_3 + D_{22}^0 \partial_r N_{wi} \partial_r z_3 \right. \\
 &\quad \left. + N_{wi} k_r z_3 + D_{24}^0 \partial_r N_{wi} \partial_r z_3 - \frac{N_{wi} k_r}{r} \partial_r z_3 + \right. \\
 &\quad \left. (-M_{11}^T \partial_r z_3 - M_{12}^T \frac{1}{r} \partial_r z_3 - M_{12}^T \partial_r z_3 - M_{22}^T \frac{1}{r} \partial_r z_3) N_{wi} \right) ndr \\
 K_{33V} &= \int_0^{\zeta} \left( \frac{1}{2} \partial_r N_{wi} a_1 (\partial_r z_3)^2 B_{11}^0 \pm k_2 (z_3)^2 N_{wi} + \partial_r N_{wi} \partial_r \sum_{j=1}^4 N_{wi} A_{1j}^0 a_j \partial_r z_3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \partial_r N_{wi} \partial_r z_3 a_1 (\partial_r z_3)^2 A_{11}^0 \pm k_3 (z_3)^3 N_{wi} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} \partial_r N_{wi} \frac{1}{r} a_1 (\partial_r z_3)^2 B_{12}^0 + \partial_r N_{wi} a_1 \partial_r z_3 \frac{A_{12}^0}{r} \partial_r z_3 \right) ndr
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

منابع و مراجع

[1]. Solovyev, A. N., Duong, L.V., “Optimization for the Harvesting Structure of the Piezoelectric Bimorph Energy Harvesters Circular Plate by Reduced Order Finite Element Analysis”, International Journal of Applied Mechanic, Vol. 8, No. 3, 1650029, 2016

[2]. Dittmeyer, R., Boeltken, T., Piermartini, P., Selinsek, M., Loewert, M., Dallmann, F., Kreuder, H., Cholewa, M., Wunsch, A., Belimov, M., Farsi, S., Pfeifer, P., “Micro and micro membrane reactors for advanced applications in chemical energy

- [20]. Reddy, J. N., Romanoff, J., Loya, J.A., "Nonlinear Finite Element Analysis of Functionally Graded Circular Plates with Modified Couple Stress Theory", *European Journal of Mechanics A Solids*, Vol. 56, pp. 92-104, 2016
- [21]. Askari, A. R., "Bi-stability of pressurized electrically actuated flat micro-plates", *International Journal of Solids Structures*, Vol. 178-179, 167-179, 2019
- [22]. Beg, M. S., Yasin Y.M., "Bending, free and forced vibration of functionally graded deep curved beams in thermal environment using an efficient layerwise theory", *Mechanics of Material*, Vol. 159, 103919, 2021
- [23]. Wang, K. F., Wang, B., Zhang, C., "Surface energy and thermal stress effect on nonlinear vibration of electrostatically actuated circular micro-/nanoplates based on modified couple stress theory", *Acta Mechanica*, Vol. 228, 129-140, 2017
- [24]. Mahinzare, M., Ranjbarpur, H., Ghadiri, M., "Free vibration analysis of a rotary smart two directional functionally graded piezoelectric material in axial symmetry circular nanoplate", *Mechanics of Systems and Signal Processing*, Vol. 100, pp. 188-207, 2018
- [25]. Javani, M., Kiani, Y., Eslami, M. R., "Large amplitude thermally induced vibrations of temperature dependent annular FGM plates", *Composites Part B*, Vol. 163, pp. 371-383, 2019
- [26]. Ouakad, H. M., Valipour, A., Żur, K. K., Sedighid, H. M., Reddy, J. N., "On the nonlinear vibration and static deflection problems of actuated hybrid nanotubes based on the stress-driven nonlocal integral elasticity", *Mechanics of Material*, Vol. 148, 103532, 2020
- [27]. Mohamadi, A., Shahgholi, M., Ashenai Ghasemi, F., "Nonlinear vibration of axially moving simply-supported circular cylindrical shell", *Thin Walled Structures*, Vol. 156, 107026, 2020
- [28]. Roshanbakhsh, M. Z., Tavakkoli, S. M., Navayi Neya, B., "Free vibration of functionally graded thick circular plates: An exact and three-dimensional solution", *International Journal of Mechanics Sci.*, Vol. 188, 105967, 2020
- numerical analysis and experimental study*", *Composite Structure*, Vol. 268, 113970, 2021
- [12]. Wang, H., Zhang, M., Gao, J., Lan, Y., Zuo, Y., Zheng, X., "Applications of the elastic modes of a circular plate in wavefront correction of the adaptive optics and the active optics", *Optics Express*, Vol. 29, No. 2, pp. 1109-1124, 2021
- [13]. Kang, J.H., "Three-dimensional vibration analysis of thick, circular and annular plates with nonlinear thickness variation", *Composite Structure*, Vol. 81, pp. 1663-1675, 2003
- [14]. Haterbouch, M., Benamar, R., "The effects of large vibration amplitudes on the axisymmetric mode shapes and natural frequencies of clamped thin isotropic circular plates, part I: iterative and explicit analytical solution for non-linear transverse vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 265, pp. 123-154, 2003
- [15]. Gupta, U.S., Lal, R., Sharma, S., "Vibration analysis of non-homogeneous circular plate of nonlinear thickness variation by differential quadrature method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 298, pp. 892-906, 2006
- [16]. Nie, G.J., Zhong, Z., "Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates", *Computational Methods of Applied Mechanical Engineering*, Vol. 196, pp. 4901-4910, 2007
- [17]. Peng, J.S., Yuan, Y.Q., Yang, J., Kitipornchai, S., "A semi-analytic approach for the nonlinear dynamic response of circular plates", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, pp. 4303-4313, 2009
- [18]. Saleem, M., "Microplane modeling of the elasto-viscoplastic constitution", *Journal of Research Science Engineering Technology*, Vol. 8, No. 3, pp. 9-25, 2020
- [19]. Eltahir, M.A., Mohamed, N., Mohamed, S.A., Seddek, L.F., "Periodic and nonperiodic modes of postbuckling and nonlinear vibration of beams attached to nonlinear foundations", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 75, pp. 414-445, 2019

- circularly moving point load*”, Composite Structure., Vol. 256, 112953, 2021
- [38]. Chanda, A., Sahoo, R., “*Forced Vibration Responses of Smart Composite Plates using Trigonometric Zigzag Theory*”, International Journal of Structural Stability and Dynamics, 21, No. 5, 2150067, 2021
- [39]. Li, A., Ji, X., Zhou, S., Wang, L., Chen, J., Liu, P., “*Nonlinear axisymmetric bending analysis of strain gradient thin circular plate*”, Applied Mathematical Modelling, Vol. 89, pp. 363-380, 2021
- [40]. Shafei, E., Faroughi, S., Rabczuk, T., “*Nonlinear transient vibration of viscoelastic plates: A NURBS-based isogeometric HSDT approach*”, Computational Mathematical Applied, Vol. 84, pp. 1-15, 2021
- [41]. Hacıyev, V. C., Sofiyev, A. H., Kuruoglu, N., “*On the free vibration of orthotropic and inhomogeneous with spatial coordinates plates resting on the inhomogeneous viscoelastic foundation*”, Mechanic of Advance Material Structures, Vol. 26, No. 10, pp. 886-897, 2019
- [42]. Reddy, J. N., Romanoff, J., Loya, J. A., “*Nonlinear finite element analysis of functionally graded circular plates with modified couple stress theory*”, European Journal of Mechanics A Solids, Vol. 56, pp. 92-104, 2015
- [43]. Liew, K. M., Han, J. B., Xiao, Z. M., “*Vibration analysis of circular Mindlin plates using the differential quadrature method*”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 205, No. 5, pp. 617-630, 1997
- [44]. Shojaeefard, M. H., Saeidi Googarchin, H., Mahinzare, M., Eftekhari, S.A., “*Magnetic field effect on free vibration of smart rotary functionally graded nano/microplates: A comparative study on modified couple stress theory and nonlocal elasticity theory*”, JOURNAL OF Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 29, No. 11, pp. 2492-2507, 2018
- [29]. Sofiyev, A.H., Zerlin, Z., Kuruoglu, N., “*Dynamic behavior of FGM viscoelastic plates resting on elastic foundations*”, Acta Mechanica., Vol. 231, pp. 1-17, 2020
- [30]. Lal, R., Saini, R., “*Vibration analysis of FGM circular plates under non-linear temperature variation using generalized differential quadrature rule*”, Applied Acoustic, Vol. 158, 107027, 2020
- [31]. Yuan, Y., Li, H., Parker, R.G., Guo, Y., Wang, D., Li, W., “*A unified semi-analytical method for free in-plane and out-of plane vibrations of arbitrarily shaped plates with clamped edges*”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 485, 115-573, 2020
- [32]. Vinyas, M., “*On frequency response of porous functionally graded magneto-electroelastic circular and annular plates with different electro-magnetic conditions using HSDT*”, Composite Structure, Vol. 240, 112044, 2020
- [33]. Reddy, J.N., Nampally, P., Phan, N., “*Dual mesh control domain analysis of functionally graded circular plates accounting for moderate rotations*”, Composite Structure, Vol. 257, 113153, 2021
- [34]. Genao, F.Y., Kim, J., Žur, K.K., “*Nonlinear finite element analysis of temperature-dependent functionally graded porous micro-plates under thermal and mechanical loads*”, Composite Structure, Vol. 256, 112931, 2020
- [35]. Amabili, M., “*Nonlinear damping in nonlinear vibrations of rectangular plates: Derivation from viscoelasticity and experimental validation*”, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 118, pp. 275-292, 2018
- [36]. Tao, C., Dai, T., “*Isogeometric analysis for size-dependent nonlinear free vibration of graphene platelet reinforced laminated annular sector microplates*”, European Journal of Mechanics A Solids, Vol. 86, 104-171, 2021
- [37]. Rai, A. K., Gupta, S. S., 2021. “*Nonlinear vibrations of a polar-orthotropic thin circular plate subjected to*