

بررسی اثر تخلخل بر روی رفتار ارتعاشات آزاد سازه هدفمند ساندویچی

مصطفی لیوانی^{۱*}، محمدحسین حبیبی^۲، محمد مسکینی^۳

۱- استادیار، دانشکده هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

۳- مربی، دانشکده هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۰۳)

چکیده

در این پژوهش اثر متخلخل بودن ماده هدفمند بر روی رفتار ارتعاشات آزاد صفحه ساندویچی با رویه‌های پیزوالکتریک و هسته هدفمند مورد مطالعه قرار می‌گیرد. یک تابع تغییرشکل برشی هایپربولیک جدید در این پژوهش ارائه شده است. خواص مواد هدفمند با توزیع توان تابع تغییرات خواص در راستای ضخامت تغییر می‌کند. ساختار مواد متخلخل دارای حفره و منفذ هستند. از این رو در این پژوهش، یک مدل متخلخل خطی و دو مدل متخلخل غیرخطی در نظر گرفته شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. معادلات بدست آمده با استفاده از روش ناویر برای شرایط مرزی ساده حل گردید. اثرات پارامترهای مهم هندسی و مکانیکی شامل نسبت ضخامت به طول، نسبت طول به عرض، نسبت ضخامت هسته هدفمند به لایه پیزوالکتریک و اثر پتانسیل الکتریکی بر روی پاسخ فرکانس طبیعی ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل و رویه‌های پیزوالکتریک بررسی شده است. جهت اعتبارسنجی، نتایج تحلیلی به دست آمده در این پژوهش با نتایج ارائه شده در مقالات مقایسه شده است و در این مقایسه تطابق خوبی حاصل گردید که نشان از صحیح بودن تئوری جدید، روند استخراج و حل معادلات است.

واژه‌های کلیدی: صفحه ساندویچی، ماده متخلخل، ارتعاشات آزاد، مواد پیزوالکتریک

Abstract

In this study, the effect of FG porous on the free vibration behavior of sandwich plate with piezoelectric face sheets and FG core is studied. A new hyperbolic shear deformation function is presented in this paper. The properties of the FG core varied along the thickness according to power law. The properties of the FG material change with the power distribution as a function of the changes in properties along the thickness. The structure of porous materials has cavities and pores. Therefore, in this research, a linear porous model and two types of nonlinear porous models are considered for the property change function. The governing differential equations are derived using the Hamilton principle. The obtained equations were solved using the Navier method for simple boundary conditions. The effects of important geometric and mechanical parameters including thickness to length ratio, length to width ratio, ratio of FG core thickness to piezoelectric face sheets and the effect of electrical potential on the natural frequency response of porous FG sandwich and piezoelectric face sheets have been investigated. To verification, the analytical results obtained in this study are compared with the results presented in the literature, and in this comparison, a good agreement was obtained, which shows the correctness theory, deriving and solving equations.

Key words: Sandwich plate, porous material, free vibration, piezoelectric material

* نویسنده پاسخگو: مصطفی لیوانی، تلفن: ۰۲۱۶۶۱۹۳۵۹۲، پست الکترونیک: M.livani@ssau.ac.ir

این مقاله تحت لایسنس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لایسنس از آدرس <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمایید.



مقدمه

امروزه استفاده از ساختار ساندویچی در صنایع مختلف از جمله پانل‌های هواپیما، پانل‌های ساختمانی و برخی قطعات در خودروسازی بسیار گسترش یافته است. سازه‌های ساندویچی معمولاً از سه لایه تشکیل می‌شوند. لایه وسطی هسته نام دارد که توسط دو لایه خارجی پوشیده شده است. این لایه‌های خارجی یا همان رویه‌ها از هسته مقاوم‌تر می‌باشند. به طور خلاصه این سازه‌های ساندویچی بر خلاف وزن کم، دارای استحکام و مقاومت به نسبت بالایی می‌باشند.

مواد هدفمند که معمول‌ترین آنها شامل سرامیک و انواع فلزات هستند به صورت میکروسکوپی غیرهمگن می‌باشند. باتوجه به کاربرد ماده در شرایط خاص خود، نیاز به ویژگی‌های رفتاری متفاوت از جمله استحکام، انعطاف‌پذیری، مقاومت در برابر خمش یا کشش و ... می‌باشد که به همین دلیل در ساختار مواد هدفمند از فلزات مختلف استفاده می‌شود.

یکی از ویژگی‌های غیرمعمولی که برخی سرامیک‌ها و پلیمرها از خود نشان می‌دهند، پدیده پیزوالکتریک یا اثر فشار برقی است. با اعمال نیروی خارجی، دوقطبی‌های این سرامیک‌ها تحریک می‌شوند و میدان الکتریکی ایجاد می‌شود. وارونه کردن اثر نیرو (مثلاً از کششی به فشاری) جهت میدان را معکوس می‌کند. پیزوالکتریک از واژه‌های یونانی پیزو^۱ به معنای فشردن و الکتریک^۲ به معنی برق (منبعی از بار الکتریکی) گرفته شده‌است. اثر پیزوالکتریک، توانایی برخی مواد برای تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی می‌باشد. موادی که این پدیده را از خود بروز می‌دهند، مواد پیزوالکتریک نامیده می‌شوند. اثر پیزوالکتریک در انواع بسیاری از مواد از جمله تک بلورها، سرامیک‌ها و مواد مرکب دیده می‌شود [۱].

به علت اهمیت فراوان سازه‌های ساندویچی و مواد هدفمند، پژوهش‌های فراوانی در این خصوص صورت گرفته است.

لیوانی و ملک زاده‌فرد [۲] ارتعاشات آزاد ورق‌های ساندویچی دوانحنا با ضخامت متغیر را با استفاده از تئوری مرتبه بالا مطالعه کردند. آن‌ها معادلات دیفرانسیل حاکم بر مبنای تئوری مرتبه بالای ورق ساندویچی ارتقاء یافته و اصل

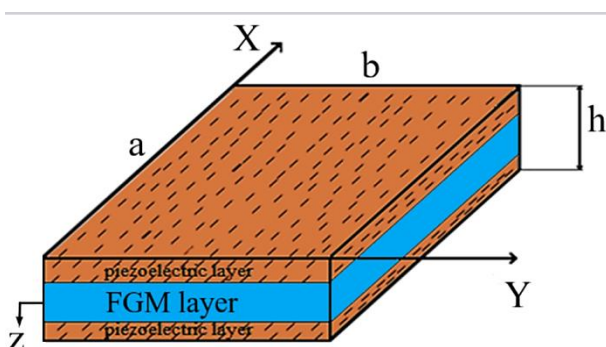
همیلتون استخراج کردند. در نهایت اثرات لایه‌چینی‌های مختلف، نسبت طول به عرض ورق، تغییر خواص مواد رویه‌ها، نسبت ضخامت‌های رویه‌ها و جنس‌های مختلف مواد رویه‌ها روی ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی دوانحنا با ضخامت متغیر بررسی کردند. تام و کین [۳] ارتعاشات آزاد تیرهای هدفمند دو جهتی را در یک محیط حرارتی تحلیل کردند. در نتایج آنها، با توجه به این که خواص مواد به دما وابسته بوده، در هر دو راستا دما با توزیع توانی تغییر پیدا کرده است. آرش و وانگ [۴] به بررسی تحقیقات در مورد کاربرد تئوری پیوسته غیرمحلی در مدل‌سازی نانولوله‌های کربنی و صفحات گرافن پرداختند. هادی و همکاران [۵] به تحلیل و بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای هدفمند که خواص‌شان بر طبق قانون تابع توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کرد، پرداختند. صفرپور و همکاران [۶] به مطالعه و بررسی وابستگی اثرات پدیده‌های کماتش و ارتعاشات آزاد به ضخامت استوانه مرکب چندلایه دارای لایه هدفمند با استفاده از روش تحلیلی پرداختند. کار و پاندا [۷] با استفاده از روش المان محدود غیرخطی، به بررسی رفتار خمشی پوسته‌های دوانحنا به هدفمند پرداختند. کیم و همکاران [۸] به بررسی ارتعاشات آزاد و کماتش دینامیکی صفحات هدفمند با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی گالرکین پرداختند. آن‌ها در پژوهش خود، تأثیر پارامترهای هندسی و دما را مورد بررسی قرار دادند. کیانی [۹] پاسخ دینامیکی پانل‌های استوانه‌ای مرکب تقویت‌شده با نانولوله هدفمند را تحت بار متحرک به دست آورده است. وانگ و همکاران [۱۰] با استفاده از یک تئوری واحد اثر همزمان ابعاد کوچک و تغییر شکل‌های برشی را بر ارتعاشات آزاد ریز پوسته‌های ضخیم استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند را بررسی کردند. خورشیدی و همکارانش [۱۱] ارتعاش میکروورق‌های هدفمند ساندویچی با لایه‌های پیزوالکتریک را بررسی کردند. احیایی و همکارانش [۱۲] ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریز پوسته‌های استوانه‌ای دولایه ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. صبحی و رادوان [۱۳] یک تئوری برای آنالیز ارتعاشات آزاد و کماتش یک

^۱ Piezo^۲ Electric

در این مقاله تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک ارائه شده برای مدل سازی میدان جابجایی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $u(x, y, t)$ و $v(x, y, t)$ توابع مجهول برای جابجایی های درون صفحه و $w(x, y, t)$ تابع مجهول برای جابجایی عرضی صفحه می باشند.



شکل ۱- هندسه ورق ساندویچی مورد مطالعه

با بررسی توابع ارائه شده در پژوهش های مختلف و مقایسه نتایج حاصل از آن ها، در این مقاله برای اولین بار برای توابع $f(z)$ و $g(z)$ روابطی به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} f(z) &= \tanh\left(\left(\frac{z}{h}\right) - 2 \times \left(\frac{z}{h}\right)^3\right) \\ g(z) &= 1 - f'(z) \end{aligned} \quad (2)$$

روابط کرنش- جابجایی را می توان به صورت زیر بیان کرد [۲]:

صفحه هدفمند ارائه کردند. آن ها با استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم را استخراج کردند و با استفاده از روش ناویر معادلات بدست آمده را حل کردند. لیوانی و همکاران [۱۴] ارتعاشات آزاد تیر هدفمند دارای ترک عرضی را بر اساس نظریه مرتبه بالای ردی با شرایط مرزی دو سرگیردار را مورد مطالعه قرار دادند. آن ها برای استخراج پاسخ فرم بسته برای فرکانس طبیعی تیر هدفمند دارای ترک عرضی، از روش ریتز استفاده کردند. تورنابن و همکارانش [۱۵] به تحلیل ارتعاشات حرارتی پانل های ساندویچی دو انتحنایه با صفحات جانبی مرکب همراه سیم های آلیاژی حافظه دار پرداختند.

با بررسی پژوهش های یاد شده در خصوص تحلیل ارتعاشات سازه های ساندویچی و مواد هدفمند مشاهده شد که نیاز به بسط یک تئوری جدید که در عین ساده بودن، بتواند اثرات مخرب پدیده ارتعاشات را بر روی مواد هدفمند متخلخل به خوبی ارزیابی کند، بیش از پیش احساس شد. در این راستا، در این مقاله تابع جدیدی ارائه خواهد شد که با استفاده از آن بتوان رفتار ارتعاشاتی ورق های ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل و رویه های پیزوالکتریک را به خوبی ارزیابی کرد. در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل و رویه های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک انجام می شود و معادلات حاکم بر مبنای اصل همیلتون استخراج خواهد شد.

محاسبه معادلات حاکم

در این بخش در ابتدا، مدل هندسی مورد مطالعه ارائه می گردد، سپس تئوری مورد استفاده ارائه می شود. بعد از آن روابط تنش-کرنش بیان می شود و در انتهای این بخش، معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل و رویه های پیزوالکتریک بر مبنای تئوری مرتبه بالای هایپربولیک استخراج خواهد شد.

هندسه مدل مورد مطالعه در این مقاله عبارت است از ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل و رویه های پیزوالکتریک. همانطور که شکل ۱ نشان می دهد ورق ساندویچی با ضخامت h از دو لایه پیزوالکتریک و یک لایه هسته هدفمند تشکیل شده است. همچنین ورق دارای طول a و عرض b می باشد.

$$\hat{\psi} = -\frac{2z}{h_p} \psi_0 - \psi(x, y, t) \cos\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) \quad (۶)$$

$$\hat{z} = z + \frac{h_p}{2} + \frac{h_e}{2}, \quad \hat{z} = z - \frac{h_p}{2} - \frac{h_e}{2}$$

که در آن ψ_0 پتانسیل الکتریکی اولیه می‌باشد.
 با جایگذاری رابطه (۶) در رابطه (۵) میدان جابه‌جایی به صورت (۷) بازنویسی می‌شود [۲]:

$$E_x = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

$$E_y = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (۷)$$

$$E_z = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} = -\frac{2}{h_p} \psi \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

روابط تنش- کرنش برای لایه‌های پیزوالکتریک به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{pi} & c_{12}^{pi} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{pi} & c_{22}^{pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^{pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (۸)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{51} & 0 & 0 \\ 0 & e_{62} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}$$

در این بخش الگوهای صفحات هدفمند متخلخل خطی و

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}$$

روابط مربوط به جابه‌جایی الکتریکی رویه‌های پیزوالکتریک به صورت زیر بیان شده است [۲]:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} \\ e_{13} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \quad (۹)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}$$

که در آن e_{ij} ضرایب پیزوالکتریک، E_i مؤلفه‌های میدان الکتریکی و ε_{ij} ضرایب دی‌الکتریک می‌باشند.

اجزای میدان الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲]:

$$E_x = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \quad (۱۰)$$

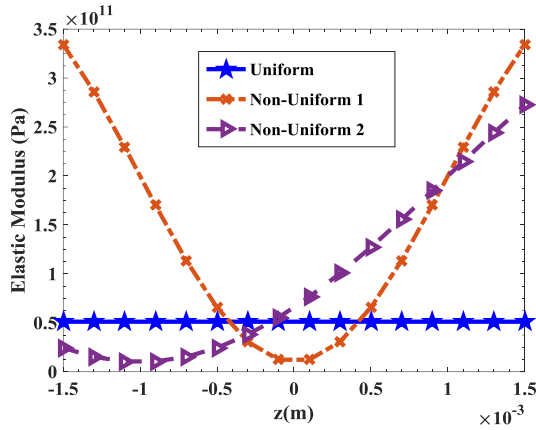
$$E_z = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}$$

در رابطه (۱۰)، ψ پتانسیل الکتریکی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

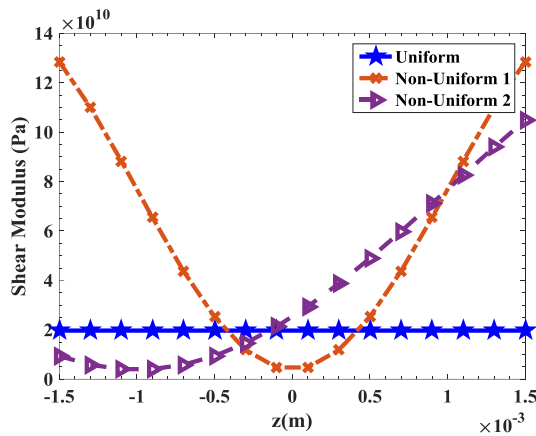
$$e = \sqrt{1 - e_0}$$

$$\chi = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2$$

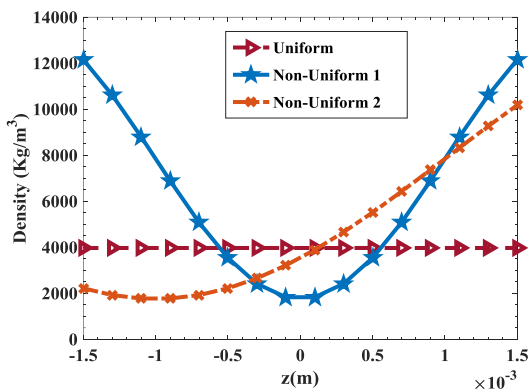
توزیع‌های مختلف تخلخل خطی و غیرخطی در راستای ضخامت در شکل ۲ نشان داده شده است.



الف- مدول الاستیک



ب- مدول برشی



ج- چگالی

شکل ۲- توزیع‌های تخلخل در راستای ضخامت

غیرخطی مورد استفاده در این مقاله ارائه می‌شود. برای این منظور برای صفحه هدفمند متخلخل خطی، خواص مکانیکی در راستای ضخامت متغیر فرض می‌شود و به صورت زیر تغییر می‌کند [۱۳]:

$$\begin{cases} E = E_1(1 - e_0\chi) \\ G = G_1(1 - e_0\chi) \\ \rho = \rho_1\sqrt{(1 - e_0\chi)} \end{cases} \quad (9)$$

در رابطه (۹)، E ، G و ρ به ترتیب مدول الاستیک، مدول برشی و چگالی می‌باشند. برای مدل‌سازی صفحه هدفمند متخلخل غیرخطی از دو مدل استفاده می‌شود، در مدل اول فرض می‌شود خواص مکانیکی در راستای ضخامت به صورت زیر تغییر کند [۱۳]:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ G(z) &= G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ \rho(z) &= \rho_1 \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

در مدل دوم فرض می‌شود خواص مکانیکی در راستای ضخامت به صورت زیر تغییر کند [۱۳]:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ G(z) &= G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ \rho(z) &= \rho_1 \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

e_0 و e_m ضرایب تخلخل به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$e_0 = 1 - \frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{G_2}{G_1}$$

$$e_m = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \quad (12)$$

$$K_{ij}^2 = \int \frac{\pi}{h_p} \sin \left(\frac{\pi z}{h_p} \right) z e_{ij} dz,$$

$$K_{ij}^4 = \int \frac{\pi}{h_p} \sin \left(\frac{\pi z}{h_p} \right) f(z) e_{ij} dz,$$

$$K_{ij}^5 = \int \left[\frac{\pi}{h_p} \sin \left(\frac{\pi z}{h_p} \right) \right]^2 e_{ij} dz$$

به منظور محاسبه معادلات حاکم بر مسأله از اصل همیلتون^۳ استفاده می‌شود [۲]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0 \quad (15)$$

که در آن δU تغییرات انرژی کرنشی و δT انرژی جنبشی می‌باشد.

انرژی کرنشی ورق را می‌توان بر حسب کلیه تنش‌ها و کرنش‌های وارد بر ورق به صورت زیر محاسبه نمود [۲]:

$$\delta U = \int_V \left(\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} - D_x \delta E_x - D_y \delta E_y - D_z \delta E_z \right) dV \quad (16)$$

انرژی جنبشی ورق به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$\delta T = \int_V \rho \vec{v} \cdot \delta \vec{v} dV \Rightarrow \delta T = \int_V \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right] dV \quad (17)$$

جهت استخراج معادلات حاکم بر مسأله لازم است تا کلیه کرنش‌ها و جابجایی‌های موجود در رابطه‌ی (۱۷) با مجهولات مفروض در میدان‌های جابجایی روابط (۳) جایگذاری شود:

منتجه‌های تنش برای ورق ساندویچی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲]:

$$\begin{aligned} \int \sigma_i dz &= N_i, (i = x, y, xy) \\ \int \sigma_i z dz &= M_i^b, (i = x, y, xy) \\ \int \sigma_i f(z) dz &= M_i^s, (i = x, y, xy) \\ \int \tau_{ij} g(z) dz &= S_{ij}, (i, j = xz, yz) \\ \int D_i \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) dz &= P_i, (i = x, y) \\ \int D_i \frac{\pi}{h_{pi}} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) dz &= R_i, (i = z) \end{aligned} \quad (13)$$

ثوابت مورد استفاده در این مقاله به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$\begin{aligned} \{A_i, B_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i\} &= \\ \int (1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2, g(z)^2) c_i dz & \\ \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8\} &= \\ \int (1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2, g(z), g(z)^2) \rho(z) dz & \\ L_{ij}^3 &= \int \cos \left(\frac{\pi z}{h_p} \right) g(z) e_{ij} dz, \end{aligned} \quad (14)$$

$$L_{ij}^5 = \int \left[\cos \left(\frac{\pi z}{h_p} \right) \right]^2 e_{ij} dz,$$

$$K_{ij}^1 = \int \frac{\pi}{h_p} \sin \left(\frac{\pi z}{h_p} \right) e_{ij} dz,$$

^۳ Hamilton's Principal

$$\delta U = \int_A \left[\left(N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \right) + \left(N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right) + \left(N_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} \right) + \left(S_{xz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + S_{xz} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) + \left(S_{yz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + S_{yz} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right) + \left(-P_x \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} - P_y \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} + R_z \delta \psi \right) \right] dA \quad (19)$$

با گسترش رابطه (۱۹) داریم:

$$\delta U = \int_A \left[\left(-\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} \delta w_s \right) + \left(-\frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 - \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} \delta w_s \right) + \left(-\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} \delta w_b - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} \delta w_s \right) + \left(-\frac{\partial S_{xz}}{\partial x} \delta w_s - \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} \delta \varphi \right) + \left(-\frac{\partial S_{yz}}{\partial y} \delta w_s - \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} \delta \varphi \right) + \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} \delta \psi + \frac{\partial P_y}{\partial y} \delta \psi + R_z \delta \psi \right) \right] dA \quad (20)$$

با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۱۷) داریم:

$$\delta U = \iint_A \int_z \left[\sigma_x \left(\frac{\delta u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{xz} \left(g(z) \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + g(z) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(g(z) \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + g(z) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right) - \left(D_x \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \cos \left(\frac{\pi \hat{z}}{h} \right) \right) - \left(D_y \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} \cos \left(\frac{\pi \hat{z}}{h} \right) \right) - D_z \left(-\frac{\pi}{h_p} \delta \psi \sin \left(\frac{\pi \hat{z}}{h} \right) \right) \right] dz dA \quad (18)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۸) داریم:

با جایگذاری روابط ثوابت در رابطه (۲۲) داریم:

$$\delta T = \int_A \left(-I_1 \ddot{u} \delta u_0 - I_2 \ddot{u}_{,x} \delta w_b - I_4 \ddot{u}_{,x} \delta w_s + I_2 \ddot{w}_{b,x} \delta u_0 + I_3 \ddot{w}_{b,xx} \delta w_b + I_5 \ddot{w}_{b,xx} \delta w_s + I_4 \ddot{w}_{s,x} \delta u_0 + I_5 \ddot{w}_{s,xx} \delta w_b + I_6 \ddot{w}_{s,xx} \delta w_s - I_1 \ddot{v} \delta v_0 - I_2 \ddot{v}_{,y} \delta w_b - I_4 \ddot{v}_{,y} \delta w_s + I_2 \ddot{w}_{b,y} \delta v_0 + I_3 \ddot{w}_{b,yy} \delta w_b + I_5 \ddot{w}_{b,yy} \delta w_s + I_4 \ddot{w}_{s,y} \delta v_0 + I_5 \ddot{w}_{s,yy} \delta w_b + I_6 \ddot{w}_{s,yy} \delta w_s - I_1 \ddot{w}_b \delta w_b - I_1 \ddot{w}_s \delta w_s - I_7 \ddot{w}_b \delta \varphi - I_1 \ddot{w}_s \delta w_b - I_1 \ddot{w}_s \delta w_s - I_7 \ddot{w}_s \delta \varphi - I_7 \ddot{\varphi} \delta w_b - I_7 \ddot{\varphi} \delta w_s - I_8 \ddot{\varphi} \delta \varphi \right) dA \quad (23)$$

با جایگذاری انرژی کرنشی و انرژی جنبشی در اصل همیلتون داریم:

$$\begin{aligned} \delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} &= 0 \\ N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} &= 0 \\ \delta \varphi : \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} &= 0 \\ \delta \psi : \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + R_z &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \delta T = \int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial t} \right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y \partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y \partial t} \right) + \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} + g(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} + g(z) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} \right) \right] dV \quad (21) \end{aligned}$$

با گسترش رابطه (۲۱) داریم:

$$\begin{aligned} \delta T = \iint_A \int_Z \rho \left[\frac{-\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 - z \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_b - f(z) \frac{\partial u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_s + z \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 + z^2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_b + z f(z) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_s + f(z) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 + z f(z) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_b + f(z)^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_s - \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 - z \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \delta w_b - f(z) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \delta w_s + z \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial t^2} \delta v_0 + z^2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_b + z f(z) \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_s + f(z) \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \delta v_0 + z f(z) \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_b + f(z)^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_s - \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta w_b - g(z) \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta \varphi - \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \delta w_s - g(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \delta \varphi - g(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta w_b - g(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta w_s - g(z)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta \varphi \right] dz dA \quad (22) \end{aligned}$$

در نهایت معادلات حاکم به صورت روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta w_s : & E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \\ & (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + E_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - F_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \\ & F_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - (2F_{12} + 4F_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - G_{11} \frac{\partial^4 s}{\partial x^4} - \\ & (2G_{12} + 4G_{66}) \frac{\partial^4 s}{\partial x^2 \partial y^2} + K_{13}^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + K_{23}^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & L_{51}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - L_{62}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - G_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + H_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \\ & H_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + H_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + H_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \\ & N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} = \\ & I_1 \ddot{w}_b + I_1 \ddot{w}_s + I_4 \ddot{u}_{0,x} + I_4 \ddot{v}_{0,y} - I_5 \ddot{w}_{b,xx} - \\ & I_5 \ddot{w}_{b,yy} - I_6 \ddot{w}_{s,xx} - I_6 \ddot{w}_{s,yy} - I_7 \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\delta \varphi : H_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + H_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + H_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \quad (29)$$

$$H_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - L_{51}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + L_{62}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = I_7 \ddot{w}_b - I_7 \ddot{w}_s + I_8 \ddot{\varphi}$$

$$\delta \psi : K_{31}^1 \frac{\partial u}{\partial x} - K_{31}^2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + K_{32}^1 \frac{\partial v}{\partial y} - K_{32}^2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \quad (30)$$

$$\left(-K_{32}^4 + L_{26}^3 \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \left(L_{15}^3 - K_{31}^4 \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + L_{15}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} +$$

$$L_{26}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + L_{11}^5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + L_{22}^5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - K_{33}^5 \psi - J_{33}^1 = 0$$

حل معادلات حاکم

برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله برای شرایط

مرزی ساده از روش ناویر استفاده می‌شود [۲]:

$$\delta u : A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} \\ & - E_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + K_{13}^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} = I_1 \ddot{u} - I_2 \ddot{w}_{b,x} - I_4 \ddot{w}_{s,x} \end{aligned}$$

$$\delta v : (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \quad (26)$$

$$A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{12} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} -$$

$$\begin{aligned} & B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial x^2} - E_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} \\ & + K_{23}^1 \frac{\partial \psi}{\partial y} = I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{w}_{b,y} - I_4 \ddot{w}_{s,y} \end{aligned}$$

$$\delta w_b : B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \quad (27)$$

$$(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \quad (27)$$

$$- D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$- F_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - F_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - (2F_{12} + 4F_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$- N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}$$

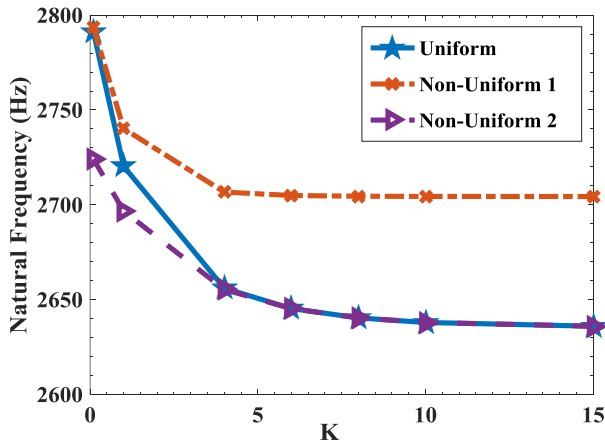
$$= I_1 \ddot{w}_b + I_1 \ddot{w}_s + I_2 \ddot{u}_{0,x} + I_2 \ddot{v}_{0,y} - I_3 \ddot{w}_{b,xx} -$$

$$I_3 \ddot{w}_{b,yy} - I_5 \ddot{w}_{s,xx} - I_5 \ddot{w}_{s,yy} + I_7 \ddot{\varphi}$$

به منظور اعتبارسنجی روش ارائه شده، نتایج بی‌بعد شده حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند و رویه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری حاضر با نتایج تحلیلی ارائه شده مراجع [۱۶]، [۱۷] و [۱۸] مقایسه می‌شوند. در جدول ۳ فرکانس طبیعی اول ورق ساندویچی با هسته هدفمند و رویه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری جدید با نتایج بدست آمده توسط مراجع [۱۶]، [۱۷] و [۱۸] مقایسه گردیده است. همانطور که در جدول ۳ مشاهده می‌شود نتایج بدست آمده از تئوری حاضر با نتایج حاصل مراجع [۱۶]، [۱۷] و [۱۸] تطابق خوبی دارد که این تطابق نیز می‌تواند نشان‌دهنده صحت تئوری مورد مطالعه در این پژوهش باشد.

بررسی اثر تابع تغییرات خواص مواد بر روی فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

در این بخش اثر توان تابع تغییرات خواص در ورق ساندویچی (K) بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۳ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل خطی، غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم برای مقادیر مختلف K نشان داده شده است.



شکل ۳- اثر تابع تغییرات خواص مواد بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \\ \varphi \\ \psi \end{cases} = \begin{cases} Ue^{i\omega t} \cos \lambda x \sin \mu y \\ Ve^{i\omega t} \sin \lambda x \cos \mu y \\ W_b e^{i\omega t} \sin \lambda x \sin \mu y \\ W_s e^{i\omega t} \sin \lambda x \sin \mu y \\ \varphi e^{i\omega t} \sin \lambda x \sin \mu y \\ \psi e^{i\omega t} \sin \lambda x \sin \mu y \end{cases}; \quad \lambda = \frac{n\pi}{a}, \mu = \frac{m\pi}{b} \quad (31)$$

که در آن U، V، W_b، W_s، φ، ψ مجهولات معادلات می‌باشند.

ماتریس ضرایب جابه‌جایی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$[K]_{6 \times 6} - \omega^2 [M]_{6 \times 6} = 0 \quad (32)$$

تعدادی از درایه‌های ماتریس K در پیوست آورده شده است.

نتایج و بحث

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی ارائه خواهد شد. در ابتدا نتایج بدست آمده از تحلیل حاضر با نتایج دیگر مراجع اعتبارسنجی می‌شود و سپس نتایج بدست آمده از ارتعاشات ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل مورد مطالعه و بررسی قرار خواهند گرفت.

اعتبارسنجی تئوری حاضر

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با نتایج دیگر پژوهش‌ها مقایسه خواهد شد. در جدول ۱ و جدول ۲ بترتیب مشخصات هندسی و مکانیکی ورق هدفمند و رویه‌های پیزوالکتریک آورده شده است.

جدول ۱- مشخصات هندسی و مکانیکی ورق هدفمند

a/b	ضریب پواسون	مدول الاستیسته (Pa)
۰/۵	۰/۳	۲۰۰×۱۰ ^۹
		۷۰×۱۰ ^۹

فولاد

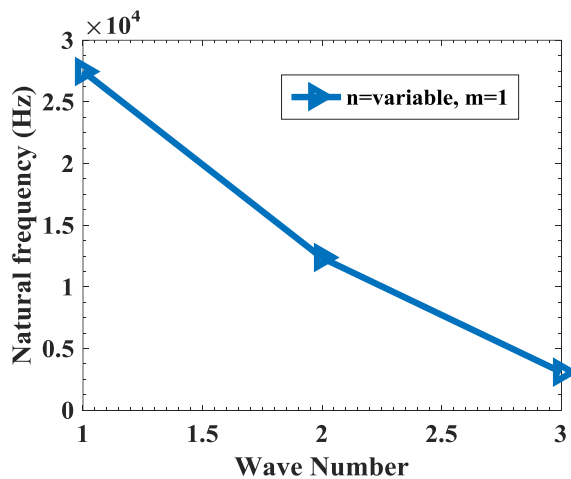
آلومینیوم

جدول ۲- مشخصات مکانیکی روبه‌های پیزوالکتریک

5.55×10^3	Kg/m^3	چگالی
$e_{13}=-2.2, e_{23}=-2.2, e_{26}=5.8, e_{15}=5.8$	C/m^2	ضرایب پیزوالکتریک
$\epsilon_{11}=5.64 \times 10^{-9}, \epsilon_{22}=5.64 \times 10^{-9}, \epsilon_{33}=6.35 \times 10^{-9}$	C/Vm	
$c_{11}=226, c_{22}=226, c_{33}=216, c_{12}=125, c_{13}=124, c_{23}=124,$ $c_{44}=44.2, c_{55}=44.2, c_{66}=50.5$	GPa	ضرایب دی‌الکتریک

جدول ۳- مقایسه نتایج حاصل از ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی تئوری حاضر با نتایج مراجع [۱۶]، [۱۷] و [۱۸]

a/h	حاضر	مراجع [۱۶]	اختلاف (درصد)	مراجع [۱۷]	اختلاف (درصد)	مراجع [۱۸]	اختلاف (درصد)
۲۰	۰/۰۱۱	۰/۰۱۲	۹	۰/۰۱۱	۰	۰/۰۱۱	۰
۱۰	۰/۰۴۳	۰/۰۴۷	۸/۵	۰/۰۴۴	۲/۳	۰/۰۴۵	۴/۴
۵	۰/۱۶۱	۰/۱۷۶	۸/۵	۰/۱۶۲	۰/۶	۰/۱۶۴	۱/۸



شکل ۴- بررسی اثر عدد موج بر روی فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

بررسی اثر نسبت طول به ضخامت کل ورق ساندویچی بر

روی فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

در این بخش اثر تغییرات نسبت طول به ضخامت کل ورق ساندویچی بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۵ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل خطی، غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات نسبت طول به ضخامت کل ورق ساندویچی (a/h) آورده شده است.

همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود با افزایش مقدار تابع تغییرات خواص مواد از ۰٫۱ تا ۰٫۶ مقدار فرکانس طبیعی ورق ساندویچی برای حالت متخلخل خطی، غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم به شدت کاهش یافته و از مقدار ۶ به بعد، تغییرات فرکانس طبیعی تقریباً ناچیز است. همچنین در شکل ۳ مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت متخلخل غیرخطی مدل اول می‌باشد.

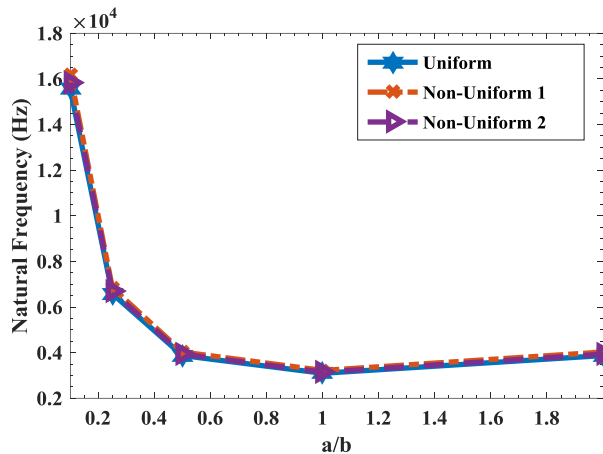
بررسی اثر عدد موج بر روی فرکانس طبیعی ورق هدفمند

در این بخش اثر تغییرات عدد موج ورق هدفمند بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

در شکل ۴ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل خطی، غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات عدد موج ورق هدفمند نشان داده شده است.

همانطور که شکل ۴ نشان می‌دهد با افزایش عدد موج (n) مقدار فرکانس طبیعی ورق هدفمند به سرعت کاهش می‌یابد.

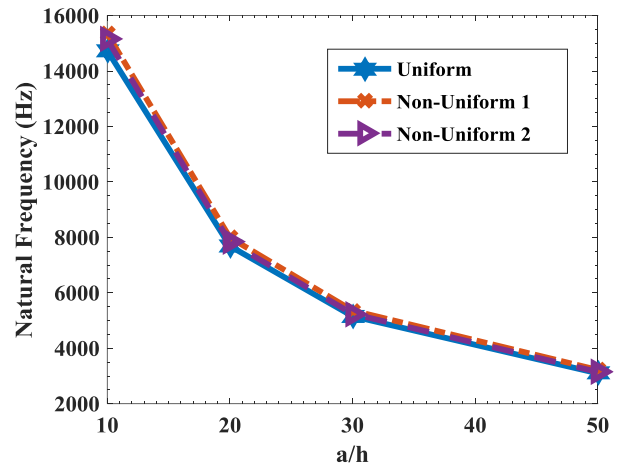
فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد، چرا که با این افزایش، مدل مورد مطالعه از ورق مربعی به سمت باریکه تغییر می‌کند.



شکل ۶- بررسی اثر نسبت طول به عرض ورق ساندویچی بر روی فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

بررسی اثر نسبت ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک بر روی فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

در این بخش اثر تغییرات نسبت ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک h_{fg}/h_{pi} ورق ساندویچی بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۷ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل خطی، غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک h_{fg}/h_{pi} آورده شده است. همانطور که شکل ۷ نشان می‌دهد با افزایش مقدار ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک h_{fg}/h_{pi} ، برای حالت متخلخل خطی فرکانس طبیعی در ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد ولی برای متخلخل غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم با سرعت زیادی افزایش می‌یابند. در شکل ۷ مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت متخلخل غیرخطی مدل اول و کمترین مقدار برای حالت متخلخل خطی می‌باشد.



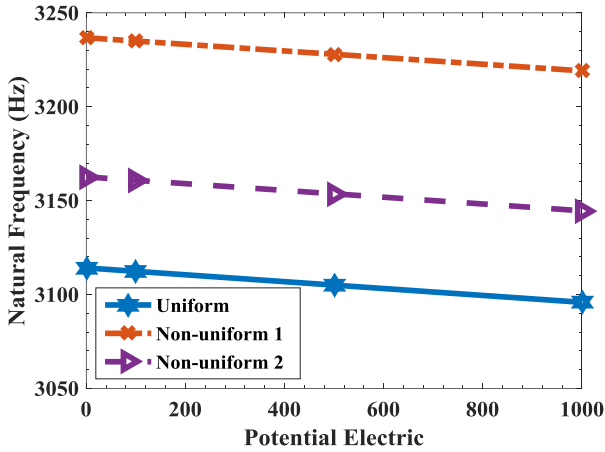
شکل ۵- بررسی اثر نسبت طول به ضخامت ورق بر روی فرکانس طبیعی ورق هدفمند

همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق هدفمند، فرکانس طبیعی ورق ساندویچی به سرعت کاهش می‌یابد که علت این امر کاهش ضخامت صفحه هدفمند و در نتیجه کاهش سفتی آن می‌باشد. در شکل ۵ مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت متخلخل غیرخطی مدل اول و کمترین مقدار برای حالت متخلخل خطی می‌باشد.

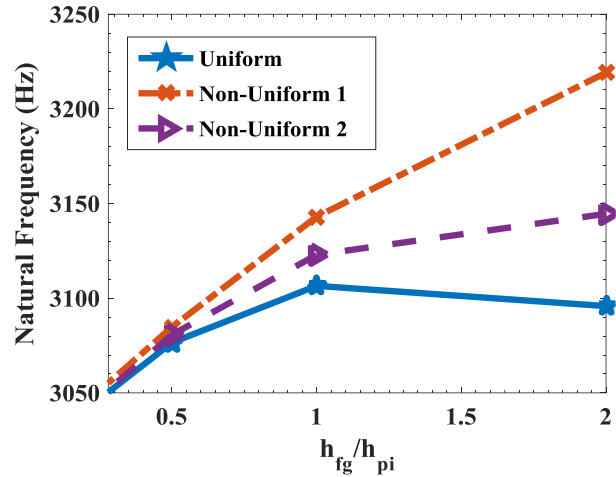
بررسی اثر نسبت طول به عرض ورق ساندویچی بر روی فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

در این بخش اثر تغییرات نسبت طول به عرض (a/b) ورق ساندویچی بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۶ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل خطی، غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات نسبت طول به عرض ورق (a/b) آورده شده است. همانطور که شکل ۶ نشان می‌دهد پاسخ: شکل ۵؛ با افزایش مقدار نسبت طول به عرض ورق ساندویچی از ۰.۱ تا ۱، فرکانس طبیعی با سرعت زیادی کاهش می‌یابد، چرا که با این افزایش، مدل مورد مطالعه از باریکه^۱ به سمت ورق مربعی تغییر می‌کند و با توجه به استحکام بیشتر باریکه نسبت به ورق مربعی این رفتار قابل پیش‌بینی بود. هم‌چنین با افزایش بیشتر مقدار نسبت طول به عرض ورق ساندویچی از مقدار ۱ تا ۲

^۱ Strip



شکل ۸- بررسی اثر پتانسیل الکتریکی لایه پیزوالکتریک بر روی ورق ساندویچی



شکل ۷- بررسی اثر نسبت ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک بر روی فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل و همچنین رویه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری هایپربولیک جدید ارائه شده انجام شد و نتایج حاصله با مراجع دیگر اعتبارسنجی گردید. می‌توان ادعا نمود که در این تحقیق یک تئوری جدید مرتبه بالا برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های هدفمند تخت ارائه شده است.

پس از بررسی و جمع بندی نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق هدفمند، می‌توان موارد زیر را نتیجه‌گیری کرد:

- تئوری مرتبه بالای ورق هدفمند جدید مورد استفاده در این مقاله می‌تواند با دقت خوبی رفتار دینامیکی ورق تخت را پیش بینی کند.
- با افزایش نسبت طول به عرض ورق ساندویچی، از ۰٫۱ تا ۱، فرکانس طبیعی با سرعت زیادی کاهش و با افزایش مقدار نسبت طول به عرض ورق ساندویچی از مقدار ۱ تا ۲ فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق هدفمند فرکانس طبیعی به سرعت کاهش می‌یابد.
- با افزایش مقدار توان تابع تغییرات خواص مواد از ۰٫۱ تا ۶ مقدار فرکانس طبیعی ورق هدفمند متخلخل خطی، غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم به شدت کاهش یافته و از مقدار ۶ به بعد تابع تغییرات خواص مواد، تغییرات فرکانس طبیعی تقریباً ناچیز است.

بررسی اثر پتانسیل الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک بر روی فرکانس طبیعی ورق ساندویچی

در این بخش اثر پتانسیل الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک ورق ساندویچی بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۸ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل خطی، غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات پتانسیل الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک آورده شده است.

همانطور که شکل ۸ نشان می‌دهد با افزایش مقدار پتانسیل الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک، برای هر سه حالت متخلخل خطی، غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم فرکانس طبیعی با شیب ملایم کاهش می‌یابد. در شکل ۸ مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت متخلخل غیرخطی مدل اول و کمترین مقدار برای حالت متخلخل خطی می‌باشد.

- theory", Vietnam Journal of Mechanics, Volume 40, Number 2, pp. 121-140, 2018.
- [4] Arash, B. Wang, Q., "A Review on the Application of Nonlocal Elastic Models in Modeling of Carbon Nanotubes and Graphenes", Computational Materials Science, Volume 51, Issue 1, pp. 303-313, 2012.
- [5] Ghorbanpour Arani, A., Khani, M., Khoddami Maraghi Z., "Dynamic analysis of a rectangular porous plate resting on an elastic foundation using high-order shear deformation theory", Journal of Vibration and Control, Volume 24, Issue 16, pp. 3698-3713, 2018.
- [6] Safarpour, H., Esmailpoor Hajilak, Z., Habibi, M., "A size-dependent exact theory for thermal buckling, free and forced vibration analysis of temperature dependent FG multilayer GPLRC composite nanostructures resting on elastic foundation", International Journal of Mechanics and Materials in Design, Volume 15, Issue 3, 2019.
- [7] Kar, V.R., Panda, S.K., "Large Deformation Bending Analysis of Functionally Graded Spherical Shell Using Fem", Structural Engineering and Mechanics, Volume 53, Number 4, pp. 661-679, 2015.
- [8] Seung-Eock, K., Nguyen Dinh, D., Vu Hoai, N., Nguyen Van, S., "Nonlinear vibration and dynamic buckling of eccentrically oblique stiffened FGM plates resting on elastic foundations in thermal environment", Thin-Walled Structures, Volume 142, pp. 287-296, 2019.
- [9] Kiani, Y., "Dynamics of FG-CNT reinforced composite cylindrical panel subjected to moving load", Thin-Walled Structures, Volume 111, pp. 48-57, 2017.
- [10] Wang, Y., Xie, K., Fu, T., Zhang, W., "A unified modified couple stress model for sizedependent free vibrations of FG cylindrical microshells based on high-order shear deformation theory", The European Physical Journal Plus, Volume 135, Issue 1, 2020.
- [11] Khorshidi, K., Bahrami, M., Karimi, M., Ghasemi, M., "A Theoretical Approach for Flexural Behavior of Fg Vibrating MicroPlates with Piezoelectric Layers Considering a Hybrid Length Scale Parameter", Journal of Theoretical and Applied Vibration and Acoustics, Volume 6, Number 1, pp. 51-68, 2020.

- با افزایش مقدار ضخامت لایه هدفمند به لایه پیزوالکتریک h_{fg}/h_{pi} برای حالت متخلخل خطی فرکانس طبیعی در ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد، ولی برای دو حالت متخلخل دیگر با سرعت زیادی افزایش می‌یابند.
- با افزایش مقدار پتانسیل الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک، برای هر سه حالت متخلخل خطی، غیرخطی مدل اول و غیرخطی مدل دوم فرکانس طبیعی با شیب ملایم کاهش می‌یابد.
- علت این که بیشترین فرکانس طبیعی مخصوص حالت متخلخل مدل اول می‌باشد این است که در متخلخل مدل اول خواص ماده به سمت فولاد نزدیکتر می‌شود.

پیوست - تعدادی از درایه‌های ماتریس K

$$K_{11} = -A_{11}\lambda^2 - A_{66}\mu^2$$

$$K_{12} = -A_{12}\lambda\mu - A_{66}\lambda\mu$$

$$K_{13} = B_{11}\lambda^3 + B_{12}\lambda\mu^2 + 2B_{66}\lambda\mu^2$$

$$K_{14} = E_{12}\lambda\mu^2 + 2E_{66}\lambda\mu^2 + E_{11}\lambda^3$$

$$K_{21} = -A_{12}\lambda\mu - A_{66}\lambda\mu$$

$$K_{22} = -A_{66}\lambda^2 - A_{22}\mu^2$$

$$K_{23} = 2B_{66}\lambda^2\mu + B_{12}\lambda^2\mu + B_{22}\mu^3$$

$$K_{24} = 2E_{66}\lambda^2\mu + E_{12}\lambda^2\mu + E_{22}\mu^3$$

$$K_{31} = B_{11}\lambda^3 + B_{12}\lambda\mu^2 + 2B_{66}\lambda\mu^2$$

$$K_{32} = B_{11}\lambda^2\mu + 2B_{66}\lambda^2\mu + B_{22}\mu^3$$

$$K_{34} = -F_{11}\lambda^4 - F_{22}\mu^4 - 2F_{12}\lambda^2\mu^2 - 4F_{66}\lambda^2\mu^2$$

منابع و مراجع

- [۱] افزایش چشمگیر ظرفیت تولید انرژی مواد پیزوالکتریک با روش جدید، ۱۰۸۴۰۸۲، ۲۰۲۰.
- [۲] لیوانی، مصطفی، ملک‌زاده فرد، کرامت، "تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های دوانحنایه ساندویچی مرکب با ضخامت متغیر"، مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره پنجاه و دوم، شماره هشتم، صفحات ۱۱۱-۱۲۰، ۱۳۹۹.
- [3] Thom, T.T., Kien, N.D. "Free vibration analysis of 2-D FGM beams in thermal environment based on a new third-order shear deformation

- F., "Thermal Vibration Analysis of Sma Hybrid Composite Double Curved Sandwich Panels", Composite Structures, Volume 224, 2019.
- [17] Arefi, M., Meskini, M., "Application of hyperbolic shear deformation theory to free vibration analysis of functionally graded porous plate with piezoelectric face-sheets", Structural Engineering and Mechanics, Volume 71, Number 5, pp. 459-467, 2019.
- [18] Benachour, A., Tahar, H.D., Atmane, H.A., Tounsi, A., Ahmed, M.S., "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", Composites Part B: Engineering, Volume 42, pp. 1386-1394, 2011.
- [19] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Bég, O.A., "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", Composites Part B: Engineering, Volume 60, pp. 274-283, 2014.
- [12]
- [13] Ehyaei, J., Safarpour, H., Shahabinejad, E., "Vibration analysis of a double layer microshell utilizing a modified couple stress theory", Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME, Volume 21, Issue 1, pp. 21-4, 2020..
- [14] Sobhy, M., Radwan, A.F., "A new quasi 3D nonlocal plate theory for vibration and buckling of FGM nanoplates", International Journal of Applied Mechanics, Volume 9, Number 1, 2017.
- [15] Rahimi, A.R., Livani, M., Negahban Boron, A., "Free vibration analysis of functionally graded material beams with transverse crack", Journal of Mechanical Engineering, Volume 51, Issue 1, pp. 277-281, 2021.
- [16] Nejati, M., Ghasemi-Ghalebahman, A., Soltanmaleki, A., Dimitri, R. and Tornabene,