

کنترل بهینه مصرف سوخت پهپاد در پرواز گشتزنی دایروی

ابوالفضل موسوی^۱، سید حسین ساداتی^{۲*}، جلال کریمی^۳

۱- کارشناسی ارشد، دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۲- دانشیار، دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۳- دانشیار، دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۲۲)

چکیده

دستیابی به بهترین عملکرد و رفتار اجسام پرنده کنترل پذیر، هدف اصلی مهندسان و طراحان سیستم‌های کنترل پرواز می‌باشد. بهینه‌سازی مسیر یک جسم پرنده می‌تواند سبب بهبود عملکرد، کاهش هزینه، افزایش قابلیت و نتایج مطلوب دیگر گردد. بهینه‌سازی مسیر دانشی است که در آن راه‌های دستیابی به فرآیندهای دینامیکی بهینه ارائه می‌گردد. یکی از روش‌های یافتن تغییرات بهینه متغیرهای حالت، استفاده از کنترل بهینه است. از آنجائیکه پروازهای با بُرد و مداومت طولانی نیازمند برخی شکل‌های مدیریت سوخت می‌باشند، تحقیقات گسترده‌ای در حوزه‌ی کمینه‌سازی مصرف سوخت در حال انجام می‌باشد. در این مقاله حداقل مصرف سوخت برای یک هواپیمای بدون سرنشین در مرحله گشتزنی با مانور دایروی در یک منطقه از پیش تعیین شده ارائه گردید. معادلات حرکت پهپاد بر اساس مدل جرم نقطه‌ای توسعه یافته است. شرایط بهینگی از اصل حداقل‌یابی پانتریان با استفاده از تابع همیلتونین به دست آمده است. مصرف سوخت، به‌عنوان معیار بهینه انتخاب و روش عددی مورد استفاده تکنیک پرتاب چند نقطه‌ای بوده است. به طور طبیعی انتظار می‌رود که انرژی باد بر مسیر پرواز تأثیرگذار باشد، به همین دلیل شبیه‌سازی‌های عددی با در نظر گرفتن اثر سرعت و جهت باد بر مانور گردش بهینه انجام شده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که برای داشتن حداقل مصرف سوخت در پرواز گشتزنی در مسیر دایروی، لازم است که پهپاد پرواز متناوب نزولی و صعودی داشته باشد.

واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه، اصل حداقل‌یابی پانتریان، مصرف سوخت، گشتزنی، روش پرتاب چند نقطه‌ای

Optimal Control of UAV Fuel Consumption during Circular Loitering Flight

Abolfazl moosavi, seyed hosein sadati and jalal karimi

Abstract

The main objective of the engineers and flight control system designers is to achieve the best performance and behavior of a controllable aeronautical vehicle. Trajectory optimization of a flying vehicle may improve performance, reduce costs, enhance the vehicle capabilities and lead to other favorable results. Trajectory Optimization is a knowledge that presents the ways of achieving optimum dynamic processes. Using the optimal control is one way to find the optimal trend of state variables. Since long range and endurance missions require some forms of fuel management, there is ongoing research in the area of minimizing the fuel consumption. In the current article, the problem of minimum fuel consumption for an unmanned aerial vehicle, during a circular maneuver in a predetermined area, is presented. UAV equations of motion are developed based on a point mass model. Optimality conditions of Pontryagen Minimum Principle (PMP) are found using the Hamiltonian function. Fuel consumption is the optimum performance index and multiple shooting method is chosen as numerical method for solving the problem at hand. Naturally, wind energy is expected to affect the flight path, so numerical simulations have been performed considering the effect of wind speed and direction on the optimal turn maneuver problem. Current research results show that in order to acquire a minimum fuel consumption loitering flight, in a circular trajectory, periodic climbing and descending maneuvers are needed.

Key words: Optimal control, Pontryagen minimum principle, Fuel consumption, Loitering, Multiple shooting method

مقدمه

در مرجع [۱] حداقل مصرف سوخت^۱ پهپاد گلوبال هاوک برای برای مسیر گردشی به صورت اوجگیری (حداکثر تراست) و یک مسیر نزول (حداقل تراست) با استفاده از تئوری کنترل بهینه^۲ از طریق روش اصلاح شده‌ی مبتنی بر تکنیک ژاکوبین حل گردید. در مرجع [۲] مسئله کمترین مصرف سوخت برای مسیرهای به فرم 8 لاتین، برای یک هواپیمای بدون سرنشین در ارتفاع بالا بررسی شده است. متغیرهای کنترل در این مقاله نیروی پیشران، ضریب نیروی برآ و زاویه بنک انتخاب شده‌اند. همچنین چگالی اتمسفر به صورت مقداری ثابت تعریف شده است. نتایج عددی مقایسه بین کمترین نیروی پیشران و مسائل مصرف سوخت با پیشران مشخص ارائه شده است. در این مقاله، محدوده حداقل و حداکثر نیروی پیشران بین صفر تا ۲۵ درصد حداکثر پیشران در نظر گرفته شده و یک حالت بنگ بنگ در حل بهینه پیش می‌آید که نیروی پیشران از حداکثر به حداقل سوییچ می‌کند. خاموش شدن موتور در این مقاله یک مسئله‌ی جدیدی است که کاربرد عملی ندارد. در مرجع [۳] مسئله پرواز پریودیک بهینه، با تابع هزینه کمترین مصرف سوخت برای مسیر دایره‌ای یک هواپیمای زیر صوت در حالت پرواز پایا مورد بررسی قرار گرفته است. در این مسئله پرواز متناوب که بر اساس حداکثر و حداقل نیروی پیشران مورد بررسی قرار گرفته، فرکانس متناوبی برای سناریوی پرواز مشخص پرواز دایره‌ای تعریف شده است. در مرجع [۴] مسئله حداقل هزینه با انتخاب هم‌زمان معیارهای مصرف سوخت و زمان پرواز یک پهپاد از طریق شبیه‌سازی عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که پرواز متناوب در مقایسه با پرواز با حالت ثابت موجب بهبود مصرف سوخت می‌شود. مسئله حداقل مصرف سوخت در مانور اوج‌گیری سه‌بعدی یک هواپیما مسافری در مرجع [۵] و کنترل دوره‌ای حداقل مصرف سوخت در مسیر سه‌بعدی یک هواپیما در مرجع [۶] مورد توجه قرار گرفته است. فرانکو و همکارانش، مسئله بهینه‌سازی پرواز کروز را در ارتفاع و زاویه سمت ثابت حل کردند [۷]. در این مرجع، حداقل مصرف سوخت به‌عنوان تابع هزینه در نظر گرفته شده و مسئله در زمان ثابت حل شده است. متغیر کنترلی تراست بوده که در مسئله به‌صورت خطی در معادلات حرکت ظاهر شده است. در

متعادل‌سازی اهداف ماموریتی برای سامانه‌های هوافضایی غالباً یک وظیفه خطیر می‌باشد، به ویژه در زمانی که تلاش اصلی حفظ عملکرد مطلوب می‌باشد. یک طراح اغلب باید با تجزیه و تحلیل فضای موجود به بهترین نحوی مسائل را درک کرده و اولویت‌ها را تشخیص دهد. برای رسیدن به این توانایی، حوزه مشخصی از توسعه مدیریت مصرف سوخت همیشه مورد توجه بوده است.

تا وقتی که سوخت‌های کارآمدتر و سیستم‌های پیشران جایگزین برای هواپیماها در دسترس نباشند، نیاز به بهبود مدیریت سوخت یا مدیریت انرژی برای کاربردهای نظامی و غیرنظامی وجود خواهد داشت. از آنجائی که پروازهای با بُرد و مداومت طولانی نیازمند برخی شکل‌های مدیریت سوخت می‌باشند، تحقیقات مداومی در حوزه‌ی کمینه‌سازی مصرف سوخت در حال انجام می‌باشد. برای مثال، آگاهی به‌هنگام در سرتاسر فضای نبرد در ماموریت‌های جاسوسی، نظارت، شناسایی و کشف هدف به منظور تسهیل تصمیم‌گیری به موقع مورد نیاز است. برای ارتقاء این قابلیت، یکی از حوزه‌ها، مدیریت سوخت است. کاهش مصرف سوخت، همیشه با انجام یک پرواز بهینه در حالت پایدار به دست نمی‌آید. یک رویکرد اساسی در بهبود مصرف سوخت، تمرکز بر روی پروازهای متناوب است که بین حداکثر و حداقل نیروی پیشرانه رقم می‌خورد [۱].

در طبیعت، مثال‌های فراوانی از فرآیندهای متناوب وجود دارد، مانند حرکت اوربیتال‌های اجسام آسمانی، ریتم قلب، حرکت بال پرندگان و حرکت دم ماهی‌ها. در پرواز متناوب، هواپیما می‌تواند با بهترین بازدهی آیرودینامیکی پرواز کند، در مقابل، در حالت پرواز پایا، یک هواپیما معمولاً نمی‌تواند با بازدهی آیرودینامیکی مناسب ماموریت خود را انجام دهد. یک تبدیل انرژی جنبشی-پتانسیل کارآمد می‌تواند عملکرد متناوب را تسهیل کند [۱].

معمولاً پروازهای با مصرف سوخت بهینه برای مسیرهای با برد بلند مدل‌سازی می‌شود. ماموریت‌های پهپادها غالباً شامل انواع پروازهای دایره‌ای در منطقه‌ای از پیش تعیین شده، مانند پرواز آرام برفراز هدف است. با فرض در حال رشد بودن مأموریت پهپادهای با مداومت پروازی طولانی، تمرکز تحقیق حاضر بر مانور گردش با شعاع ثابت روی یک منطقه عملیاتی است.

^۲ Optimal Control Theory^۱ Minimum Fuel

است. در نهایت، ارتباط بین حالت‌ها و کنترل‌ها تعریف شده با استفاده از روش غیرمستقیم کنترل بهینه، اصل حداقل‌یابی پانتریاگن و تابع همیلتونین به صورت دقیق حاصل می‌شود. در ادامه، ابتدا معادلات حرکت پهپاد بیان می‌شود. در بخش سوم شرایط مرزی و تابع هزینه مسئله ارائه می‌گردد. در بخش چهارم نتایج طراحی کنترلر بهینه و جزئیات اکسترمالها تشریح و در انتها نیز نتیجه‌گیری آمده است.

معادلات حرکت

یکی از مهمترین ابزار بررسی رفتار سیستم‌های فیزیکی، مدل‌سازی آنهاست. هواپیما و بیان تاثیر محیط بر آن دارای سیستم دینامیکی پیچیده‌ای است. ضرایب نیروها و ممانهای آیرودینامیکی روی جسم پرنده در حالت کلی، به خاطر وابستگی به زوایای حمله، سرش‌جانبی، عدد ماخ، ارتفاع و انحراف‌های سطوح کنترل، دارای توابع پیچیده‌ای می‌باشند. به هر حال، آنالیز اطلاعات آیرودینامیکی نشان می‌دهد که خیلی از این وابستگی‌ها را می‌توان برای مسئله موجود صرف‌نظر کرد. در این مطالعه از مدل جرم نقطه‌ای^۳ برای تحلیل عددی استفاده شده است. معادلات جرم نقطه‌ای حرکت برای پهپاد به صورت معادلات (۱) تا (۸) نوشته شده‌اند [۱۲ و ۱۳]:

$$\dot{V} = \frac{g}{W}(\eta T - D_0 - n^2 D_i) - g \sin \gamma \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{g}{V}(n \cos \mu - \cos \gamma) \quad (2)$$

$$\dot{\chi} = \frac{g}{V \cos \gamma}(n \sin \mu) \quad (3)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (4)$$

$$\dot{x} = V \cos \gamma \cos \chi \quad (5)$$

$$\dot{y} = V \cos \gamma \sin \chi \quad (6)$$

$$\dot{I} = V \cos \gamma \quad (7)$$

$$\dot{W}_F = -\eta Q \quad (8)$$

$$Q = TC \quad \text{که}$$

این مرجع، از آنجا که کنترلر به صورت خطی در تابع همیلتونین ظاهر شده است، مسئله کنترل بهینه تکینگی مورد بررسی قرار گرفته است. در مرجع [۸] طراحی و تعقیب مسیر سه بعدی بهینه‌ی مقید برای یک ربات چهار پره، جهت کاربردهای کنترل ترافیک شهری انجام شده و مسئله کنترل بهینه حداقل زمان با رویکرد ترتیب مستقیم حل شده است.

بهینه‌سازی فرآیندهای دینامیکی اغلب نیاز به راه حل مساله کنترل بهینه دارند. پس هدف، مدل‌سازی فرایند برحسب معادلات دیفرانسیل برای متغیرهای حالت، پیدا کردن توابع بردار کنترل با حداقل کردن تابع معیاری با شرایط مرزی و احتمالاً محدودیت روی حالت و کنترل است. استفاده از شرط لازم برای کنترل بهینه سیستم‌های تعریف شده توسط معادلات دیفرانسیل معمولی منجر به یک مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای^۱ خواهد شد. مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل و جبری تعریف شده با توجه به غیرخطی بودن معادلات به نظر پیچیده می‌رسند. یک روش مناسب برای حل چنین مسئله شناخته شده‌ای روش پرتاب چندنقطه‌ای است [۹]. این روش مسئله مقدار مرزی را برای حل مجموعه‌ای از معادلات جبری و مسائل مقدار اولیه با شرایط اولیه تا حدی ناشناخته که توسط تکرار نیوتن حل می‌شود کاهش می‌دهد.

از آنجایی که هدف پرنده‌های بدون سرنشین شناسایی گشت‌زنی در مدت زمان طولانی بر فراز منطقه‌ای از یک هدف ثابت است، باید راه‌های رسیدن به مصرف سوخت کم در طراحی مسیر در نظر گرفته شود. غالباً یکی از ماموریت‌های گشت‌زنی پهپادهای با مداومت پروازی طولانی، پرواز دایره‌ای، مانند پرواز آرام بر فراز هدف است. بدین منظور در این مقاله، تحلیل چگونگی تاثیر مانور دایروی بر مصرف سوخت در یک منطقه از پیش تعیین شده مورد توجه قرار می‌گیرد. در خیلی از تحقیقات اثرات باد را در نظر گرفته نشده است. در این مقاله، همچنین بررسی تأثیر باد ثابت در طی پرواز مد نظر است. در نظر گرفتن تأثیر باد بر پرواز گردش می‌تواند به طور بالقوه مصرف سوخت را بهبود دهد. بنابراین، یک مسئله کنترل بهینه فرمول‌بندی شده و با استفاده از اصل حداقل پانتریاگین^۲ [۱۰ و ۱۱] و با روش پرتاب چند نقطه‌ای، حل شده

^۳ Point Mass

^۱ Two-point-boundary-value-problem

^۲ Pontryagin Minimum Principle

از آنجا که پرواز به صورت دایروی مد نظر است، شرایط مرزی مسئله به شرح زیر خواهد بود و مسیر بهینه مصرف سوخت باید مجموعه معادلات (۱۵) را ارضا نماید [۹ و ۱۰].

$$\begin{aligned} V(0) &= V(t_f) = 450 \text{ ft/sec} (137 \text{ m/s}) \\ \gamma(0) &= \gamma(t_f) \\ \chi(0) &= 0, \chi(t_f) = 2\pi \\ h(0) &= h(t_f) = 40000 \text{ ft} (12192 \text{ m}) \\ x(0) &= x(t_f) = 0 \\ y(0) &= y(t_f) = 0 \\ W_F(0) &= W_{F0} \\ l(0) &= 0, l(t_f) = 1.9685 \times 10^5 \text{ ft} (6 \times 10^4 \text{ m}) \end{aligned} \quad (15)$$

تابع معیار در فاز گشت زنی به صورت انتخاب گردید:

$$I(n, \eta, \mu) = -W_F(t_f) \quad (16)$$

روش بیان شده، تعیین قانون کنترل بهینه با استفاده از اصل حداقل یابی پونتریاگن است و هامیلتوتین سیستم را می توان به صورت زیر تعریف کرد [۱۰ و ۱۱]:

$$\begin{aligned} H &= \lambda_v \left(\frac{g}{W} (\eta T - D_0 - n^2 D_i) - g \sin \gamma \right) + \\ &\lambda_\gamma \left(\frac{g}{V} (n \cos \mu - \cos \gamma) \right) + \lambda_\chi \left(\frac{g}{V \cos \gamma} (n \sin \mu) \right) \\ &+ \lambda_h (V \sin \gamma) + \lambda_x (V \cos \gamma \cos \chi) + \\ &\lambda_y (V \cos \gamma \sin \chi) + \lambda_{W_F} (-\eta Q) + \lambda_l (V \cos \gamma) \end{aligned} \quad (17)$$

که متغیرهای الحاقی^۲ (ضرائب لاگرانژ λ) با مشتق گیری از تابع هامیلتوتین نسبت به پارامترها، بوسیله یک مجموعه معادلات دیفرانسیلی بدست می آیند و شامل معادلات زیر می باشند:

$$\lambda = (\lambda_v, \lambda_\gamma, \lambda_\chi, \lambda_h, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_{W_F}, \lambda_l)$$

$$\frac{d\lambda_v}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v}, v = V, \gamma, \chi, h, x, y, W_F, l \quad (18)$$

در معادلات ۱ تا ۸، V سرعت پروازی، γ زاویه مسیر پرواز، χ زاویه سمت، x, y مسافت طی شده طولی و عرضی، h ارتفاع، l مسافت طی شده و W_F وزن سوخت مصرفی است. همچنین در معادلات ذکر شده، g شتاب جاذبه زمین و ثابت است و $\rho(h)$ چگالی هوا و $a(h)$ سرعت صوت است که از رابطه های زیر محاسبه می شوند (لازم بذکر است روابط بر اساس سیستم انگلیسی نوشته شده است) [۱۴]:

$$\rho(h) = \rho_0 (1 - 6.87 \times 10^{-6} h)^{4.26} \quad (9)$$

$$a(h) = 49.02 \sqrt{Temp} \quad (10)$$

در این جا $Temp = 518.67 - 0.003565 h$ است و h ارتفاع بر حسب فوت می باشد. نیروهای آیرودینامیکی و پیشرانه به صورت زیر تعریف می شوند [۹ و ۵]:

$$T = \eta T_{max} \quad (11)$$

$$D = D_0 + n^2 D_i \quad (12)$$

که D_0 نیروی پسا در نیروی برای صفر، D_i پسای القایی و n بار بال است.

$$D_0 = q S C_{d0}(M), \quad D_i = \frac{k W^2}{q S}, \quad n = \frac{L}{W}$$

عدد ماخ از رابطه $M = \frac{V}{a(h)}$ محاسبه می شود، و W وزن

پهپاد، L نیروی برآ، D نیروی پسا، T نیروی پیشرانه در ارتفاع و η نشانگر دسته گاز است. در نهایت تراست و مصرف ویژه سوخت (C) به صورت زیر قابل محاسبه اند (T_{max} حداکثر نیروی پیشرانه در سطح دریا است):

$$T = T_{max} \frac{\rho}{\rho_0} \quad (13)$$

$$C = (0.8896 - 9 \times 10^{-6} h \times 0.3048) / 3600 \quad (14)$$

شرایط مرزی و تابع هزینه مسئله

در این مقاله هدف هدایت پهپاد از یک وضعیت اولیه به وضعیت نهایی مشخص در حالی است که تابع معیاری^۱ بهینه شود.

^۲ Costate Variables

^۱ Costate Variables

وضعیت و کمک وضعیت، معادله دیفرانسیل زیر نیز به سیستم اضافه می‌گردد:

$$\frac{d}{d\xi} t_f = 0 \quad (28)$$

از آنجایی که زمان نهایی، آزاد است و تابع هامیلتونین بطور صریح وابسته به زمان نمی‌باشد پس بایستی این تابع در طول مسیر بهینه مقدار زیر را داشته باشد (شرایط ترانسورسالیته) [۱۰ و ۱۱]:

$$H = H(t_f) = 0 \quad (29)$$

با استفاده از اصل حداقل پانتریانگن بردار کنترل را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$U = \arg[\min_u H(U)] \quad (30)$$

شرط لازم برای ارضاء PMP معادله زیر است:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (31)$$

با جایگذاری معادله (۲۹) در (۱۶) کنترل کننده‌ها بفرم زیر بدست می‌آیند

$$\frac{\partial H}{\partial n} = -\lambda_v \frac{2gnD_i}{W} + \lambda_\gamma \frac{g \cos \mu}{V} + \lambda_x \frac{g \sin \mu}{V \cos \gamma} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = -\lambda_\gamma \frac{gn \sin \mu}{V} + \lambda_x \frac{gn \cos \mu}{V \cos \gamma} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \lambda_v \frac{gT}{W} - \lambda_{WF} CT = 0 \quad (34)$$

از حل معادلات (۳۲) و (۳۳) کنترل کننده‌های n و μ به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$n = \frac{W}{2\lambda_v D_i V} \left(\lambda_\gamma \cos \mu + \frac{\lambda_x \sin \mu}{\cos \gamma} \right) \quad (35)$$

$$\mu = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_\gamma \cos \gamma} \right) \quad (36)$$

از آنجا که کنترل کننده η در تابع هامیلتونین (۱۷) به صورت خطی ظاهر نشده است، نمی‌توان این کنترل کننده را بدست آورد. برای محاسبه η تابع سویچینگ S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \lambda_v \frac{gT}{W} - \lambda_{WF} CT \quad (37)$$

$$\dot{\lambda}_v = -\lambda_v \left[\frac{g}{W} (\eta T_v - D_{0v} - n^2 D_{iv}) \right] + \lambda_\gamma \frac{g}{V^2} (n \cos \mu - \cos \gamma) + \lambda_x \frac{gn \sin \mu}{V^2 \cos \gamma} - \lambda_h \sin \gamma \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_x \cos \gamma \cos \chi - \lambda_y \cos \gamma \sin \chi + \lambda_{WF} \eta (C_v T + C T_v) \\ & -\lambda_\gamma \cos \gamma \\ \dot{\lambda}_\gamma &= \lambda_v \frac{g \cos \gamma}{V} - \lambda_\gamma \frac{g \sin \gamma}{V} - \lambda_x \frac{gn \sin \mu \sin \gamma}{V \cos^2 \gamma} \\ & -\lambda_h V \cos \gamma + \lambda_x V \sin \gamma \cos \chi + \lambda_y V \sin \gamma \sin \chi \\ & -\lambda_\gamma V \sin \gamma \end{aligned} \quad (20)$$

$$\dot{\lambda}_x = \lambda_x V \cos \gamma \sin \chi - \lambda_y V \cos \gamma \cos \chi \quad (21)$$

$$\dot{\lambda}_h = -\lambda_v \left(\frac{g}{W} (\eta T_h - D_{0h} - n^2 D_{ih}) \right) + \lambda_{WF} \eta (T C_h + C T_h) \quad (22)$$

$$\dot{\lambda}_x = 0 \quad (23)$$

$$\dot{\lambda}_y = 0 \quad (24)$$

$$\dot{\lambda}_\gamma = 0 \quad (25)$$

$$\dot{\lambda}_{WF} = 0 \quad (26)$$

در معادلات فوق، C_h, C_v تغییر مصرف ویژه سوخت نسبت به سرعت و ارتفاع، T_h, T_v تغییر نیروی پیشرانه نسبت به سرعت و ارتفاع، D_{0h}, D_{ih} تغییر نیروی پسای القایی و نیروی پسا در نیروی برای صفر نسبت به ارتفاع است.

در ابتدای مسیر پرواز، تمام هشت متغیر حالت مشخص و ضرایب لاگرانژ آزاد می‌باشند. در زمان نهایی، شرایط تقاطعی^۱ لازم دارد که $\lambda_{WF} = -1$ شود. همچنین با توجه به مسئله حاضر که در آن زمان نهایی t_f آزاد می‌باشد، زمان نهایی را می‌توان بصورت یک متغیر اضافی در مسئله با تبدیلی بفرم زیر در نظر گرفت [۹ و ۱۴]:

$$t = t_f \xi \quad (27)$$

$$d / d\xi = t_f d / dt$$

با متغیر اضافی تعریف شده، معادلات به دستگاهی با متغیر مستقل ξ با دامنه $0 \leq \xi \leq 1$ تبدیل می‌شوند. علاوه بر معادلات

^۱ Transversality Condition

مسئله مقدار مرزی چندنقطه‌ای است اگر و فقط اگر بردار تابع هامیلتونین را به همراه داشته باشد. با این حال، از آنجا که η پارامتری محدود و کراندار است، قانون کنترل درجه‌گاز که نشأت گرفته از اصل حداقل‌یابی پانتریگین است را می‌توان به فرم زیر بیان کرد [۱۵ و ۱۷]:

کنترل کننده η باید به گونه‌ای انتخاب شود که حداقل‌سازی تابع هامیلتونین را به همراه داشته باشد. با این حال، از آنجا که η پارامتری محدود و کراندار است، قانون کنترل درجه‌گاز که نشأت گرفته از اصل حداقل‌یابی پانتریگین است را می‌توان به فرم زیر بیان کرد [۱۵ و ۱۷]:

$$\text{If } S > 0, \text{ then } \eta = \eta_{min} \quad (38)$$

$$\text{If } S < 0, \text{ then } \eta = 1 \quad (39)$$

$$\text{If } S = 0, \text{ (singular control)} \quad (40)$$

می‌باشد. ریشه‌ای از دستگاه معادلات غیرخطی فوق توسط روش اصلاح شده نیوتن حل می‌شود. روش اصلاح شده نیوتن برای استفاده در این روش به صورت زیر توصیف می‌شود: تخمین ماتریس ژاکوبین توسط دیفرانسیل‌گیری عددی یا تقریب برویدن بدست می‌آید. در اینجا اساس روش نیوتن بر روی استراتژی تخفیف استوار است. در هر تکرار نیوتن، حل سیستم معادلات خطی توسط ماتریس‌های جدا شده هوز هولدر حل می‌شود [۱۷ و ۱۸].

مجموعه شرایط لازم گفته شده برای بهینه‌سازی و حل این معادلات با شرایط مرزی مناسب ما را بسوی یک مسئله عددی با مقدار مرزی دو نقطه‌ای مجزا هدایت می‌کند.

نتایج عددی و تشریح اکستریمال‌ها

از آنجایی که پیچیدگی معادلات اجازه نمی‌دهند تا بتوان آنها را به طریق تحلیلی حل کرد، ناگزیریم از حل عددی استفاده کنیم. برای این منظور از روش پرتاپ چند نقطه‌ای استفاده می‌شود. در این روش، در زمان t_0 شرط مرزی مجهول حدس زده می‌شود و معادلات با استفاده از روش اختلاف پیشرونده حل می‌گردد و در آخر، مقدار شرط مرزی انتهایی با مقدار بدست آمده مقایسه می‌شود. ایده کلی روش، کاهش مسئله مقدار مرزی به یک رشته از مسائل با مقدار اولیه است [۱۶ و ۱۷]. در این روش، مقادیر

$$Z_j = y(x_j), \quad j = 1, \dots, m \quad (41)$$

از حل دقیق $y(x)$ در یک مسئله با مقدار مرزی

$$\dot{y}(x) = f(x, y), r(y(a), y(b)) = 0 \quad (42)$$

در چند نقطه که لازم است (بسته به کاربر آن) ثابت باشد:

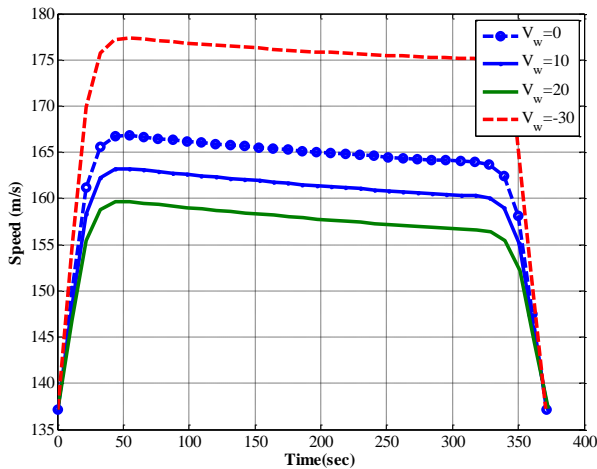
$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_m = b \quad (43)$$

محاسبه تصحیح نیوتن Δz توسط

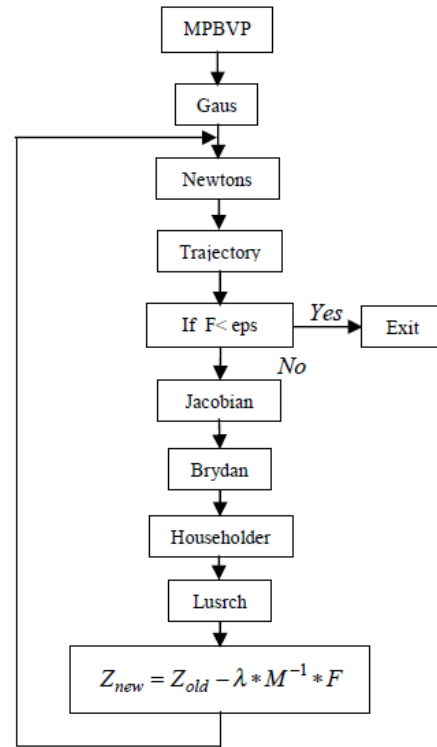
$$M\Delta z = -F(z) \quad (44)$$

در معادله (۴۶)، M ماتریس ژاکوبین و $\lambda \in [0, 1]$ علامت پارامتر تخفیف بمنظور همگرایی در تمام حالات می‌باشد. چون مسائل کنترل بهینه به حدس اولیه حساس می‌باشند، پرتاب چند نقطه‌ای می‌تواند با زیر دامنه بیشتر (برای این کار ۳۵ زیر دامنه) این حساسیت را کاهش دهد. ساختار روش پرتاب چند نقطه‌ای در شکل ۱ نشان داده شده است. در این برنامه، در زیر برنامه Gauss مقادیر و حدس اولیه، Trajectory انتگرال‌گیری از کل مسیر برای بدست آوردن تابع خطای F ، Jacobian برای بدست آوردن ماتریس ژاکوبین، Brayden جهت اصلاح ماتریس ژاکوبین، Householder جداسازی ماتریس $M=QR$ و Lnsrch جهت تعیین پارامتر تخفیف λ است [۱۹]. در اینجا روش انتگرال‌گیری برای حل عددی مسئله مقدار مرزی، استفاده از روش شناخته شده برونمایی گرگ-بالیرش-استور است [۱۷]. این روش برگرفته از برونمایی ریچاردسون می‌باشد. جزئیات اکستریمال‌های ویژه برای حداقل مصرف سوخت در شکل‌های ۲ تا ۱۵ بر اساس مشخصات پهپاد جدول ۱ ارائه شده است. به منظور کمک به تجزیه و تحلیل بیشتر مسئله، در شبیه‌سازی تاثیر سرعت باد ثابت روبرو و پشت‌سر در منطقه‌ی عملیاتی پیاده‌سازی گردید.

توسط تکرار در هر لحظه حساب می‌شوند. اطلاعات اولیه برای متغیرهای y در دامنه‌های x_j می‌بایست حدس زده شود. Z_j برای بردارهای $y(x_j)$ به عنوان فرض اولیه انتخاب می‌شود. فرض می‌شود که $y(x; x_j, z_j)^T$ نشان‌دهنده جواب مسئله مقدار اولیه معادله در دامنه $[x, x_{j+1}]$ باشد. سپس یک مسیر $y(x)$ جوابی از

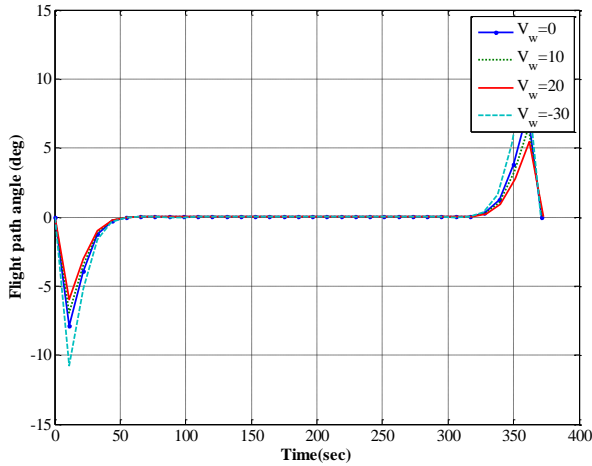


شکل ۲ تغییرات سرعت برحسب زمان



شکل ۱ ساختار روش پرتاب چند نقطه‌ای

شکل ۳ زاویه مسیر پرواز در حین مانور مورد نظر را نشان می‌دهد.



شکل ۳ تغییرات زاویه مسیر پروازی برحسب زمان

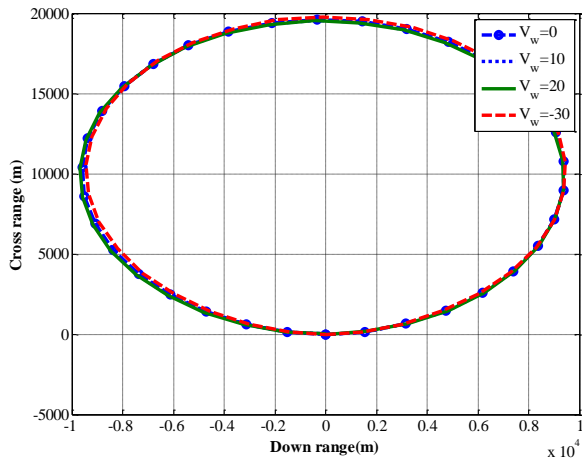
همان‌طور که از این شکل پیداست، زاویه مسیر پرواز در ابتدا کاهش یافته و سپس تقریباً ثابت مانده و در انتهای مسیر به زاویه موردنظر رسیده است. در این شکل نیز، با توجه به باد روبرو یا پشت‌سر اعمال شده، تغییرات زاویه مسیر پرواز متناسب با سرعت و ارتفاع پروازی در ابتدا و یا انتهای مسیر تغییر می‌کند. حداکثر مقدار زاویه مسیر پرواز مثبت ۷/۶ و منفی ۷/۸ درجه (بدون باد) می‌باشد. شکل ۴ تغییرات ارتفاع بهینه پهپاد برحسب زمان در هماهنگی با سرعت و زاویه مسیر و متناسب با باد روبرو یا پشت‌سر را نشان می‌دهد.

جدول ۱- مشخصات پهپاد

۴۹۰۰	وزن پهپاد (کیلوگرم)
۲۷	سطح بال (متر مربع)
۲۵	دهنه بال (متر)
۰/۰۱۷	ضریب پسا
۱۳۰۰۰	حداکثر نیروی پیش‌رانه (نیوتن)

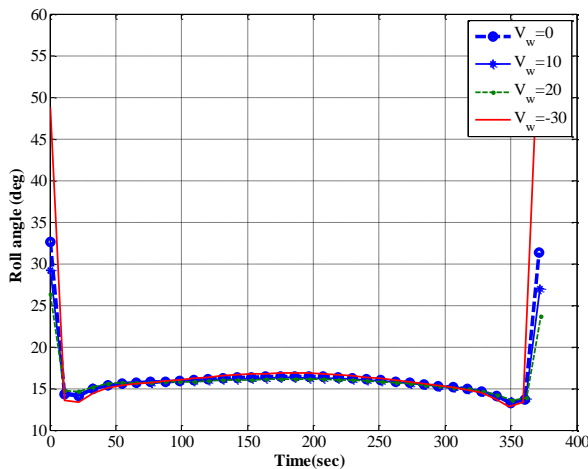
شکل ۲ تغییرات سرعت بهینه برحسب زمان پرواز را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۲ دیده می‌شود در آغاز پرواز، پرنده به میزان ۲۹ متر بر ثانیه افزایش سرعت (بدون باد) دارد که این افزایش سرعت نتیجه کاهش ناگهانی ارتفاع پرنده است. در ادامه و در طول مسیر پرواز سرعت کمی کاهش یافته اما پرنده در انتهای مسیر پروازی، به دلیل افزایش ناگهانی ارتفاع و رسیدن به نقطه شروع حرکت، با افت سرعت تا سرعت مقید شده مورد نظر همراه است. همان‌طور که انتظار می‌رفت و از شکل ۲ پیداست، با اضافه شدن باد (باد پشت‌سر) افزایش سرعت جهت کمینه کردن مصرف سوخت کمتر از باد روبرو است.

در شکل ۶ مسیر پرواز دایروی که چگونگی حرکت پهپاد در صفحه عرضی-طولی است را با باد روبرو و باد پشت سر نشان می‌دهد.

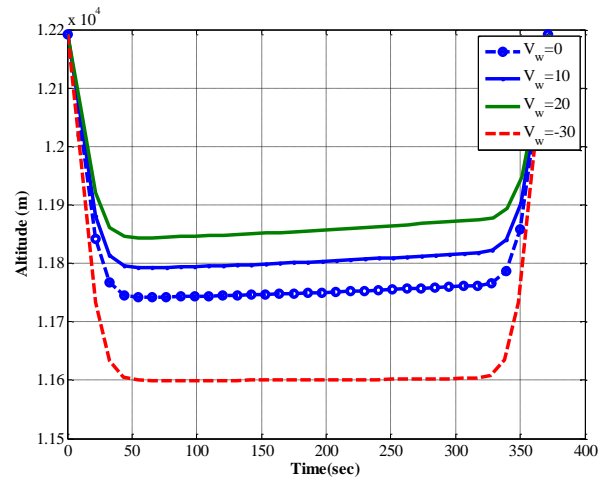


شکل ۶ مسیر پرواز دایروی

در شکل‌های ۷ تا ۹ متغیرهای کنترلی زاویه‌های گردش، ضریب بار و دسته‌گاز بر حسب زمان رسم شده‌اند. همان‌طور که از این شکل پیداست، جهت حداقل مصرف سوخت، دسته‌گاز پهپاد در کمترین مقدار خود با باد روبرو و باد پشت سر قرار گرفته است. ضریب بار نیز با توجه به باد روبرو یا باد پشت سر افزایش و یا کاهش یافته است.

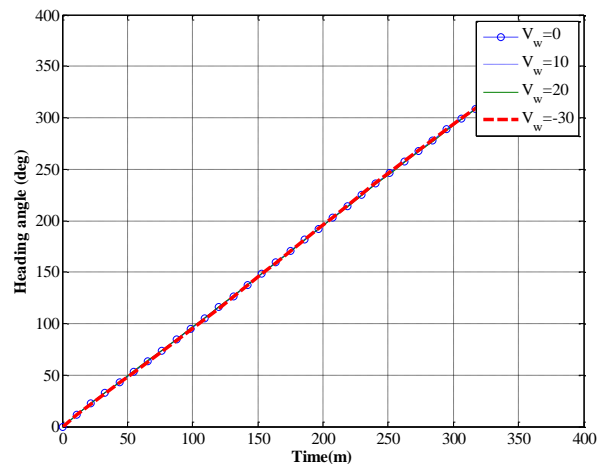


شکل ۷ متغیر کنترلی زاویه گردش

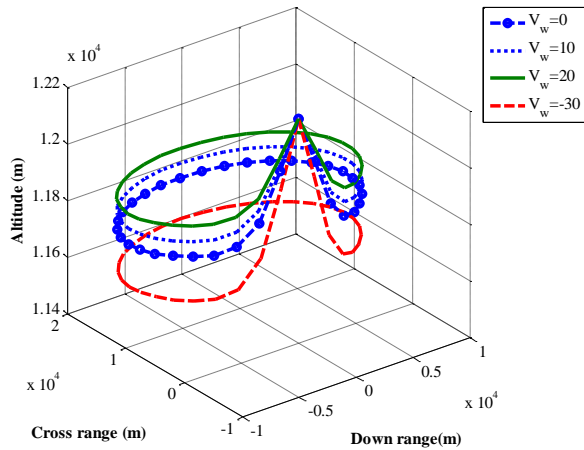


شکل ۴ تغییرات ارتفاع پروازی بر حسب زمان

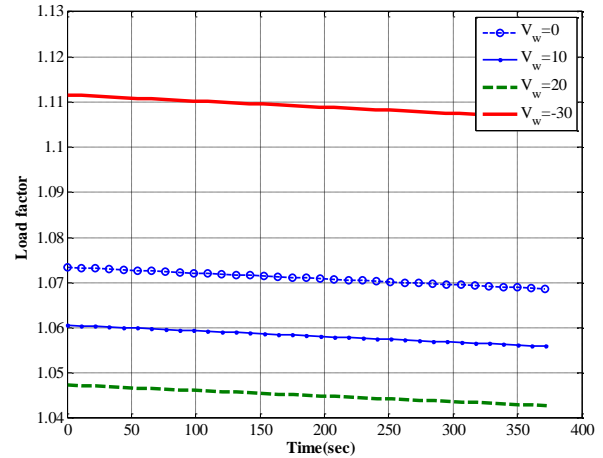
همان‌طور که از شکل ۴ پیداست، پهپاد با باد روبرو کاهش ارتفاع بیشتری نسبت به باد پشت سر در هماهنگی با سرعت پیدا کرده است. با وجودی که قیدی بر روی زاویه مسیر پرواز اعمال نشده است، پهپاد در حداکثر سرعت باد با زاویه ۱۰ درجه نزول و صعود را انجام می‌دهد. همان‌طور که از این شکل‌ها پیداست، با تغییر میزان باد تغییر زیادی در زمان رسیدن پهپاد به نقطه شروع (بین ۱ تا ۲ ثانیه) اتفاق نمی‌افتد و بهینه‌سازی با تغییر متغیرهای حالت در حال انجام است. حداکثر تغییرات ارتفاع پروازی حدود ۴۰۰ متر برای حالت بدون باد بدست آمده است. شکل ۵ تغییرات زاویه سمت بر حسب زمان را که در انتها به ۳۶۰ درجه می‌رسد را با باد روبرو و باد پشت سر بدون تغییر نشان می‌دهد.



شکل ۵ تغییرات زاویه سمت بر حسب زمان

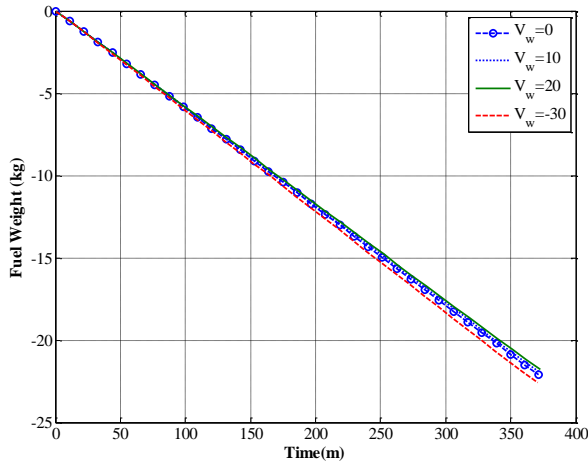


شکل ۱۰ نمای سه بعدی مسیر پرواز پرنده

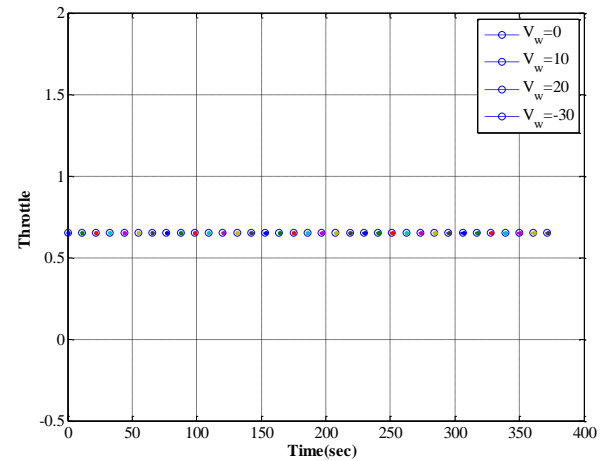


شکل ۸ متغیر کنترلی ضرب‌بار

شکل ۱۲ تا ۱۵ متغیرهای الحاقی $\lambda_v, \lambda_y, \lambda_x$ که پاسخی برای تعیین کانتورهای اکستریمال (برای بدست آوردن کنترل‌ها) است، را نشان می‌دهد. شکل ۱۲ متغیر الحاقی λ_{w_f} که پاسخی برای تعیین کانتورهای اکستریمال مصرف سوخت است را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱ مصرف سوخت پرنده در حین پرواز

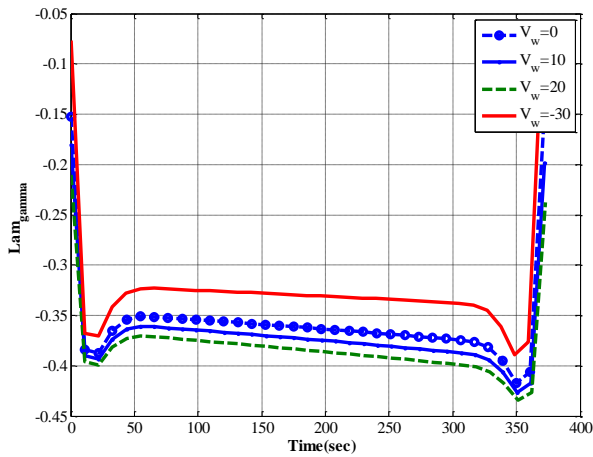


شکل ۹ متغیر کنترلی دسته‌گاز

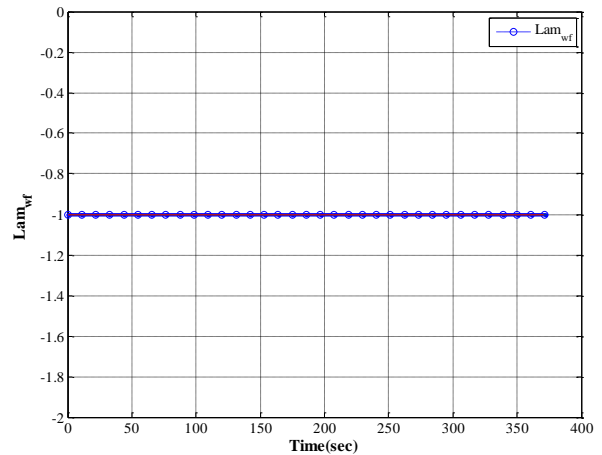
حرکت سه‌بعدی پهپاد و مصرف سوخت پرنده با باد روبرو و باد پشت‌سر در پرواز بهینه در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده است. مصرف سوخت در پرواز بدون باد ۲۲ کیلوگرم بدست آمده است.

مدت کل زمان پرواز برای یک گشت‌زنی دایره‌ای بدون تاثیر باد ۳۷۱ ثانیه بدست آمده است. در کارهای قبلی به منظور بهبود مصرف سوخت، یک پرواز متناوب بین حداکثر و حداقل نیروی پیشرانش تعویض می‌شود. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که برای داشتن حداقل مصرف سوخت در پرواز گشت‌زنی در مسیر دایروی با حداقل نیروی پیشرانش ثابت بدست آمده، لازم است که پهپاد پرواز متناوب نزولی و صعودی داشته باشد. به علاوه، یک تبادل بین

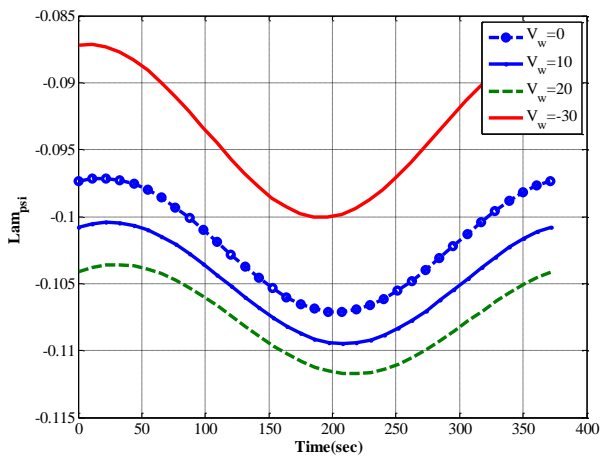
انرژی جنبشی و پتانسیل می تواند عملکرد متناوب را تسهیل کند. در نهایت، شکل ۱۶ تغییرات زمانی نیروی پیشران را نشان می دهد.



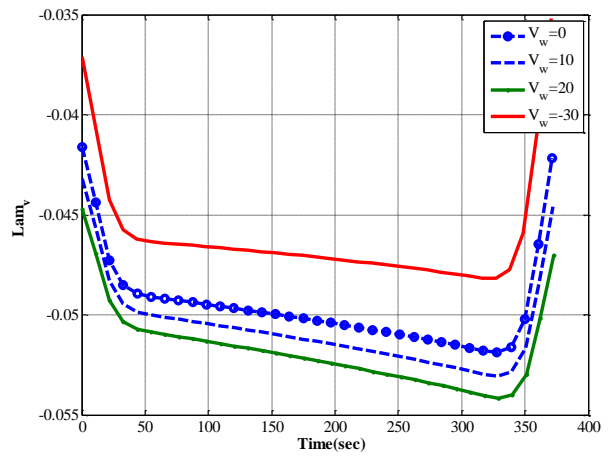
شکل ۱۴ ضریب لاگرانژ متغیر زاویه مسیر پرواز



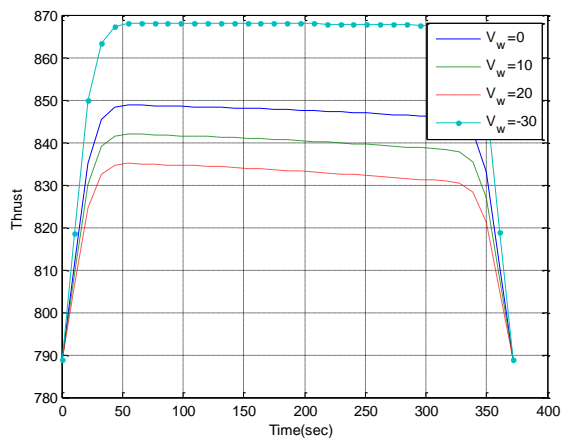
شکل ۱۲ ضریب لاگرانژ متغیر مصرف سوخت



شکل ۱۵ ضریب لاگرانژ متغیر زاویه سمت



شکل ۱۳ ضریب لاگرانژ متغیر سرعت



شکل ۱۶ تغییرات نیروی پیرانش بر حسب زمان

- [2] Harada, M., & Bollino, K., "Fuel optimization if figure-8 flight for unmanned aerial vehicles", AIAA Guidance Navigation, and Control Conference 10-13 August 2009, Chicago, Illinois (AIAA 2009-6011).
- [3] Chen, R. H., & Speyer, J. L., "Improved endurance of optimal periodic flight", AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 2006.
- [4] Harada, M., & Bollino, K., "Minimum-cost trajectories for longitudinal flight of UAVs, AIAA Guidance", Navigation, and Control Conference 2-5 August, Toronto, Ontario Canada, 2010.
- [5] Malaek, S. M. B., Marzaabadi, M. A., & Sadati, S. H. "Minimum fuel trajectory in a 3/D time scheduled climb", First Int. Conf. of the Iranian Aerospace Society, Sharif Univ. of Tech. AERO, 2000.
- [6] Grimm, W., Well, K. H., & Oberle, H. J., "Periodic control for minimum-fuel aircraft trajectory", Journal of Guidance and Dynamics, Vol. 9, No. 2, pp. 169-174, 1986.
- [7] Franco, A., Valenzuela, A., & Rivas, D. "Optimal control of cruise flight at constant altitude", 27th International Congress of the Aeronautical Sciences, ICAS, 2010.
- [8] Lavaei Yanesi, A. L., & Amir Atashgah, M. "Three-dimensional constrained optimal motion planning for a six-degree-of-freedom quadrotor helicopter for urban traffic purposes", Modares Mechanical Engineering, Vol. 15, No. 5, pp. 13-24, 2015. (in Persian)
- [9] Bahrami, M., & Sadati, S. H., "Minimum-time roll around the velocity-vector maneuver of aircraft", Esteghlal Journal, Vol. 20, No. 1, September, 2001. (in Persian)
- [10] Bryson, A. E., & Ho, Y. C., "Applied optimal control", Hemisphere, Washington D. C., pp. 1-89, 197.
- [11] Kirk, D. E., "Optimal control theory an introduction", Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, pp. 184-310, 1970.
- [12] Visser, H. G., Kelley, H. J., & Cliff. E. M., "Energy management of three-dimensional minimum-time intercept", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 10, No. 6, pp. 574-580, 1987.
- [13] Bilimoria K. D., & Cliff. E. M., "Singular trajectory in airplane cruise-dash optimization",

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، قانون کنترل بهینه توسط اصل حداقل پانتریان با کنترل‌های زاویه چرخش، ضریب بار و دسته‌گاز برای پهپادی با ارتفاع و مداومت پرواز بالا و با محدودیتها و با باد ثابت به عنوان تاثیر اختلالات خارجی بر مسیر بهینه حل گردید. همان‌طور که بحث شد، هدف از این بررسی، به‌دست آوردن حداقل مصرف سوخت پهپاد در گشت‌زنی با استفاده از این قانون بود. مسئله کنترل بهینه با استفاده از همیلتونین و با معادلات وضعیت و کمک وضعیت با استفاده از روش پرتاب چند نقطه‌ای حل گردید. از آنجا که تنظیم دریچه‌گاز به عنوان یک کنترل خطی مدل شد، ساختار سوئیچینگ بهینه یافت نشد. در این مورد، به طور کلی کنترل بهینه تنظیمات پیش‌رانش حداقل است. مدت زمان مسیر پرواز دایره‌ای پهپاد ۳۷۱ ثانیه و حداکثر سرعت بدست آمده ۱۶۷ متر بر ثانیه در حالت بدون باد است. میزان مصرف سوخت در این مدت زمان نیز ۲۲ کیلوگرم بدست آمده است. ابزار و روش تدوین شده می‌تواند بهنگام طراحی سیستم گشت‌زنی اتوماتیک پهپاد برای کاربردهایی که نیازمند پروازهای طولانی مدت هستند بکار برده شود.

فهرست علائم

علائم انگلیسی	
V	سرعت پرنده (m/sec)
x	مسافت طی شده طولی
y	مسافت طی شده عرضی
h	ارتفاع (متر)
l	طول کل مسیر پروازی
W_F	وزن سوخت مصرفی
n	ضریب بار
W	وزن پرنده (کیلوگرم)
$a(h)$	سرعت صوت
g	شتاب جاذبه زمین
علائم یونانی	
γ	زاویه مسیر پرواز (درجه)
χ	زاویه سمت (درجه)
$\rho(h)$	چگالی هوا

مراجع

- [1] Harada, M., Bollino, K., & Ross, I. M., "Minimum fuel circling for an unmanned aerial vehicle", Proceedings of 2005 JSASS-KSAS Joint International Symposium on Aerospace Engineering, No. 025, 2005.

- Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 12, No. 3, pp. 304-310, 1989.
- [14] Flight Stability And Automatic Control Robert C. Nelson , Second Edition , McGraw-Hill, 1998.
- [14] Oberle, H. J., “*Numerical computation of singular control functions in trajectory optimization problems*”. Jorrnal of Guidance and Dynamics Vol 13 No1. pp.153-159, 1990.
- [15] Seywald, H., Cliff, E. M., & Well, K. H, “*Range optimal trajectories for an aircraft flying in the vertical plan*”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 17, No. 2, pp. 389-398, 1994.
- [16] Maurer, H. “*Numerical solution of singular control problems using multiple shooting techniques*”, Journal of Optimization Theory and Applications Vol 18 No 2, pp.153-159, 1990.
- [17] Stoer, J., & Bulirsch, R. “*Introduction to numerical analysis*”, Springer-Verlag, pp.260-630, 1992.
- [18] Teukolsky, P., & Flannery, “*Numerical recipes in FORTRAN*”, pp. 745-775, 1994.
- [19] Oberle, H. J., “*BNDSCO-A program for the numerical solution of optimal control problems,*” Internal Report No. 515-89/22, Institute for Flight Systems Dynamics, DLR, Oberpfaffenhofen, Germany, 1989.