نشریه علمی- پژوهشی مهندسی هوانوردی
سال بیست و دوم، شماره دوم، پاییز ۹۹

بررسی ارتعاشات آزاد و پایداری آیروالاستیک پانل مخروطی ناقص در جریان مافوق صوت

مسعود جوادی[۱]، وحید خلفی*[۲]

۱- دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فناوی هوایی شهید ستاری، تهران، ایران
۲- استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۳/۰۲   تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۱۳)

چکیده

در پژوهش حاضر بر آنیم که مسئله ارتعاشات آزاد و پایداری آیروالاستیک پانل مخروطی ناقص در جریان مافوق صوت را بررسی نماییم. با به‌کارگیری اصل هامیلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر با آن بدست می آید. پایداری آیروالاستیک با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک (لاو) پوسته‌ها و تئوری خطی پیستون برای مدل سازی جریان سیال مافوق، بدست آورده شده است. با استفاده از روش گالرکین، معادلات کوپل سازه-سیال به معادلات دیفرانسیلی معمولی تبدیل می شود. با حل و تحلیل مسئله مقدار ویژه مقادیر فرکانس و دمپینگ سیستم برای مقادیر مختلف جریان مافوق صوت حاصل می شود. نتایج با استفاده از داده های عددی و نظری موجود اعتباری سنجی می شوند. بررسی ها برای پوسته های مخروطی با هندسه های مختلف انجام شده است. مرزهای ناپایداری فلاتر برای پانل مخروطی ناقص با زوایای نیم‌راس، زوایای کمان و ضخامت های مختلف بدست می آید. در همه موارد نوع ناپایداری از نوع فلاتر کوپل خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: *ارتعاشات، پایداری، روش گالرکین، پانل مخروطی، فرکانس طبیعی، مقدار ویژه*

Free Vibration and Aeroelastic Stability Analysis of Truncated Conical Panels in Supersonic Flows

Masoud Javadi and Vahid Khalafi*

Abstract

The current study is dedicated to free vibration and aeroelastic stability analysis of truncated conical panels in supersonic flows. Governing equations of motion and the corresponding boundary conditions are derived using Hamiltonian formulations. The aeroelastic stability problem is formulated based on first-order shear deformation theory as well as classical shell theory with the linearized first-order piston theory for aerodynamic loading. Based on the Galerkin truncation, the coupled fluid-solid interaction equation transferred to ordinary differential equations. By solving the eigenvalue problem, frequencies and damping of the system have been obtained versus supersonic flows. The results are validated using numerical and theoretical data available in the literature. The study has been accomplished for truncated conical shells with various geometries. The flutter boundaries are obtained for truncated conical shells with different semi-vertex cone angles, different subtended angles, and different thicknesses. In all cases, the truncated conical shell loses its stability through coupled-mode flutter.

Key words: *Vibrations, Stability, Galerkin method, Truncated conical shells, Frequency, Eigenvalue.*

۱- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی به دلیل داشتن استحکام، سختی و شکل هندسی، دارای کاربرد گسترده‌ای در صنایع هوافضایی هستند. از این رو پایداری و کمانش این سازه‌ها همیشه یک موضوع مهم بوده است. پوسته‌ها به دلیل داشتن انحنا در مقابل نیروهای داخل صفحه‌ای و نیروهای خمشی، مقاومت بالایی دارند، درنتیجه آن‌ها را می‌توان با ابعاد بزرگ و وزن کم ساخت. بعضی از پوسته‌ها به دلیل زیبایی و ایجاد شرایط آیرودینامیکی مناسب استفاده گسترده‌ای دارند.

پدیده فلاتر یکی از انواع ناپایداری‌های دینامیکی در حوزه آیروالاستیسیته است که درنتیجه اندرکنش بین نیروی اینرسی سازه، نیروی ناشی از تغییر شکل سازه و فشار آئرودینامیکی

* نویسنده پاسخگو: وحید خلفی، ایمیل: khalafi@ssau.ac.ir

ناشی از جابجایی سازه ایجاد می‌شود [۱]. مرزهای فلاتر با افزایش فشار دینامیکی سیال ظاهر می‌شود. تا زمانی که مقادیر فشار دینامیکی کم (زیر حالت بحرانی) هستند، سازه تحت ارتعاشات رندوم با فرکانس‌های نزدیک به فرکانس‌های طبیعی پایین‌تر از سازه قرار می‌گیرد که این ارتعاشات در اثر تحریک ناشی از تغییرات فشار در لایه‌مرزی متلاطم که به‌عنوان نیروی خارجی بر سیستم سازه و سیال عمل می‌کند، ایجاد می‌شود. در این حالت بیشترین اندازه دامنه ارتعاشات، نسبت کوچکی از ضخامت پانل است. با نزدیک شدن فشار دینامیکی به فشار دینامیکی بحرانی، حرکت سازه، خود تغییرات قابل‌توجهی را در فشار ناشی از سیال ایجاد می‌کند که این امر در مقابل باعث تشدید حرکت سازه و درنهایت بروز پدیده فلاتر می‌شود [۲].

ارتعاش پوسته‌ها در مقیاس گسترده‌ای و در حدود بیش از صدسال موردبررسی قرارگرفته است. در اغلب کارهای انجام‌شده، محققان به دنبال محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سازه هستند تا رفتار ارتعاشی سازه شناسایی‌شده و بسته به کاربرد موردنظر، مناسب بودن طرح مورد ارزیابی قرار گیرد. یکی از بزرگ‌ترین مراجع موجود درزمینهٔ پوسته‌ها مطالعات انجام‌شده توسط لیسا است [۳].

از دهه ۶۰ میلادی حل‌های عددی بسیار زیادی بر پایه روش‌های اجزا محدود برای انواع مختلف پوسته‌ها ارائه‌شده‌اند. پوسته‌هایی با شرایط مرزی مختلف، جنس‌های متفاوت ازجمله مواد هدفمند و کامپوزیت‌ها موردبررسی عددی قرار گرفتند. در کاربردهای مهندسی، راه‌حل تحلیلی شناخت بیشتری را نسبت به عملکرد ارتعاشی پوسته‌ها با طول محدود ایجاد می‌کند به‌شرط اینکه درستی و صحت آن با معیارهای تعیین‌شده خاص مورد ارزیابی قرار گیرد. در میان تئوری‌هایی که درگذشته بسط داده‌شده‌اند، ثابت‌شده است که روش لاو مؤثرترین و مفیدترین روش در تئوری‌های خطی پوسته‌های نازک است. در ادامه برخی از کارهای انجام‌شده در زمینهٔ پوسته‌ها بررسی می‌شوند [۴]. لم و همکاران بر اساس روش GDQ مطالعاتی را در این زمینه انجام دادند [۵]. ژاو و همکاران [۶] با به‌کارگیری روش Kp-Ritz به بررسی ارتعاشات پانل مخروطی پرداختند.

به‌منظور مدل‌سازی سیالات در مسائل پوسته‌ها از دو الگوی پیستون و یا جریان پتانسیل استفاده‌شده است [۷-۱۰].

در بررسی پانل فلاتر مطالعات کمتری انجام‌گرفته است. برخی از مطالعات در زمینهٔ فلاتر پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای صورت گرفته است. کارتر و استرمن [۱۱] فلاتر پوسته استوانه ای تحت‌فشار داخلی را با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های اولیه، موردبررسی قراردادند. بار و استیرمن [۱۲] اثرات نقص هندسی در پوسته استوانه‌ای را موردمطالعه قراردادند. سینگها و ماندل [۱۳] با استفاده از روش FEM به بررسی فلاتر ورق و پوسته استوانه‌ای کامپوزیت پرداختند.

درزمینهٔ بررسی فلاتر صفحات با خواص هدفمند می‌توان به پژوهش‌های صورت گرفته حدادپور و همکاران[۱۴] و حدادپور و نوازی [۱۵] اشاره نمود. مطالعات ارزشمندی نیز در فلاتر پوسته استوانه‌ای توسط حدادپور و همکاران [۱۶] و همچنین فلاتر پوسته مخروطی توسط محمود خانی و همکاران [۱۷] صورت گرفته است.

داور و شکرالهی [۱۸] به بررسی رفتاری پوسته مخروطی با خواص مواد هدفمند در جریان مافوق صوت پرداختند.

تحلیل فلاتر پانل مخروطی با مواد هدفمند با در نظر گرفتن اثرات حرارتی توسط هائو و همکاران صورت گرفت [۱۹]. یانگ و همکاران [۲۰] به تحلیل ارتعاشات خطی سازه مخروطی تحت جریان مافوق صوت در نزدیکی رزونانس های داخلی این سازه پرداختند. در زمینه تحلیل های غیرخطی می توان به کار بختیاری و همکاران ارشاره کرد [۲۱]. آنها با استفاده از مدل ساندرز و استفاده از روش المان محدود به تحلیل دینامیکی سازه های مخروطی پرداختند. در زمینه های کنترلی و مواد هدفمند در راستای طولی سازه ای مخروطی نیز به تازگی مطالعاتی صورت پذیرفته است [۲۲, ۲۳].

رحمانیان و جوادی [۲۴] به تحلیل پوسته‌های مخروطی تحت جریان مافوق صوت زاویه‌دار پرداختند. آن‌ها با در نظر گرفتن شرایط مرزی کلاسیک متنوع به مطالعه اثرات پارامترهای هندسی پوسته مخروطی به بررسی مرزهای ناپایداری دینامیکی پرداختند. همین نویسندگان [۲۵] اثر تخلخل در رفتار آیروالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای را نیز بررسی نموده‌اند.

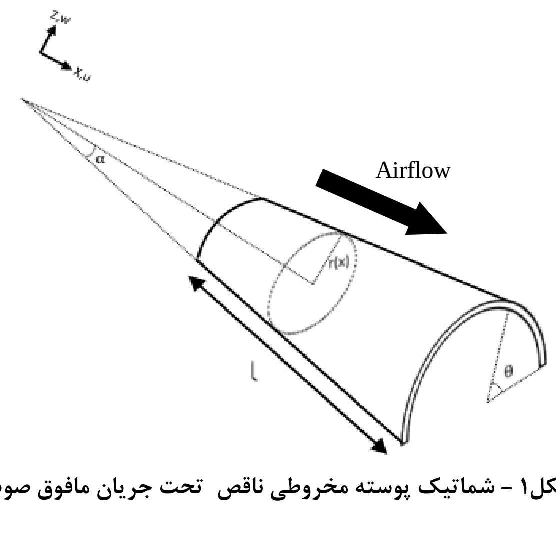
در پژوهش حاضر بر آنیم که مسئله ارتعاشات آزاد و ناپایداری آیروالاستیک پانل مخروطی را با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک (لاو) پوسته‌ها و شرط مرزی دلخواه به روش مودهای فرضی بررسی نماییم. در این راستا و در گام نخست، انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار نیروی آئرودینامیکی که درواقع همان اثر

جریان سیال خارجی است محاسبه می‌شوند. با داشتن مقادیر انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار نیروی خارجی و همچنین به‌کارگیری اصل هامیلتون، فرم انتگرالی وردشی معادلات دینامیکی مسئله به دست می‌آید. از سوی دیگر به‌منظور مدل‌سازی جریان سیال مافوق، از تئوری معروف پیستون استفاده‌شده و توزیع فشار ایجادشده بر روی سازه استخراج خواهد شد. در ادامه با در نظر گرفتن توابع شکل مناسب (که شرایط مرزی لازم را ارضا می‌نمایند) و با استفاده از روش گالرکین به مسئله مقدار ویژه دست می‌یابیم. با تحلیل مقدار ویژه، مقادیر فرکانس طبیعی و شکل‌مودهای سازه به‌دست‌آمده و حوزه پایداری تعیین خواهد شد. در واقع هدف از این مطالعه به شرح زیر است.

- استخراج معادلات حاکم بر پانل‌های مخروطی ناقص با استفاده تئوری کلاسیک پوسته ها
- بررسی ارتعاشات آزاد پانل‌های مخروطی ناقص
- استخراج معادلات دینامیکی حاکم بر پانل‌های مخروطی با استفاده تئوری کلاسیک و با در نظر گرفتن جریان سیال مافوق صوت
- بررسی اثر زاویه نیم راس مخروط، زاویه کمان و طول پانل بر رفتار ارتعاشی وحوزه پایداری

۲- معادلات حاکم

شکل ۱ پوسته مخروطی ناقص و دستگاه مختصات مربوطه در را نشان می دهد. این پانل دارای زاویه نیم رأس α و زاویه کمان β و ضخامت h و طول اریب L می باشد. اندازه بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین شعاع این پانل به ترتیب برابر a, b است.



شکل۱ - شماتیک پوسته مخروطی ناقص تحت جریان مافوق صوت

ترم های u, v مؤلفه‌های جابجایی در راستای x, θ و w مؤلفه جابجایی در راستای عمود بر خط طولی مخروط (z) هست. مقدار r نیز برحسب فاصله طولی از رأس مخروط با رابطه زیر بیان می‌شود.

$$r(x) = x\sin(\alpha) \tag{۱}$$

با توجه به ضخامت کم پوسته، بسط تیلور در راستای ضخامت و حول جابجایی‌ها در صفحه میانی صورت می‌گیرد. در نظریه‌های مختلف پوسته تنها از تعداد محدودی از جملات بسط تیلور استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x,\theta,z) &= u(x,\theta) + z\frac{\partial u(x,\theta,0)}{\partial z} \\
\bar{v}(x,\theta,z) &= v(x,\theta) + z\frac{\partial v(\alpha,\theta,0)}{\partial z} \\
\bar{w}(x,\theta,z) &= w(x,\theta),
\end{aligned} \tag{۲}$$

با توجه به فرضیات لاو و مقادیر ضرایب لامه برای پوسته مخروطی میدان کرنش-جابجایی سطح مرجع به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
e_\theta &= \frac{1}{r(x)}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u\sin(\alpha) + w\cos(\alpha)}{r(x)} \\
e_{x\theta} &= \frac{1}{r(x)}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v\sin(\alpha)}{r(x)}
\end{aligned} \tag{۳}$$

همچنین با توجه به فرضیات بیان‌شده e_x و e_θ و $e_{x\theta}$ در هر نقطه‌ای از پانل مخروطی را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned}
e_x &= e_1 + \kappa_x z \\
e_\theta &= e_2 + \kappa_\theta z \\
e_{x\theta} &= e_{12} + \kappa_{x\theta} z
\end{aligned} \tag{۴}$$

که $e^T = \{e_x, e_\theta, e_{x\theta}\}$ و $\kappa^T = \{\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}\}$ به ترتیب کرنش‌ها و انحناهای صفحه مرجع می‌باشند. که به شکل ذیل حاصل می شوند.

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\kappa_\theta = -\frac{1}{r^2(x)}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos(\alpha)}{r^2(x)}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\sin(\alpha)}{r(x)}\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (۵)$$

$$\kappa_{x\theta} = -\frac{2}{r(x)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{2\sin(\alpha)}{r^2(x)}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{2\cos(\alpha)}{r(x)}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2v\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{r^2(x)},$$

برای یک پوسته نازک روابط تنش-کرنش با توجه بـه فرضـیات قانون هوک به شکل ذیل بیان می‌شود.

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}[e_1 + \nu e_2],$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}[e_2 + \nu e_1], \qquad (۶)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}e_{12},$$

اگر روابط میان تنش و کرنش در دسترس بوده و بر روی ضخامت پوسته از آن‌ها انتگرال‌گیری شود، به نیروها و ممان های برآیند می‌رسیم. واحد نیروهای برآیند، نیرو بر واحد طول و واحد ممان های برآیند نیز، ممان بر واحد طول سطح میانی خواهد بود.

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}(e_x + \nu e_\theta),$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2}(e_\theta + \nu e_x), \qquad (۷)$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}e_{x\theta}$$

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\ \kappa_x + \nu\kappa_\theta\ ,$$

$$M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\ \kappa_\theta + \nu\kappa_x \qquad (۸)$$

$$M_{x\theta} = M_{\theta x} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}$$

در مسائل دینامیک سازه‌ها و به‌ویژه مسائل ورق‌ها و پوسته‌ها به علت حجم زیاد محاسبات و عدم شناخت شرایط مرزی به‌صورت قطعی از روش همیلتون به‌طور گسترده استفاده می‌شود. مکانیک همیلتونی درواقع نمایش جدیدتری از مکانیک کلاسیک به شمار می‌آید.

دراصل همیلتون پژوهشگر با استفاده از انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و در نظر گرفتن کار نیروهای غیر پایستار سیستم و با بهره‌گیری از اصول حساب تغییرات، نهایتا به فرم انتگرالی معادلات حاکم دست خواهد یافت. این روش معمولاً به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \qquad (۹)$$

که T ،U و W_{nc} به ترتیب انرژی جنبشی ، انرژی کرنشی کل و کار انجام‌شده توسط نیروهای خارجی هستند. در کار حاضر استخراج معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی و اصل همیلتون صورت گرفته است. انرژی جنبشی مجموعه به‌طورکلی به شکل زیر بیان می‌شود.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^h\int_0^\beta\int_0^L \rho(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)r(x) \times (1 + \frac{z}{r(x)})\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \qquad (۱۰)$$

که با توجه به فرضیات در نظر گرفته‌شده وردش انرژی جنبشی برای این پوسته‌ها مخروطی برابر خواهد بود با:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T \mathrm{d}t = \iiint_V (\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w) \times -\rho h r(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t \qquad (۱۱)$$

انرژی کرنشی برحسب مؤلفه‌های جابجایی و تنش به شکل زیـر ظاهر می‌شوند.

$$U = \iiint_V\ \sigma_x e_x + \sigma_\theta e_\theta + \sigma_{x\theta} e_{x\theta}\ \mathrm{d}V \qquad (۱۲)$$

برای کار ناشی از فشار آئرودینامیکی ناشی از اندرکنش سازه و سیال، الگوهای آئرودینامیکی مختلفی ارائه‌شده است. نظریه پیستون در سال ۱۹۵۶ توسط اشلی و زارتاریان [۲۶] ارائه شد. بر اساس تئوری پیستون، فشار آئرودینامیکی وارد بر سطح پوسته را می‌توان با شبیه‌سازی با فشار آیزنتروپیک واردشده بر پیستون که با سرعت z در کانالی یک‌بعدی محتوی گاز کامل درحرکت است به دست آورد.

$$P=-\frac{\gamma_a P_\infty M^2}{(M^2-1)^{\frac{1}{2}}}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{M^2-2}{M^2-1}\dfrac{1}{V_\infty}\dfrac{\partial w}{\partial t}\\ -\dfrac{w}{2r(x)(M^2-1)^{\frac{1}{2}}}\end{array}\right] \tag{۱۳}$$

پـس از محاسـبه فشـارآیرودینامیکی، بـه محاسـبه وردش کـار انجام‌شده پرداخته می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta W dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{l_1}^{l_2}Pwr(x)dxd\theta dt \tag{۱۴}$$

با جایگزینی وردش انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروی خارجی در رابطه همیلتون، معادله انتگرالی حاصل می‌شود. طبق اصل همیلتون وردش انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروی خارجی برابر صفر است؛ بنابراین معادلات حرکت (ترم‌های انتگرال‌های سه‌گانه) و شرایط مرزی (ترم‌های انتگرال‌های دوگانه) حاصل می‌شود.

$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\dfrac{(N_{xx}-N_{\theta\theta})}{x}\\ +\dfrac{1}{x\sin\alpha}\dfrac{\partial(N_{x\theta})}{\partial\theta}\end{array}\right)=\rho h\ddot{u}, \tag{۱۵}$$

$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial(N_{x\theta})}{\partial x}+\dfrac{1}{r(x)}\dfrac{\partial(N_{\theta\theta})}{\partial\theta}\\ +\dfrac{1}{x\tan\alpha}\dfrac{\partial(M_{x\theta})}{\partial x}+\dfrac{2M_{x\theta}}{x^2\tan\alpha}\\ +\dfrac{\cos\alpha}{r^2(x)}\dfrac{\partial(M_{\theta\theta})}{\partial\theta}+\dfrac{2N_{x\theta}}{x}\end{array}\right)=\rho h\ddot{v}, \tag{۱۶}$$

$$\left(\begin{array}{l}+\dfrac{\partial^2(M_{xx})}{\partial x^2}+\dfrac{\partial(M_{xx})}{\partial x}\dfrac{2}{x}\\ -\dfrac{\partial(M_{\theta\theta})}{\partial x}\dfrac{1}{x}+\dfrac{\partial^2(M_{\theta\theta})}{\partial\theta^2}\dfrac{1}{r^2(x)}\\ +2\dfrac{\partial^2(M_{x\theta})}{\partial x\partial\theta}\dfrac{1}{r(x)}-N_{\theta\theta}(\cos\alpha)\\ -\dfrac{\partial(M_{x\theta})}{\partial\theta}\dfrac{2}{x^2\sin\alpha}+P\end{array}\right)=\rho h\ddot{w} \tag{۱۷}$$

همـان‌طـور کـه اشـاره شـد، تـرم‌هـای داخـل انتگـرال‌هـای دوگانـه نشـان‌دهنـده شـرایط مـرزی مسـئله مـی‌باشـند؛ کـه بـرای ابتـدا و انتهـای یـال پانـل مخـروط شـرایط مـرزی بـه شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial M_{xx}}{\partial x}x\sin\alpha+\sin\alpha M_{xx}+\\ M_{\theta\theta}\sin\alpha+\dfrac{\partial M_{x\theta}}{\partial\theta}=0\end{array}\right)\ or\ (\delta w)=0\\ (N_{x\theta}r(x)+(\cos\alpha)M_{x\theta}=0)\ \text{or}\ (\delta v=0)\\ (M_{xx}r(x)=0)\ \text{or}\ (\partial(\delta w)/\partial x)=0\\ (N_{x\theta}(x\sin\alpha)=0)\ \text{or}\ (\delta u=0)\end{array} \tag{۱۸}$$

برای $\theta=0,\beta$ شرایط مرزی برابر خواهد بود با

$$
\begin{aligned}
&(N_{\theta\theta}+\frac{M_{\theta\theta}}{x\tan\alpha}=0)\text{or}(\delta v=0)\\
&(\frac{M_{x\theta}}{x}=0)\text{or}(\delta w)\\
&(\frac{M_{\theta\theta}}{r(x)}=0)\text{or}(\frac{\partial(\delta w)}{\partial\theta})\\
&(M_{x\theta}=0)\text{or}(\frac{\partial(\delta w)}{\partial x})\\
&(N_{x\theta}(x\sin\alpha)=0)\text{or}(\delta u=0)
\end{aligned}
\tag{۱۹}
$$

۳- حل معادلات حاکم

حل دقیق مسائل صفحه و پوسته همیشه دارای محدودیت‌هایی هست که ازجمله آن‌ها می‌توان به ساختار بار اعمالی و شرایط مرزی و سازه اشاره نمود، اگر این شرایط کمی پیچیده شوند، حل آن‌ها بسیار سخت و حتی در مواردی غیرممکن خواهد شد. در این شرایط، روش‌های حل‌تقریبی، یکی از بهترین راه‌ها برای حل این مسائل است. اگرچه تئوری ریاضیات بکار گرفته‌شده در این روش پیچیده است، اما تفسیر فیزیکی آن بسیار ساده است. توابع جابجایی تقریبی ارائه‌شده که شرایط مرزی را ارضا می‌کند به شکل زیر است:

$$
\begin{aligned}
u_s&=\sum_{n=1}^{N1}\sum_{m=1}^{M1}\left(\begin{array}{l} e^{\mu t}a_{mn}\sin\frac{n\pi\theta}{\beta}\\ \times\cos\frac{m\pi(x-x_0)}{L}\end{array}\right)\\
v_s&=\sum_{n=1}^{N1}\sum_{m=1}^{M1}\left(\begin{array}{l} e^{\mu t}b_{mn}\cos\frac{n\pi\theta}{\beta}\\ \times\sin\frac{m\pi(x-x_0)}{L}\end{array}\right)\\
w_s&=\sum_{n=1}^{N1}\sum_{m=1}^{M1}\left(\begin{array}{l} e^{\mu t}c_{mn}\sin\frac{n\pi\theta}{\beta}\\ \times\sin\frac{m\pi(x-x_0)}{L}\end{array}\right)
\end{aligned}
\tag{۲۰}
$$

که n, m تعداد نیم موج‌ها در جهت محورها طولی و جانبی هست. با استفاده از روش گالرکین خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\beta}\int_{x_0}^{x_0+L}\left(\begin{array}{l}\cos\frac{m\pi(x-x_0)}{L}R(x)\\ \times R_1\sin(\frac{n\pi\theta}{\beta})e^{\mu t}\end{array}\right)\mathrm{d}x=0\\
&\int_0^{\beta}\int_{x_0}^{x_0+L}\left(\begin{array}{l}\sin\frac{m\pi(x-x_0)}{L}R(x)\\ \times R_2\cos(\frac{n\pi\theta}{\beta})e^{\mu t}\end{array}\right)\mathrm{d}x=0\\
&\int_0^{\beta}\int_{x_0}^{x_0+L}\left(\begin{array}{l}\sin\frac{m\pi(x-x_0)}{L}R(x)\\ \times R_3\sin(\frac{n\pi\theta}{\beta})e^{\mu t}\end{array}\right)\mathrm{d}x=0
\end{aligned}
\tag{۲۱}
$$

کهR_1 R_2 و R_3 معادلات حرکت هستند که توابع تقریبی در آن‌ها جایگزین شده‌اند. به‌منظور سادگی در انتگرال‌گیری به ترتیب مقادیر x^4, x^4, x^2 در معادلات ضرب می‌شوند. پس از اعمال روش گالرکین، معادله جبری خطی، به شکل زیر به وجود می‌آورد.

$$(\mu^2C1+\mu C2+C3)\{X\}=0 \tag{۲۲}$$

که C_3, C_2 ,C_1 به ترتیب ماتریس جرمی، ماتریس میرایی آئرودینامیکی و ماتریس سفتی هستند و$\{X\}$ بردار ضرایب نامعلوم هستند. با توجه به تعداد ترم‌های در نظر گرفته در راستای طولی و محیطی به تعداد $3M_1N_1$ ضرایب نامعلوم خواهیم داشت که پس از حل معادلات این ضرایب مشخص می‌شوند. برای وجود جواب غیر صفر برای دستگاه معادلات، دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر خواهد بود.

$$\det(\mu^2C_1+\mu C_2+C_3)=0 \tag{۲۳}$$

که البته می‌توان به فرم استاندارد مسئله مقدار ویژه نیز تبدیل نمود.

$$\det(\Omega-\mu I) \tag{۲۴}$$

که I ماتریس همانی از مرتبه $3M_1N_1$ است و که Ω برابر خواهند بود با:

$$\Omega=\begin{bmatrix}0 & I\\ -C_1^{-1}C_3 & -C_1^{-1}C_2\end{bmatrix} \tag{۲۵}$$

۴- بحث و نتایج

در این بخش نتایج حاصل از حل معادلات در بخش‌های قبل ارائه‌شده است. کمیت‌های مختلف مورد ارزیابی قرارگرفته‌اند و پس از حصول اطمینان از صحت نتایج به‌دست‌آمده، تأثیر سایر پارامترهای مهم بر فرکانس‌های طبیعی، موردبررسی قرارگرفته‌اند. همچنین مشخصات و ابعاد موردبررسی در ابتدای هر بخش به‌طور کامل توصیف‌شده است. در بخش اول ارتعاشات آزاد و در بخش دوم به نتایج حاصل از تحلیل پایداری پانل مخروطی ناقص تحت جریان مافوق پرداخته‌شده است. در این قسمت تحلیل ارتعاشات آزاد پانل مخروطی با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در هر چهار طرف سازه انجام‌گرفته است. به‌منظور تسهیل در مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با نتایج دیگران، فرکانس‌های طبیعی به‌صورت بی‌بعد $f=\omega b\sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}$ ارائه‌شده‌اند.

با توجه به اینکه در ارتعاشات آزاد، معادلات حاکم نسبت به مؤلفه θ دیکوپله می‌شوند با در نظر گرفتن تعداد نیم موج مشخص در راستای کمان پانل، با افزایش جملات در راستای طولی روند همگرایی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده را بررسی می‌نمایم. در همین راستا با مشخصات هندسی و مکانیکی (زاویه نیم رأس) α=۲۰° و $\beta=60^o$ (زاویه کمان) و $L=20a$ و $h=0/015a$ روند بررسی همگرایی در جدول ۱ صورت گرفته و در ادامه مقایسه نتایج با همین مشخصات هندسی و مکانیکی صورت گرفته است. به‌منظور همگرایی در شکل مودهای بالاتر، تعداد جملات بیشتری لازم است که با در نظر گرفتن ۱۰ جمله به نتایج قابل قبولی دست خواهیم یافت.

جدول ۱- روند همگرایی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده (*SSSS*)

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(*m*,*n*)
0/0594	0/0912	0/1388	0/2114	0/3030	2
0/0644	0/0904	0/1277	0/1868	0/2650	3
0/0646	0/0898	0/1275	0/1776	0/2473	4
0/0644	0/0898	0/1274	0/1753	0/2386	5
0/0643	0/0899	0/1274	0/1754	0/2351	6
0/0642	0/0899	0/1274	0/1756	0/2342	7
0/0642	0/0898	0/1274	0/1756	0/2342	8
0/0642	0/0898	0/1274	0/1756	0/2342	9
0/0642	0/0898	0/1274	0/1756	0/2342	10

با توجه به نتایج موجود درروند بررسی همگرایی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده برای شش شکل مود اول، در این قسمت با در نظر گرفتن تعداد ده جمله در راستای طولی، به مقایسه نتایج در جدول۲ پرداخته‌شده است. مراجع [۲۷] و[۵] فرکانس طبیعی بی‌بعد شده را با استفاده از روش GDQ و تئوری های مختلف به دست آورده اند و نتایجشان را با مرجع نرم‌افزار اجزا محدود Nastran مقایسه کرده اند.

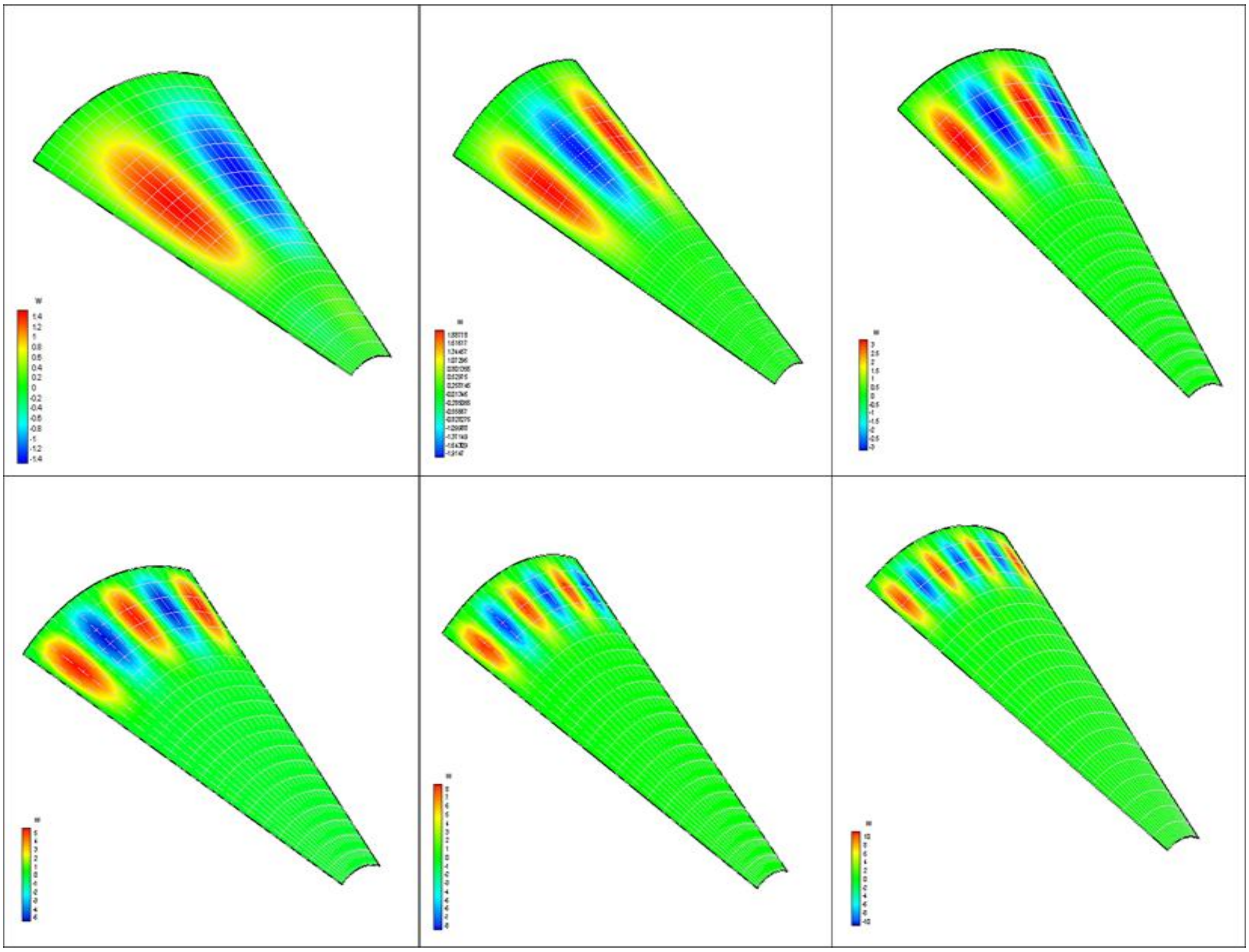
جدول ۲- مقایسه نتایج فرکانس طبیعی بی‌بعد شده(*ss*)

Present	Ref [27]	Ref[5]	Nastran [5]	(*m*,*n*)
0/0642	0/0655	0/0638	0/0655	(1,2)
0/0898	0/0918	0/0909	0/0917	(1,3)
0/1274	0/1305	0/1299	0/1301	(1,4)
0/1756	0/1808	0/1801	0/1797	(1,5)
0/2342	0/2424	0/2419	0/2401	(1,6)
0/3036	0/3153	0/3147	0/3109	(1,7)

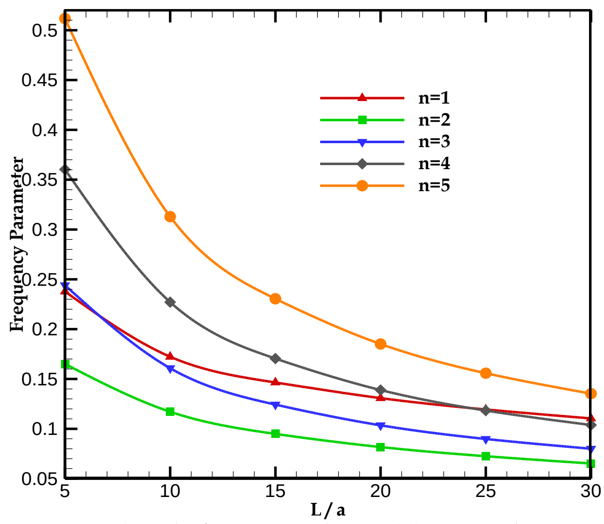
فرکانس اول مربوط به شکل مود $(m, n) = (1,2)$ هست. شکل مودی با یک نیم موج در راستای طولی و دونیم موج در راستای محیطی و برای هر پنج شکل مود بعدی نیز تعداد نیم موج طولی برابر یک خواهد بود. با بررسی مقادیر جابجایی در راستای ضخامت، مشخص گردید که هرچه تعداد نیم موج‌های محیطی افزایش یابد، بیشینه جابجایی به سمت انتهایی پانل نزدیک‌تر خواهد شد. به منظور فهم بهتر این موضوع با رسم هر شش شکل مود اول در شکل ۲، به شکل سه‌بعدی، این روند محسوس‌تر خواهد بود. در ادامه به بررسی اثر پارامترهای هندسی بر فرکانس طبیعی پرداخته خواهد شد.

۴-۱ تأثیر نسبت طول به شعاع بر فرکانس طبیعی بی‌بعد شده در ارتعاشات آزاد

با در نظر گرفتن پنج شکل مود اول برای پانل مخروطی با مشخصات مکانیکی و هندسی، $\alpha=30^o$, $\beta=60^o$, $h=0/02a$, $\nu=0/3$ بررسی در شکل ۳ صورت پذیرفته است. برای تمامی مودها با افزایش روند کاهشی فرکانس طبیعی را خواهیم داشت. این روند کاهشی برای شکل مود $(m, n) = (1,1)$ از همه کمتر و برای $(m, n) = (1,5)$ از همه بیشتر است.



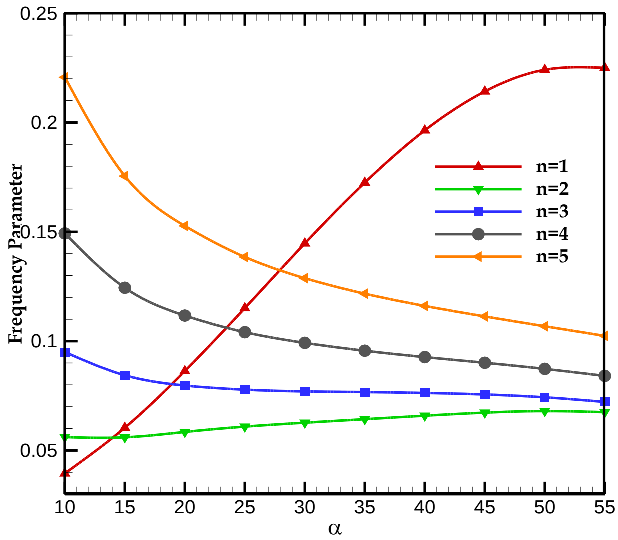
شکل ۲- شکل مودهای طبیعی شش مود اول



شکل ۳- اثر نسبت طول به شعاع کوچک بر فرکانس طبیعی

۲-۴ تأثیر زاویه نیم رأس بر فرکانس طبیعی بی‌بعد شده در ارتعاشات آزاد

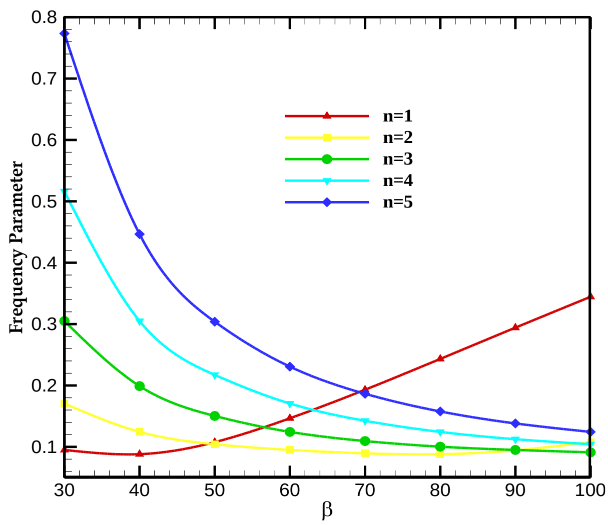
در شکل ۴ با در نظر گرفتن پنج شکل مود اول برای پانل مخروطی با مشخصات مکانیکی و هندسی $h=0/01a$, $\beta=60^o$ $\nu=0/3$, بررسی صورت پذیرفته است. همان‌طور که در شکل 5 مشاهده می‌شود، برای مود $(m, n) = (1,1)$ با افزایش زاویه نیم رأس فرکانس طبیعی بی‌بعد شده افزایش می‌یابد. این روند برای مود $(m, n) = (1,1)$ نیز با شیب کمتر وجود دارد ولی برای سه مود بعدی با افزایش زاویه نیم رأس فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد.



شکل۴- تاثیر زاویه نیم راس بر فرکانس طبیعی

۴-۳ تأثیر زاویه کمان بر فرکانس طبیعی بی‌بعد شده

با در نظر گرفتن پنج شکل مود اول برای پانل مخروطی با مشخصات مکانیکی و هندسی $h=0/02a$, $\nu=0/3$, $\alpha=30^{o}$ بررسی صورت پذیرفته است. همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، برای مود $(m, n) = (1,1)$ با افزایش زاویه کمان، فرکانس طبیعی بی‌بعد شده افزایش می‌یابد. برای چهار شکل مود بعدی با افزایش زاویه کمان مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد شده کاهش می‌یابد که این روند برای مودهای بالاتر سریع‌تر اتفاق می‌افتد.



شکل ۵- تأثیر زاویه پانل کمان بر فرکانس بی‌بعد شده

تحلیل پایداری

در این قسمت به تحلیل پایداری پانل مخروطی ناقص تحت جریان مافوق پرداخته می‌شود، همان‌طور که گفته شد به‌منظور مدل‌سازی جریان از تئوری پیستون استفاده می‌شود. بدین منظور با در نظر گرفتن $M=3$, $C_a=213/36\ m/s$ که به ترتیب سرعت صوت و ماخ جریان هست و ثابت قرار دادن بقیه پارامترهای مکانیکی و هندسی، با افزایش فشار استاتیکی جریان آزاد، فشار استاتیکی بحرانی و n_{cr} (مود بحرانی محیطی) به دست خواهد آمد.

به‌منظور اعتبار سنجی نتایج به‌دست‌آمده، مسئله به مخروط کامل تبدیل می‌گردد. برای این منظور پوسته مخروطی با مشخصات $h=0/051$ in, $\nu=0/29$ پارامتر فشار دینامیکی $L=61/37$ in و $R=7/55$ in, $\rho=8/33\times10^{-4}$ lb-se^2/in^4 را در نظر بگیرید. $\lambda_{cr}=12(1-\nu^2)\frac{\gamma_a P_\infty M^2 a^3}{Eh^3(M^2-1)^{0.5}}$ و γ برابر نسبت گرمای ویژه که مقدارش برابر ۱/۴ فرض شده است.

جدول ۳- مقایسه فشار دینامیکی بحرانی پوسته مخروطی

Present	Ref [17]	Ref [30]	Ref [29]	Ref [28]	Ref [24]
564/5(5)	570(5)	590(5)	605(5)	576(5)	۵۶۶/۵

عدد داخل پرانتز نشانه مود بحرانی محیطی است که البته در اینجا نشان‌دهنده یک موج کامل است. در جدول ۳ نیز مقادیر λ_{cr} برای سه مود اول، گزارش‌شده است. مرجع [۳۰] و [۲۹] از ترم در مدل‌سازی جریان، از ترم انحنا (ترم سوم داخل براکت معادله ۱۳) صرف‌نظر کرده‌اند که این امر منجر به اختلاف جزئی در نتایج شده است.

جدول ۴- فشار دینامیکی بحرانی برای سه مود اول

n_{cr}	Present	Ref [23]
۴	1063/1	1074
۵	564/5	590
۶	615/4	607

در ادامه مقادیر فشار دینامیکی بحرانی برای چهار زاویه نیم راس و سه زاویه کمان مختلف بیان‌شده است. با مشخص شدن فشار استاتیکی بحرانی و با استفاده از رابطه فشار دینامیکی بحرانی مقادیر λ_{cr} به شرح زیر خواهد بود. برای هر زاویه کمان

مشخص با افزایش زاویه نیم رأس فشار استاتیکی بحرانی کاهش پیدا می‌کند.

جدول ۵- فشار استاتیکی و مود طولی و محیطی بحرانی

β	m_{cr}	P_{cr}	α	n_{cr}
$\pi/6$	کوپل ۷ و۸	44	5^{o}	3
	کوپل ۷ و۸	24/5	10^{o}	3
	کوپل 9 و10	10/7	20^{o}	3
	کوپل ۹ و۱۰	6/3	30^{o}	3
$\pi/2$	کوپل ۹ و۱۰	27/1	5^{o}	4
	کوپل ۹ و۱۰	24/2	10^{o}	4
	کوپل ۹ و۱۰	11/7	20^{o}	4
	کوپل ۹ و۱۰	6/9	30^{o}	4
$2\pi/3$	کوپل ۹ و۱۰	32/1	5^{o}	5
	کوپل ۹ و۱۰	24/3	10^{o}	6
	کوپل ۹ و۱۰	13/2	20^{o}	6
	کوپل ۹ و۱۰	6/4	30^{o}	6

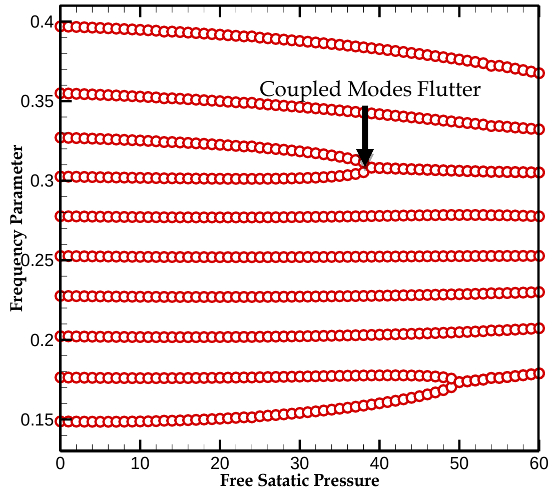
ستون مربوط به m_{cr} مودهای طولی است که در نقطه فشار استاتیکی بحرانی فرکانس‌های مربوط به این دو مود بسیار به هم نزدیک می‌شوند. n_{cr} نیز نشان‌دهنده مود محیطی بحرانی است که در این مود، فلاتر زودتر اتفاق می‌افتد. مود محیطی بحرانی درواقع تعداد نیم موجی است که در راستای محیطی پانل مخروطی ظاهر می‌شود که با افزایش زاویه کمان n_{cr} روند افزایشی خواهد داشت. در مورد مودهای بحرانی طولی نیز باید به این موضوع اشاره کرد که با کاهش ضخامت مودهای طولی کمتر، مود بحرانی طولی خواهند بود.

در شکل‌های ۶ و ۷ نمودار دمپینگ و فرکانس طبیعی بی‌بعد شده برحسب فشار استاتیکی رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش فشار استاتیکی مقدار دمپینگ از صفر شروع‌شده و دمپینگ مقداری منفی خواهد داشت، این حوزه، حوزه پایداری محسوب می‌شود. با ادامه افزایش فشار استاتیکی بحرانی، مقادیر دمپینگ به سمت صفر حرکت می‌کنند و در فشاری که برای اولین بار مقدار دمپینگ صفر شود، آن فشار به‌عنوان فشار استاتیکی بحرانی گزارش می‌شود.

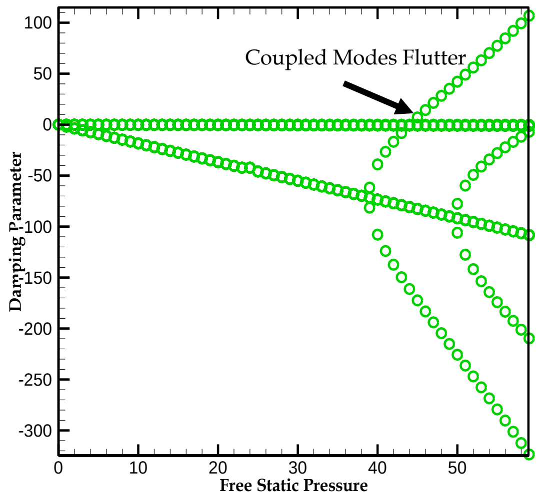
در شکل ۶ نمودار مقادیر فرکانس برای ۱۰ مود اول برحسب فشار استاتیکی بحرانی ارائه‌شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، فرکانس‌های مربوط به شکل مود ۷ و ۸ شکل مودهای طولی بحرانی هستند و همچنین شکل مود اول و دوم نیز پس از آن‌ها، قرار دارند. فرکانس شکل مود هفتم با افزایش فشار استاتیکی بحرانی روندی افزایشی پیداکرده و فرکانس شکل مود هشتم نیز با افزایش فشار استاتیکی بحرانی روندی کاهشی را دنبال می‌کند، این روند تا جایی ادامه پیدا می‌کند که فرکانس‌های مربوط به این دو شکل مود بسیار به هم نزدیک می‌شوند. این روند برای تمامی شکل مودها نیز اتفاق می‌افتد که یقین از فشار استاتیکی بحرانی مربوط به شکل مود هفتم و هشتم بیشتر است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، شکل مودهای بحرانی طولی به ضخامت وابسته هستند، اگر روندی کاهشی برای ضخامت پانل مخروطی ناقص در نظر بگیریم، شکل مودهای پایین‌تر، شکل مود بحرانی خواهند بود و اگر ضخامت افزایش پیدا کند، شکل مودهای بالاتر، شکل مودهای بحرانی طولی خواهند بود.

۴-۴ تأثیر زاویه نیم رأس بر فشار استاتیکی بحرانی

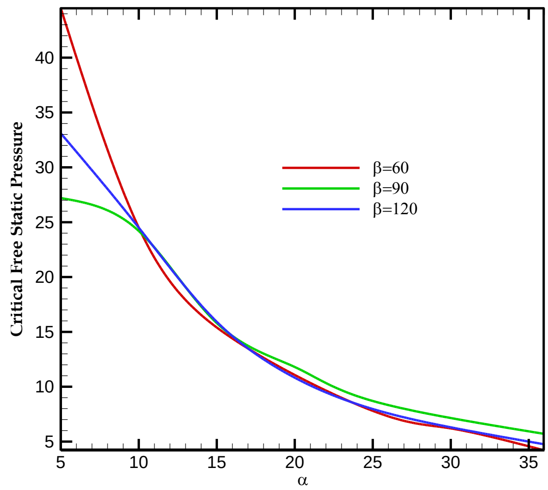
به‌منظور بررسی تأثیر زاویه نیم رأس بر فشار استاتیکی بحرانی، سه زاویه کمان متفاوت در شکل ۸ در نظر گرفته‌شده است همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش زاویه نیم رأس روند فشار استاتیکی بحرانی برای هر سه زاویه کمان کاهشی خواهد بود که این روند کاهشی برای $\beta=60^{o}$ سریع‌تر و $\beta=90^{o}$ کندتر است و در زاویه نیم رأس‌های بزرگ‌تر از $\alpha=20^{o}$ فشار استاتیکی بحرانی برای $\beta=90^{o}$ بیشتر خواهد بود. در شکل ۸ با در نظر گرفتن $\beta=120^{o}$ برای $a=5$ in و دو زاویه نیم رأس $\alpha=30^{o}$ و $\alpha=10^{o}$ نسبت a/h بر فشار آیرودینامیکی بحرانی بررسی‌شده است. برای هر دو زاویه نیم رأس با افزایش نسبت a/h فشار آیرودینامیکی بحرانی کاهش می‌یابد که روند کاهشی برای زاویه نیم رأس کمتر سریع‌تر است.



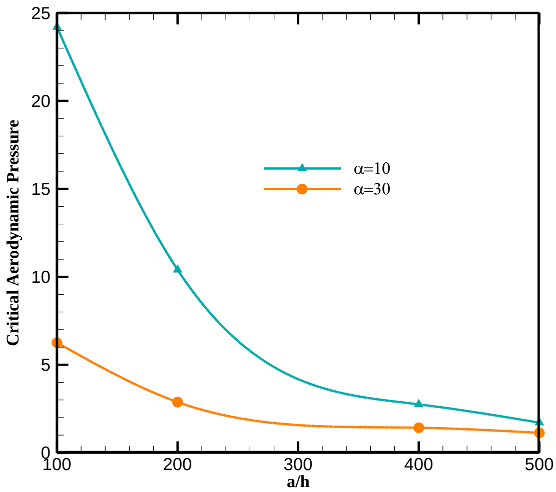
شکل ۶- اثر فشار استاتیکی بر فرکانس ده مود اول



شکل ۷- اثر فشار استاتیکی بر پارامتر دمپینگ



شکل ۸- اثر زاویه نیم راس بر فشار دینامیکی بحرانی



شکل ۹- تاثیر نسبت شعاع به ضخامت بر فشار دینامیکی بحرانی

۵- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر بر آنیم که مسئله ارتعاشات آزاد و ناپایداری آیروالاستیک پانل مخروطی را با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک (لاو) پوسته‌ها و شرط مرزی دلخواه به روش مودهای فرضی بررسی نماییم. در این راستا و در گام نخست، انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار نیروی آئرودینامیکی که درواقع همان اثر جریان سیال خارجی است محاسبه می‌شوند. با داشتن مقادیر انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار نیروی خارجی و همچنین به‌کارگیری اصل هامیلتون، فرم انتگرالی وردشی معادلات دینامیکی مسئله به دست می‌آید. از سوی دیگر به‌منظور مدل سازی جریان سیال مافوق، از تئوری معروف پیستون استفاده‌شده و توزیع فشار ایجادشده بر روی سازه استخراج خواهد شد. در ادامه با در نظر گرفتن توابع شکل مناسب (که شرایط مرزی لازم را ارضا می‌نمایند) و با استفاده از روش گالرکین به مسئله مقدار ویژه دست می‌یابیم. با تحلیل مقدار ویژه، مقادیر فرکانس طبیعی و شکل‌مودهای سازه به‌دست‌آمده و حوزه پایداری تعیین خواهد شد. که نتایج آن به شرح زیر است.

• با افزایش زاویه نیم‌راس، فرکانس شکل مود اول، ابتدا روندی افزایشی داشته و در ادامه روندی کاهشی دارند.

• با افزایش نسبت طول به شعاع فرکانس طبیعی روندی کاهشی خواهد داشت.

• با افزایش زاویه کمان، فرکانس شکل مود اول، ابتدا روندی افزایشی داشته و در ادامه روندی کاهشی خواهد داشت.

• با افزایش زاویه نیم رأس، فشار استاتیکی بحرانی کاهش با افزایش نسبت طول به شعاع، فشار استاتیکی بحرانی افزایش می‌یابد.می‌یابد.

• با افزایش ضخامت، فشار استاتیکی بحرانی افزایش می‌یابد.

۶-فهرست علائم

e_1, e_2, e_{12}	کرنش‌ها در نقاط دلخواه پوسته
$e_\alpha, e_\theta, e_{x\theta}$	کرنش‌ها سطح مرجع
$\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}$	انحناهای صفحه مرجع
u, v, w	جابه‌جایی‌های پوسته
p_∞	فشار استاتیکی در جریان آزاد
E	مدول الاستیسته
β	زاویه کمان
γ_a	نسبت گرمای ویژه سیال
N_x, N_y, N_{xy}	منتجه‌های نیروهای محوری و برشی
M_x, M_y, M_{xy}	منتجه‌های خمشی و پیچشی
A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	مؤلفه‌های سختی ماتریس مواد
U	انرژی کرنشی ذخیره‌شده در پوسته
K	انرژی جنبشی
W	کار نیروهای خارجی
α	زاویه نیم رأس مخروط
L	طول یال مخروط
$SSSS$	شرایط مرزی مفصلی
$CCCC$	شرایط مرزی گیردار
x_0	فاصله از رأس مخروط
m, n	شماره مودهای در راستای طولی و جانبی
h	ضخامت پانل مخروطی
V_∞	سرعت سیال
M	ماخ سیال

۷- مراجع

[۱] M. Amabili, Nonlinear vibrations and stability of shells and plates, Cambridge University Press, ۲۰۰۸.

[۲] E.H. Dowell, Aeroelasticity of plates and shells, Springer Science & Business Media, ۱۹۷۴.

[۳] A.W. Leissa, Vibration of shells, Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space …, ۱۹۷۳.

[۴] S.S. Rao, Vibration of continuous systems, Wiley Online Library, ۲۰۰۷.

[۵] K. Lam, H. Li, T. Ng, C. Chua, Generalized differential quadrature method for the free vibration of truncated conical panels, Journal of Sound and Vibration, ۲۵۱(۲) (۲۰۰۲) ۳۴۸-۳۲۹.

[۶] X. Zhao, Q. Li, K. Liew, T. Ng, The element-free kp-Ritz method for free vibration analysis of conical shell panels, Journal of Sound and Vibration, ۲۹۵(۵-۳) (۲۰۰۶) ۹۲۲-۹۰۶.

[۷] D.S. Kumar, N. Ganesan, Dynamic analysis of conical shells conveying fluid, Journal of Sound and Vibration, ۳۱۰(۲-۱) (۲۰۰۸) ۵۷-۳۸.

[۸] A. Lakis, P. Van Dyke, H. Ouriche, Dynamic analysis of anisotropic fluid-filled conical shells, Journal of fluids and structures, ۶(۲) (۱۹۹۲) -۱۳۵ ۱۶۲.

[۹] G. Ulitin, The vibrations of a conical shell filled with a variable volume of fluid, Journal of Mathematical Sciences, ۷۴(۴) (۱۹۹۵) ۱۱۸۷-۱۱۸۵.

[۱۰] M.J. Jhung, J.C. Jo, K.H. Jeong, Modal analysis of conical shell filled with fluid, Journal of mechanical science and technology, ۲۰(۱۱) (۲۰۰۶) ۱۸۶۲-۱۸۴۸.

[۱۱] L. Carter, R. Stearman, Some aspects of cylindrical shell panel flutter, AIAA Journal, ۶(۱) (۱۹۶۸) ۴۳-۳۷.

[۱۲] G.W. Barr, R.O. Stearman, Aeroelastic stability characteristics of cylindrical shells considering imperfections and edge constraint, AIAA Journal, ۷(۵) (۱۹۶۹) ۹۱۹-۹۱۲.

[۱۳] M. Singha, M. Mandal, Supersonic flutter characteristics of composite cylindrical panels, Composite Structures, ۸۲(۲) (۲۰۰۸) ۳۰۱-۲۹۵.

[۱۴] H. Haddadpour, H. Navazi, F. Shadmehri, Nonlinear oscillations of a fluttering functionally graded plate, Composite Structures, ۷۹(۲) (۲۰۰۷) ۲۵۰-۲۴۲.

[۱۵] H. Navazi, H. Haddadpour, Aero-thermoelastic stability of functionally graded plates, Composite Structures, ۸۰(۴) (۲۰۰۷) ۵۸۷-۵۸۰.

[۱۶] H. Haddadpour, S. Mahmoudkhani, H. Navazi, Supersonic flutter prediction of functionally graded cylindrical shells, Composite Structures, ۸۳(۴) (۲۰۰۸) ۳۹۸-۳۹۱.

[۱۷] S. Mahmoudkhani, H. Haddadpour, H. Navazi, Supersonic flutter prediction of functionally graded conical shells, Composite Structures, ۹۲(۲) (۲۰۱۰) ۳۸۶-۳۷۷.

[۱۸] A. Davar, H. Shokrollahi, Flutter of functionally graded open conical shell panels subjected to supersonic air flow, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, ۲۲۷(۶) (۲۰۱۳) ۱۰۵۲-۱۰۳۶.

[۱۹] Y.X. Hao, Y. Niu, W. Zhang, S.B. Li, M.H. Yao, A.W. Wang, Supersonic flutter analysis of FGM shallow conical panel accounting for thermal effects, Meccanica.۱۰۹-۹۵ (۲۰۱۸) (۱)۵۳ ,

[۲۰] S.W. Yang, W. Zhang, Y.X. Hao, Y. Niu, Nonlinear vibrations of FGM truncated conical shell under aerodynamics and in-plane force along meridian near internal resonances, Thin-Walled Structures, ۱۴۲(۲۰۱۹) ۳۹۱-۳۶۹.

[۲۱] M. Bakhtiari, A.A. Lakis, Y. Kerboua, Nonlinear supersonic flutter of truncated conical shells, Journal of Mechanical Science and Technology, ۳۴(۴) (۲۰۲۰) ۱۳۸۸-۱۳۷۵.

[۲۲] Y. Xue, J. Li, F. Li, Z. Song, Flutter and Thermal Buckling Properties and Active Control of Functionally Graded Piezoelectric Material Plate in Supersonic Airflow, Acta Mechanica Solida Sinica, ۳۳(۵) (۲۰۲۰) ۷۰۶-۶۹۲.

[۲۳] J. Wei, Z. Song, F. Li, Superior aeroelastic behaviors of axially functional graded cylindrical shells in supersonic airflow ,Journal of Fluids and Structures, ۹۶(۲۰۲۰) .۱۰۳۰۲۷

[۲۴] M. Rahmanian, M. Javadi, A unified algorithm for fully-coupled aeroelastic stability analysis of conical shells in yawed supersonic flow to identify the effect of boundary conditions, Thin-Walled Structures, ۱۵۵(۲۰۲۰) .۱۰۶۹۱۰

[۲۵] M. Rahmanian, M. Javadi, Supersonic Aeroelasticity and Dynamic Instability of Functionally Graded Porous Cylindrical Shells Using a Unified Solution Formulation, International Journal of Structural Stability and Dynamics.۲۰۵۰۱۳۲ (۲۰۲۰) (۱۲)۲۰ ,

[۲۶] H. Ashley, G. Zartarian, Piston theory-a new aerodynamic tool for the aeroelastician, Journal of the Aeronautical Sciences, ۲۳(۱۲) (۱۹۵۶) -۱۱۰۹ .۱۱۱۸

[۲۷] M. Akbari, Y. Kiani, M. Aghdam, M. Eslami, Free vibration of FGM Lévy conical panels, Composite Structures, ۱۱۶(۲۰۱۴) .۷۴۶-۷۳۲

[۲۸] R. Pidaparti, H.T. Yang, Supersonic flutter analysis of composite plates and shells, AIAA journal, ۳۱(۶) (۱۹۹۳) .۱۱۱۷-۱۱۰۹

[۲۹] T. Ueda, S. Kobayashi, M. Kihira, Supersonic flutter of truncated conical shells, Trans. Jpn. Soc. Aeronaut. Space Sci, ۲۰(۴۷) (۱۹۷۷) .۳۰-۱۳

[۳۰] S.C. Dixon, M.L. Hudson, Flutter, vibration, and buckling of truncated orthotropic conical shells with generalized elastic edge restraint, National Aeronautics and Space Administration, .۱۹۷۰