نشریه علمی- پژوهشی مهندسی هوانوردی
سال بیست و دوم، شماره دوم، پاییز ۹۹

تحلیل ارتعاشات پانل ساندویچی ذوزنقه‌ای تحت تأثیر جریان مافوق صوت سیال

علیرضا پورموید [*۱]، کرامت ملک‌زاده‌فرد [۲]، رضا بهاءالدینی [۳]
۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء(ص)، تهران، ایران
۲- استاد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران
۲- دکتری، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران
(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۵/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۱۰)

چکیده
در این مقاله، تحلیل‌های ارتعاشات و فلاتر مافوق صوت پانل‌های ساندویچی ذوزنقه‌ی مطالعه شده است. پانل ذوزنقه‌ی هدفمند به همراه پانل ساندویچی تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن در نظر گرفته شده است. فرض می‌شود که نانو فیلرهای صفحات گرافن در ماتریس به دو صورت یکنواخت و غیریکنواخت در راستای ضخامت توزیع شده است. الگوهای توزیع UD، FG-X، FG-V، FG-O و FG-A در نانو صفحات گرافن هستند. بر اساس تئوری‌های مرتبه بالا کانت، معادلات دینامیکی از پانل‌های ساندویچی تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن با استفاده از اصل توسعه‌یافته همیلتون به دست آمده‌اند. فشار دینامیکی مطابق با تئوری شبه‌پایدار مافوق صوت پیستون حدس زده می‌شود. سپس، با استفاده از یک تبدیل مختصات، معادلات حاکم و شرایط مرزی از مختصات اصلی به مختصات جدید محاسباتی تبدیل می‌شوند. در نهایت، روش مربعات دیفرانسیلی برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و فشار آیرودینامیکی بحرانی استفاده می‌شود. تأثیر توزیع مختلف تخلخل، ضرایب تخلخل، توزیع نانو صفحات گرافنی، مقدار کسر وزنی، هندسه نانوفیلرهای نانوصفحات گرافن و ابعاد هندسی بر روی فرکانس‌های طبیعی و رفتار ناپایداری سیستم مطالعه می‌شود.
واژه‌های کلیدی: *ارتعاشات، پانل ساندویچی، مواد پیشرفته، جریان سیال مافوق صوت*

Vibration analyses of trapezoidal sandwich panel under supersonic flow

1[st] Alireza Pourmoayed, 2[nd] Keramat Malekzadeh Fard, 3[nd] Reza Bahaadini

Abstract
In this article, vibration and supersonic flutter analyses are studied for trapezoidal sandwich panels. Functionally graded trapezoidal panel as well as reinforced sandwich panel by graphene nano platelets are considered. It is assumed that the graphene platelet (GPL) nanofillers are distributed in the matrix either uniformly or non-uniformly in the direction of thickness. UD, FG-X, FG-V, FG-O and FG-A are the distribution patterns of GPLs. Based on the Kant higher-order theories, the dynamic equations of sandwich panels reinforced with graphene nanoplates are obtained using extended Hamilton's principle. Dynamic pressure is estimated according to the quasi-stable theory of supersonic piston. Then, using a transformation of coordinates, the governing equations and boundary conditions are converted from the original coordinates into new computational ones. Finally, the differential squares method (DQM) to obtain the natural frequencies, the shape of the modes, and the critical aerodynamic pressure is used. The effect of different porosity distribution, porosity coefficients, distribution of graphene nanoplates, weight fraction, geometry of graphene nanofillers and geometric dimensions on natural frequencies and system instability behavior are studied.
Key words*:* Vibration, Sandwich panel, Functionally graded material, Supersonic flow

* نویسنده پاسخگو: علیرضا پورموید، تلفن: ۳۳۲۲۸۵۳۵، پست الکترونیک: pourmoayed@mut.ac.ir

مقدمه

ورق‌های ذوزنقه‌ای، مثلثی، مورب و چهارضلعی شکل به طور گسترده‌ای به عنوان اجزای ساختاری در سیستم‌های مهندسی به کار گرفته می‌شوند. از نمونه‌های مورد استفاده ورق‌های ذوزنقه‌ای می‌توان به ویژه در بال‌ها و دم‌های هواپیما اشاره نمود. به همین منظور به مروری اجمالی بر روی پیشینه این ورق‌ها پرداخته می‌شود. جعفری و ازهری [۱] به بررسی پایداری ورق‌های ویسکوالاستیک وابسته به زمان نسبتاً ضخیم را که دارای شکل‌های مختلفی از جمله ورق ذوزنقه‌ای شکل هستند را با استفاده از انتقال لاپلاس- کارسن و روش بدون مش اچ پی کلود ساده پرداختند. جابرزاده و همکاران [۲] کمانش حرارتی ورق‌های ذوزنقه‌ای و مورب را با استفاده از روش المان آزاد گالرکین بررسی کردند. نجار زاده و همکاران [۳] با استفاده از روش المان مرزی به تحلیل کمانش ورق‌های نازک با شکل‌های مختلف از جمله ورق ذوزنقه‌ای، تحت انواع بارگذاری و میدان تنش غیریکنواخت پرداختند. آن‌ها با استفاده از حل‌های پایه‌ای استاتیکی معادله بای‌هارمونیک، معادله دیفرانسیلی حاکم را به معادله انتگرالی معادل تبدیل کردند. ژائو و همکاران [۴] رفتار خمشی و ارتعاشی یک گروه جدید از ورق‌های ذوزنقه‌ای هدفمند تقویت‌شده با نانو ورق‌های گرافنی را با به کار بردن روش اجزا محدود، مورد مطالعه قرار دادند. ترابی و افشاری [۵] بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری پیستون برای تخمین فشار دینامیکی، معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی فراصوت را برای تحلیل فلاتر ورق ضخیم ذوزنقه‌ای با ضخامت‌های مختلف به دست آوردند. سپس با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و نسبت میرایی را به دست آورند و به تعیین فشار آیرودینامیکی بحرانی و فرکانس بحرانی فلاتر پرداختند. بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته، زمانی و همکاران [۶] به مطالعه و بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های لمینیت متقارن ذوزنقه‌ای نسبتاً ضخیم با ترکیبی از شرایط مرزی مختلف پرداختند. شکرالهی و شفقت [۷] تحلیل فلاتر بال‌های ذوزنقه‌ای کامپوزیتی فلزی هیبریدی با نسبت ابعاد کم را در جریان مافوق صوت انجام دادند. پایداری مسئله ورق ذوزنقه‌ای ساندویچی با یک هسته کامپوزیتی صلب و با در نظر گرفتن فرضیه‌های کیرشهف، توسط مانیا [۸] مورد بررسی قرار گرفته است. آن‌ها در این پژوهش از روش گالرکین متعامد شده همراه با روش ارائه شده از تبدیلات سیستم مختصات به‌عنوان حل استفاده و نتایج به دست آمده از حل تحلیلی را با محاسبات مدل اجزا محدود مقایسه کردند.

به‌منظور بر طرف کردن محدودیت‌های موجود در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر که شامل عبارت‌های مرتبه بالاتر در بسط تیلور از جابه‌جایی‌ها در مختصات ضخامت است، توسعه یافتند. از آنجایی که تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول حالت‌های لایه ثابت از تنش برشی عرضی را محاسبه می‌کند، وجود ضرایب تصحیح برشی برای اصلاح تغییرات غیرواقعی تنش/ کرنش برشی در امتداد ضخامت، ضرورت پیدا می‌کند که در نهایت منجر به تعریف انرژی کرنشی برشی می‌شود. در تئوری‌های مرتبه بالاتر با توان اضافی در مختصات ضخامت یک تابع مجهول در تئوری معرفی می‌شود. هیلدبرند و همکاران [۹] اولین کسانی بودند که این روش را برای بهبود بخشیدن به استخراج تئوری‌های ورق و پوسته معرفی کردند. کانت و همکاران [۱۰] برای اولین بار یک فرمول‌بندی اجزای محدود از تئوری خمشی مرتبه بالاتر را ارائه کردند. این تئوری قانون هوک سه‌بعدی را در نظر می‌گیرد که شامل اثر کرنش نرمال عرضی علاوه بر تغییر شکل برشی عرضی می‌باشد. پاندیا و کانت [۱۱-۱۵]، کانت و مانجوناتا[۱] [۱۶, ۱۷] و مانجوناتا و کانت[۲] [۱۸] این تئوری را گسترش دادند و فرمول‌بندی و حل‌های اجزای محدود برای تحلیل تنش ورق‌های ساندویچی و کامپوزیتی لمینیت متقارن و نامتقارن ارائه کردند. بعدها، کانت [۱۹] حل‌ها و یک فرمول‌بندی ساده اجزا محدود با استفاده از یک مجموعه از مدل‌های جابه‌جایی مرتبه بالاتر برای تحلیل ارتعاش آزاد مسئله‌های مربوط به ورق‌های ساندویچی و کامپوزیتی لمینیت معمولی، ارائه کردند. حل‌های این تئوری برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای ساندویچی و کامپوزیتی لمینیت توسط کانت و گوپتا [۲۰]، کانت و همکاران [۲۱] و مارور و کانت[۳] [۲۲] معرفی شدند. با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر ردی [۲۳]، تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های لمینیت ارتوتروپیک و ایزوتروپیک توسط ردی و فان [۲۴] انجام پذیرفت. در کار انجام شده توسط آن‌ها، فرکانس‌های ارتعاشی برای ورق‌های مستطیلی ایزوتروپیک با شرایط مرزی مختلف به دست آمده‌اند. نور و بورتن [۲۵] یک لیست کامل

از مراجع تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر برای تحلیل استاتیک، ارتعاش آزاد و کمانش کامپوزیت‌های لمینیت، ارائه کردند. اخیراً پژوهش‌های فراوانی بر روی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر تصفیه‌شده انجام گرفته است که از این میان می‌توان به مراجعی که در ادامه می‌آیند، اشاره کرد. پونرا و کانت [۲۶] بر اساس تئوری‌های مرتبه بالا مختلف به مطالعه پوسته‌های استوانه‌ی باز هدفمند پرداختند. پژوهش صورت گرفته توسط آن‌ها جابجایی را بر اساس رویکردی که شامل تئوری تغییر شکل برشی و نرمال مرتبه بالاتر همراه با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر می‌شود در نظر می‌گیرد. در مطالعه‌ی دیگر آن‌ها [۲۷] تحلیل الاستواستاتیکی از پوسته‌های استوانه‌ای باز ساندویچی هدفمند با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی و نرمال مرتبه بالاتر انجام دادند. آن‌ها به‌منظور قابل‌اطمینان کردن پژوهش خود، بر روی طیف وسیعی از نسبت‌های ضخامت پوسته از یک معیار ضخامت گسترده، $1 \ll \left[(h/R)\right]^2$، استفاده کردند.

پورموید و همکاران [۲۸] در تحقیقی تحلیل فلاتر پنل ساندویچی استوانه‌ای تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده با استفاده از روش تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که پدیده فلاتر در شرایط مرزی یکسرگیردار و یکسر آزاد رخ می‌دهد و در شرایط مرزی دیگر تنها پدیده دیورژانس یا کمانش استاتیکی رخ می‌دهد. آن‌ها همچنین در این مطالعه نشان دادند که افزایش تعداد لایه‌های کامپوزیت باعث می‌شود تا پدیده فلاتر در پانل ساندویچی استوانه‌ای با هسته انعطاف-پذیر، دیرتر به وقوع بپیوند

پانل‌ها ذورنقه برای دو جنس مواد هدفمند و ساندویچی تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن در نظر گرفته شده است. این پانل ساندویچی ذوزنقه‌ی شکل تحت تأثیر جریان مافوق صوت سیال قرار دارند. برای استخراج معادلات حاکم، از اصل همیلتون و با استفاده از تئوری های مرتبه بالا کانت به همراه تئوری پیستون استفاده شده است. سپس با روش عددی GDQ، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شدند. با حل معادلات دیفرانسیل معمولی، مقادیر ویژه سیستم در قالب نمودارهایی ارائه شدند. همان طور که ملاحظه شد با افزایش زاویه پانل نسبت به افق، فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیک بیشتری پیش‌بینی می‌شود. به بیان دیگر، این افزایش در زاویه پانل نسبت به افق پایداری سیستم را افزایش می دهد و پانل ذوزنقه ای پس از مدت طولانی‌تری مرز ناپایداری فلاتر خود را ملاقات می‌کند. همچنین، کاهش فشار بحرانی آیرودینامیکی به دلیل افزایش نسبت ابعاد پانل یکی دیگر از نکات قابل‌توجه بوده است. بنابراین، انتخاب پانل ذوزنقه‌ای با نسبت ارتفاع به قاعده کمتر و زاویه بزرگ‌تر نسبت به افق یکی از راه‌های بهینه در بالا بردن پایداری چنین سیستم‌هایی است. همچنین مشاهده شد، فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر آیرودینامیک پانل با هندسه ذوزنقه با افزایش پارامتر n (توان ماده هدفمند)، افزایش می یابد. علاوه بر این، می توان مشاهده کرد که پانل ذوزنقه‌ای تقویت شده با نانو صفحات گرافنی از نوع توزیع FG-X، بیشترین فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیروالاستیک را دارا می‌باشد، در حالی‌که این سیستم از نوع توزیع FG-O، کمترین میزان فرکانس های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیروالاستیک را در بین چهار الگوی توزیع به خود اختصاص داده است. همچنین، افزایش درصد وزنی نانو صفحات گرافن منجر به افزایش سفتی و استحکام بیشتر پانل می‌شود که در پی آن فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیک و ناحیه پایدار پانل افزایش می یابد. علاوه بر این، افزایش دما سبب کاهش سفتی سیستم و در پی آن کاهش فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر آیرودینامیک سیستم می‌شود. بنابراین از جمله نوآوری‌های این مقاله می‌توان به تحلیل ناپایداری دینامیکی یا فلاتر ورق ذوزنقه‌ای اشاره کرد. همچنین، در نظر گرفتن تأثیر مواد پیشرفته از قبیل FGM و پلیمر تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن بر روی نواحی فلاتر و فرکانس طبیعی از نوآوری‌های مقاله لحاظ شده است. علاوه بر این، تاکنون مطالعه‌ای بر روی ورق‌های ذوزنقه‌ی با تئوری مرتبه بالا کانت انجام نشده است.

روابط ساختاری و معادلات حاکم بر حرکت

به منظور تقریب زدن مسئله الاستیسیته سه‌بعدی به یک مسئله پانل دوبعدی، مؤلفه‌های جابجایی $u(x,y,z,t)$، $v(x,y,z,t)$ و $w(x,y,z,t)$ در هر نقطه‌ای از فضای پانل در سری تیلور به لحاظ مختصات ضخامت بسط داده شده است. حل الاستیک نشان می‌دهد که تنش برشی عرضی

به‌صورت سهموی در راستای ضخامت پانل تغییر می‌کند. این حل به استفاده از یک میدان جابجایی به‌طوری‌که جابجایی‌های درون صفحه‌ای به‌عنوان توابع مکعبی از مختصات ضخامت بسط داده شوند، نیازمند است. علاوه بر این، کرنش نرمال عرضی ممکن است به صورت غیرخطی در راستای ضخامت پانل تغییر کند. میدان جابجایی که معیار ذکر شده را ارضا می‌کند، می‌تواند به‌صورت رابطه **۱** در نظر گرفته شود[۱۶].

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t)&=u_0(x,y,t)+z\theta_x(x,y,t)+z^2u_0^*(x,y,t)+z^3\theta_x^*(x,y,t)\\ v(x,y,z,t)&=v_0(x,y,t)+z\theta_y(x,y,t)+z^2v_0^*(x,y,t)+z^3\theta_y^*(x,y,t)\\ w(x,y,z,t)&=w_0(x,y,t)+z\theta_z(x,y,t)+z^2w_0^*(x,y,t)+z^3\theta_z^*(x,y,t) \end{aligned} \qquad (۱)$$

در رابطه **۱**، پارامترهای u_0 و v_0 بیانگر جابجایی‌های درون صفحه‌ای و پارامتر w_0 جابجایی عرضی یک نقطه مانند (x,y) در وسط صفحه را نمایش می‌دهد. همچنین، توابع θ_x و θ_y، به ترتیب، نشان‌دهنده چرخش‌های نرمال نسبت به وسط صفحه حول محورهای x^- و y^- می‌باشند. u_0^*، v_0^*، w_0^*، θ_x^*، θ_y^*، θ_z^* و θ_z در این روابط، عبارت‌های مرتبه بالاتر در بسط سری تیلور هستند که نشان‌دهنده مودهای تغییر شکل سطح مقطع عرضی مرتبه بالاترند.

روابط ساختاری حاکم بر مسئله

هر لایه نازک در پانل ساخته شده از مواد پیشرفته چند لایه فرض می‌شود که در حالت تنش سه‌بعدی قرار دارد که رابطه ساختاری برای یک لایه معمولی L به‌صورت رابطه **۲** می‌تواند نوشته شود.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}^L=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{13}&Q_{14}&0&0\\ &Q_{22}&Q_{23}&Q_{24}&0&0\\ &&Q_{33}&0&0&0\\ &&&Q_{44}&0&0\\ &Symetric&&&Q_{55}&Q_{56}\\ &&&&&Q_{66}\end{bmatrix}^L\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

که σ_x، σ_y، σ_z، τ_{xy}، τ_{yz} و τ_{xz} بیانگر تنش‌ها و ε_x، ε_y، ε_z، γ_{xy}، γ_{yz} و γ_{xz} مؤلفه‌های کرنش خطی در دستگاه مختصات مربوط به یک لایه می‌باشد. همچنین، Q_{ij} ثوابت الاستیک تبدیل شده یا المان‌های ماتریس سختی نسبت به محورهای پانل x، y و z هستند. مؤلفه‌های ماتریس Q_{ij} به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} &Q_{11}=\frac{E_1\left(1-\vartheta_{23}\vartheta_{32}\right)}{\Delta};Q_{12}=\frac{E_1(\vartheta_{21}+\vartheta_{31}\vartheta_{23})}{\Delta}\\ &Q_{13}=\frac{E_1\left(\vartheta_{31}+\vartheta_{21}\vartheta_{32}\right)}{\Delta};Q_{22}=\frac{E_2(1-\vartheta_{13}\vartheta_{31})}{\Delta}\\ &Q_{23}=\frac{E_2\left(\vartheta_{32}+\vartheta_{12}\vartheta_{31}\right)}{\Delta};\quad Q_{33}=\frac{E_3(1-\vartheta_{12}\vartheta_{21})}{\Delta}\\ &Q_{44}=G_{12};\qquad Q_{55}=G_{23};\qquad Q_{66}=G_{13} \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در رابطه **۳** می‌توان نوشت:

$$\Delta=1-\vartheta_{12}\vartheta_{21}-\vartheta_{23}\vartheta_{32}-\vartheta_{13}\vartheta_{31}-2\vartheta_{12}\vartheta_{23}\vartheta_{31} \qquad (۴)$$

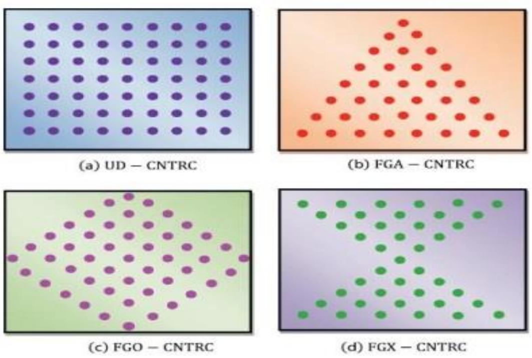
کسر حجمی نانو صفحات گرافن که با سه توزیع مختلف که در شکل **۱** مشاهده می‌شود، به‌صورت روابط **۵- الف** تا **۵- ت** در نظر گرفته شده است [۲۹]:

$$UD:\quad V_{GPL}^{(k)}=V_{GPL}^* \qquad (۵\text{-الف})$$

$$FG-\Lambda:\quad V_{GPL}^{(k)}=2kV_{GPL}^*/\left(1+N_L\right) \qquad (۵\text{-ب})$$
$$k=1,2,\ldots,N_L$$

$$FG-X:$$
$$V_{GPL}^{(k)}=4V_{GPL}^*\left(\frac{1}{2}+\left|k-\frac{N_L+1}{2}\right|\right)/\left(1+N_L\right) \qquad (۵\text{-پ})$$

$$FG-O:$$
$$V_{GPL}^{(k)}=4V_{GPL}^*\left(\frac{N_L+1}{2}+\left|k-\frac{N_L+1}{2}\right|\right)/\left(1+N_L\right) \qquad (۵\text{-ت})$$



شکل ۱ - توزیع مختلف نانو صفحات گرافن [۳۰]

علاوه بر این، کسر وزنی نانو صفحات گرافن به صورت رابطه **۶** می‌باشد:

$$V_{GPL}^{*}=\frac{w_{GPL}}{w_{GPL}+(\rho_{GPL}/\rho_m)(1-w_{GPL})} \tag{۶}$$

که ρ_{GPL} و $\omega=\omega_R+i\omega_t$ به ترتیب، چگالی نانو صفحه گرافن و ماتریس را نشان می‌دهند.

با استفاده از مدل میکرومکانیکی هالپین- تسای، مدول یانگ سازه ساخته شده از مواد پیشرفته شامل مواد متخلخل تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن به‌صورت رابطه **۷** تعریف می‌شود [۲۹]:

$$E^{(k)}=\frac{3}{8}\left(\frac{1+\xi_L\eta_L V_{GPL}^{(k)}}{1-\eta_L V_{GPL}^{(k)}}\right)E_m+\frac{5}{8}\left(\frac{1+\xi_T\eta_T V_{GPL}^{(k)}}{1-\eta_T V_{GPL}^{(k)}}\right)E_m \tag{۷}$$

در معادله **۷**، ضرایب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\eta_L=\frac{(E_{GPL}/E_m)-1}{(E_{GPL}/E_m)+\xi_L},\eta_T=\frac{(E_{GPL}/E_m)-1}{(E_{GPL}/E_m)+\xi_T}$$
$$\xi_L=2\frac{a_{GPL}}{t_{GPL}},\ \ \xi_T=2\frac{b_{GPL}}{t_{GPL}} \tag{۸}$$

در معادله‌های **۷** و **۸**، میانگین طول، عرض و ضخامت نانو صفحه گرافن به ترتیب با a_{GPL}، b_{GPL} و t_{GPL} نشان داده شده است. علاوه بر این، بر اساس قانون مخلوط، چگالی ρ و ضریب پواسون ν به‌صورت روابط **۹- الف** و **۹-ب** تعریف می‌شوند:

$$\rho^{(k)}=V_{GPL}^{(k)}\rho_{GPL}+(1-V_{GPL}^{(k)})\rho_m \tag{۹-الف}$$

$$\nu^{(k)}=V_{GPL}^{(k)}\nu_{GPL}+(1-V_{GPL}^{(k)})\nu_m \tag{۹-ب}$$

که ν_{GPL} و ν_m به ترتیب، ضرایب پواسون وابسته به نانو صفحات گرافن و ماتریس می‌باشند. علاوه بر این، V_m نسبت حجمی ماتریس است که در قانون مخلوط معادله **۱۰** صدق می‌کند:

$$V_m=1-V_{GPL} \tag{۱۰}$$

بارگذاری آیرودینامیکی

پانل ساندویچی متخلخل احاطه شده توسط لایه‌های پیزوالکتریک تحت یک جریان سیال مافوق صوت قرار دارد. با استفاده از تئوری مرتبه اول پیستون، اختلاف فشار آیرودینامیکی در سرعت‌های مافوق صوت به صورت معادله **۱۱** بیان می‌شود:

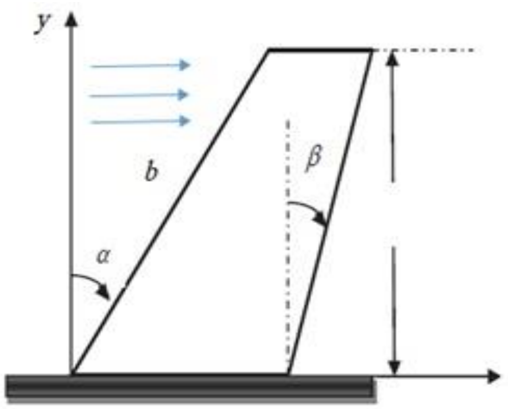
$$\Delta P=-\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\left(\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x}+\frac{M_\infty^2-2}{M_\infty^2-1}\frac{1}{U_\infty}\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}\right) \tag{۱۱}$$

در رابطه **۱۱**، U_∞، M_∞ و ρ_∞ به ترتیب، سرعت، عدد ماخ و چگالی جریان هوا را نشان می‌دهند.

استخراج معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون

معادلات حاکم بر حرکت برای پانل ذوزنقه‌ای

با توجه به روابط بیان شده در معادلات قبل که از طریق یک نگاشت یک پانل ذوزنقه‌ای شکل به یک پانل مربعی با اضلاع واحد تبدیل می‌شد، اکنون شرایط مرزی و معادلات حاکم بر حرکت مسئله مورد مطالعه را می‌توان اعمال نمود. همچنین، شماتیک مسئله مورد نظر در شکل ۲ قابل مشاهده است.



شکل ۲ - شماتیک پانل ذوزنقه‌ای تحت نیروی آیروالاستیک

لازم به ذکر است که معادلات دینامیکی حاکم بر حرکت و شرایط مرزی متناظر با سیستم مورد نظر را می‌توان توسط اصل توسعه‌یافته همیلتون که به صورت معادله **۱۲** فرمول‌بندی می‌شود، استخراج کرد[۳۱].

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}[K-(U+V)]dt=0 \qquad (۱۲)$$

در رابطه ۱۲، U انرژی کرنش کلی ناشی از تغییر شکل‌ها، V نمایانگر پتانسیل ناشی از بارهای خارجی و K انرژی جنبشی سیستم را نشان می‌دهد. می‌توان بیان کرد که انرژی پتانسیل کلی سیستم شامل انرژی کرنش کلی ناشی از تغییر شکل‌ها و پتانسیل ناشی از بارهای خارجی می‌شود. اکنون می‌توان با توجه به نگاشت، معادلات حاکم بر حرکت را برای یک پانل ذوزنقه‌ای شکل، به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$\delta u_0:$

$$\begin{aligned}
&Q_{11}H_0[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\zeta^2}]+Q_{44}H_0[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\zeta^2}\\
&+2FH\frac{\partial^2 u_0}{\partial\zeta\partial\eta}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial u_0}{\partial\zeta})]\\
&+(Q_{12}H_0+Q_{44}H_0)[\frac{1}{L^2}(FH^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial\zeta^2}\\
&+H\frac{\partial^2 v_0}{\partial\zeta\partial\eta}+GH^2\frac{\partial v_0}{\partial\zeta})\\
&+(Q_{12}H_1+Q_{44}H_1)[\frac{1}{L^2}(FH^2\frac{\partial^2\theta_y}{\partial\zeta^2}\\
&+H\frac{\partial^2\theta_y}{\partial\zeta\partial\eta}+GH^2\frac{\partial\theta_y}{\partial\zeta})]+Q_{11}H_1[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial\zeta^2}]\\
&+Q_{44}H_1[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2\theta_x}{\partial\zeta^2}+2FH\frac{\partial^2\theta_x}{\partial\zeta\partial\eta}\\
&+\frac{\partial^2\theta_x}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial\theta_x}{\partial\zeta})]+Q_{13}H_0[\frac{H}{L}\frac{\partial\theta_z}{\partial\zeta}]\\
&+Q_{11}H_2\left[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial\zeta^2}\right]+Q_{11}H_3\left[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2\theta_x^*}{\partial\zeta^2}\right]\\
&+Q_{44}H_2[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial\zeta^2}+2FH\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial\zeta\partial\eta}\\
&+\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial u_0^*}{\partial\zeta})]\\
&+(Q_{12}H_2+Q_{44}H_2)[\frac{1}{L^2}(FH^2\frac{\partial^2 v_0^*}{\partial\zeta^2}+H\frac{\partial^2 v_0^*}{\partial\zeta\partial\eta}\\
&+GH^2\frac{\partial v_0^*}{\partial\zeta})]+Q_{44}H_3[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2\theta_x^*}{\partial\zeta^2}\\
&+2FH\frac{\partial^2\theta_x^*}{\partial\zeta\partial\eta}+\frac{\partial^2\theta_x^*}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial\theta_x^*}{\partial\zeta})]+(Q_{12}H_3\\
&+Q_{44}H_3)[\frac{1}{L^2}(FH^2\frac{\partial^2\theta_y^*}{\partial\zeta^2}+H\frac{\partial^2\theta_y^*}{\partial\zeta\partial\eta}+GH^2\frac{\partial\theta_y^*}{\partial\zeta})]\\
&+2Q_{13}H_1[\frac{H}{L}\frac{\partial w_0^*}{\partial\zeta}]+2Q_{13}H_2\left[\frac{H}{L}\frac{\partial\theta_z^*}{\partial\zeta}\right]\\
&=I_1\ddot{u}_0+I_2\ddot{\theta}_x+I_3\ddot{u}_0^*+I_4\ddot{\theta}_x^*
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

$\delta\theta_y:$

$$\begin{aligned}
&(Q_{12}H_1+Q_{44}H_1)[\frac{1}{L^2}(FH^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\zeta^2}+H\frac{\partial^2 u_0}{\partial\zeta\partial\eta}+GH^2\frac{\partial u_0}{\partial\zeta})]\\
&+Q_{44}H_1[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\zeta^2}]+Q_{22}H_1[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial\zeta^2}+2FH\frac{\partial^2 v_0}{\partial\zeta\partial\eta}\\
&+\frac{\partial^2 v_0}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial v_0}{\partial\zeta})]-Q_{55}H_0[\frac{1}{L}\left(FH\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_0}{\partial\eta}\right)]\\
&+(Q_{12}H_2+Q_{44}H_2)[\frac{1}{L^2}(FH^2\frac{\partial^2\theta_x}{\partial\zeta^2}+H\frac{\partial^2\theta_x}{\partial\zeta\partial\eta}+GH^2\frac{\partial\theta_x}{\partial\zeta})]\\
&+Q_{22}H_2[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2\theta_y}{\partial\zeta^2}+2FH\frac{\partial^2\theta_y}{\partial\zeta\partial\eta}+\frac{\partial^2\theta_y}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial\theta_y}{\partial\zeta})]\\
&+Q_{44}H_2\left[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial\zeta^2}\right]-Q_{55}H_0\theta_y+(Q_{23}H_1-Q_{55}H_1)[\frac{1}{L}(FH\frac{\partial\theta_z}{\partial\zeta}+\frac{\partial\theta_z}{\partial\eta}]\\
&+Q_{44}H_3[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2 v_0^*}{\partial\zeta^2}]-2H_1Q_{55}v_0^*\\
&+(Q_{44}H_3+Q_{12}H_3)[\frac{1}{L^2}(FH^2\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial\zeta^2}+H\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial\zeta\partial\eta}+GH^2\frac{\partial u_0^*}{\partial\zeta})]\\
&+Q_{22}H_3[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2 v_0^*}{\partial\zeta^2}+2FH\frac{\partial^2 v_0^*}{\partial\zeta\partial\eta}+\frac{\partial^2 v_0^*}{\partial\eta^2}\\
&+2GFH^2\frac{\partial v_0^*}{\partial\zeta})]+(2Q_{23}H_2-Q_{55}H_2)[\frac{1}{L}(FH\frac{\partial w_0^*}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_0^*}{\partial\eta}]\\
&+Q_{44}H_4\left[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2\theta_y^*}{\partial\zeta^2}\right]+(Q_{12}H_4+Q_{44}H_4)[\frac{1}{L^2}(FH^2\frac{\partial^2\theta_x^*}{\partial\zeta^2}\\
&+H\frac{\partial^2\theta_x^*}{\partial\zeta\partial\eta}+GH^2\frac{\partial\theta_x^*}{\partial\zeta})]-3Q_{55}H_3\theta_y^*+Q_{22}H_4[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2\theta_y^*}{\partial\zeta^2}\\
&+2FH\frac{\partial^2\theta_y^*}{\partial\zeta\partial\eta}+\frac{\partial^2\theta_y^*}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial\theta_y^*}{\partial\zeta})]+(3Q_{23}H_3\\
&-Q_{55}H_3)[\frac{1}{L}(FH\frac{\partial\theta_z^*}{\partial\zeta}+\frac{\partial\theta_z^*}{\partial\eta}]=I_1\ddot{v}_0+I_2\ddot{\theta}_y+I_3\ddot{v}_0^*+I_4\ddot{\theta}_y^*
\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

$\delta w_0^*:$

$$\begin{aligned}
&-2Q_{13}H_1\left[\frac{H}{L}\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}\right]-2Q_{23}H_1[\frac{1}{L}(FH\frac{\partial v_0}{\partial\zeta}+\frac{\partial v_0}{\partial\eta}]\\
&+Q_{66}H_2[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\zeta^2}]+Q_{55}H_2[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial\zeta^2}\\
&+2FH\frac{\partial^2 w_0}{\partial\zeta\partial\eta}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial w_0}{\partial\zeta})]-2Q_{13}H_2[\frac{H}{L}\frac{\partial\theta_x}{\partial\zeta}]\\
&+Q_{66}H_2\left[\frac{H}{L}\frac{\partial\theta_x}{\partial\zeta}\right]+(Q_{55}H_2-2Q_{23}H_2)[\frac{1}{L}\left(FH\frac{\partial\theta_y}{\partial\zeta}+\frac{\partial\theta_y}{\partial\eta}\right)]\\
&-2Q_{33}H_1\theta_z+Q_{66}H_3\left[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2\theta_z}{\partial\zeta^2}\right]+Q_{55}H_3[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2\theta_z}{\partial\zeta^2}\\
&+2FH\frac{\partial^2\theta_z}{\partial\zeta\partial\eta}+\frac{\partial^2\theta_z}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial\theta_z}{\partial\zeta})]+(2Q_{66}H_3\\
&-2Q_{13}H_3)[\frac{H}{L}\frac{u_0^*}{\partial\zeta}]+(2Q_{55}H_3-2Q_{23}H_3)[\frac{1}{L}\left(FH\frac{\partial v_0^*}{\partial\zeta}+\frac{\partial v_0^*}{\partial\eta}\right)]\\
&+(3Q_{66}H_4-2Q_{13}H_4)[\frac{H}{L}\frac{\partial\theta_x^*}{\partial\zeta}]+(3Q_{55}H_4\\
&-2Q_{23}H_4)\left[\frac{1}{L}\left(FH\frac{\partial\theta_y^*}{\partial\zeta}+\frac{\partial\theta_y^*}{\partial\eta}\right)\right]-4Q_{33}H_2w_0^*
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+Q_{55}H_4[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial\zeta^2}+2FH\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial\zeta\partial\eta}\\
&+\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial w_0^*}{\partial\zeta})]+Q_{66}H_4\left[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial\zeta^2}\right]\\
&+Q_{55}H_5[\frac{1}{L^2}(F^2H^2\frac{\partial^2\theta_z^*}{\partial\zeta^2}+2FH\frac{\partial^2\theta_z^*}{\partial\zeta\partial\eta}+\frac{\partial^2\theta_z^*}{\partial\eta^2}+2GFH^2\frac{\partial\theta_z^*}{\partial\zeta})]\\
&+Q_{66}H_5[\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2\theta_z^*}{\partial\zeta^2}]-6Q_{33}H_3\theta_z^*=I_2\ddot{w}_0+I_3\ddot{\theta}_z+I_4\ddot{w}_0^*+I_5\ddot{\theta}_z^*
\end{aligned}
\qquad (۱۵)
$$

روش حل

روش مربعات دیفرانسیلی

فرض کنید مقدار تابع دو متغیره $f(\xi,\eta)$ در $N\times M$ نقطه‌ی مشخص به شکل ماتریسی رابطه **۱۶** در نظر گرفته می‌شود:

$$
f_{ij}=f(\xi_i,\eta_j) \qquad (۱۶)
$$
$$
i=1,2,\ldots,N \quad ; j=1,2,\ldots,M
$$

در روش تفاضلات مربعی مقادیر مشتقات تابع در این نقاط به شکل ترکیبی خطی از مقادیر تابع در این نقاط قابل تقریب هستند:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(\xi_i,\eta_j)}{\partial\xi}&=\sum_{n=1}^{N}A_{in}^{(\xi)}f_{nj}\\
\frac{\partial^2 f(\xi_i,\eta_j)}{\partial\xi^2}&=\sum_{n=1}^{N}B_{in}^{(\xi)}f_{nj}\\
\frac{\partial f(\xi_i,\eta_j)}{\partial\eta}&=\sum_{m=1}^{M}A_{jm}^{(\eta)}f_{im}\\
\frac{\partial^2 f(\xi_i,\eta_j)}{\partial\eta^2}&=\sum_{m=1}^{M}B_{jm}^{(\eta)}f_{im}\\
\frac{\partial^2 f(\xi_i,\eta_j)}{\partial\eta\partial\xi}&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}A_{in}^{(\xi)}A_{jm}^{(\eta)}f_{nm}
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

که در این رابطه $A^{(\xi)}$، $B^{(\xi)}$، $A^{(\eta)}$ و $B^{(\eta)}$ به ترتیب ماتریس‌های وزنی مرتبط با مشتقات مرتبه اول و دوم در راستاهای ξ و η می‌باشند. برای مشتق اول این ماتریس‌ها از روابط **۱۸** محاسبه می‌شوند.

$$
A_{in}^{(\xi)}=\begin{cases}\dfrac{\prod_{k=1;k\neq i,n}^{N}(\xi_i-\xi_k)}{\prod_{k=1;k\neq i,n}^{N}(\xi_n-\xi_k)}, & (i,n=1,2,3,\ldots,N; i\neq n)\\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1;k\neq i}^{N}\frac{1}{(\xi_i-\xi_k)}, & (i=n=1,2,3,\ldots,N)\end{cases}
$$

$$
A_{in}^{(\eta)}=\begin{cases}\dfrac{\prod_{k=1;k\neq i,n}^{M}(\eta_j-\eta_k)}{\prod_{k=1;k\neq j,m}^{M}(\eta_m-\eta_k)}, & (j,m=1,2,3,\ldots,M; j\neq m)\\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1;k\neq j}^{M}\frac{1}{(\eta_j-\eta_k)}, & (j=m=1,2,3,\ldots,M)\end{cases}
\qquad (۱۸)
$$

و برای مشتق دوم از روابط **۱۹** می‌توان استفاده نمود.

$$
B^{(\xi)}=A^{(\xi)}A^{(\xi)};\ B^{(\eta)}=A^{(\eta)}A^{(\eta)} \qquad (۱۹)
$$

برای مشتقات بالاتر نیز می‌توان رابطه **۱۹** را تعمیم داد که در این حالت نیز معمولاً از نمادهای C و D به ترتیب برای مشتقات مرتبه سوم و چهارم استفاده می‌گردد.

معادله **۱۷** را می‌توان به شکل ماتریسی رابطه **۲۰** بیان نمود:

$$
\begin{aligned}
&[f_\xi]=[A^{(\xi)}][f],\ [f_{\xi\xi}]=[B^{(\xi)}][f]\\
&[f_\eta]=[f][A^{(\eta)}]^T,\ [f_{\eta\eta}]=[f][B^{(\eta)}]^T\\
&[f_{\xi\eta}]=[A^{(\xi)}][f][A^{(\eta)}]^T
\end{aligned}
\qquad (۲۰)
$$

که در رابطه **۲۰** بالانویس T بیانگر عملگر ترانهاده است. برای یک ماتریس $[f]_{N\times M}$ بردار ستونی معادل $\{\bar{f}\}_{NM\times 1}$ به صورت رابطه **۲۱** تعریف می‌گردد.

$$
\bar{f}_v=f_{ij}\ ,v=(j-1)N+i \qquad (۲۱)
$$

به‌عبارت‌دیگر $\{\bar{f}\}$ حاصل زیر هم قرار دادن ستون‌های $[f]$ است. با استفاده از این ترفند ضرب سه ماتریس $[a][f][b]$ می‌تواند با عبارت $([b]^T\otimes[a])\{\bar{f}\}$ جایگزین گردد. که در این رابطه عملگر $\otimes$ بیانگر ضرب کرونیکر است. بنابراین رابطه **۲۰** به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$
\begin{aligned}
&[\bar{f}_\xi]=(I^\eta\otimes[A^{(\xi)}])[\bar{f}],\ [\bar{f}_{\xi\xi}]=(I^\eta\otimes[B^{(\xi)}])[\bar{f}]\\
&[\bar{f}_\eta]=([A^{(\eta)}]\otimes \mathrm{I}^\xi)[\bar{f}],\ [\bar{f}_{\eta\eta}]=([B^{(\eta)}]^T\otimes \mathrm{I}^\xi)[\bar{f}]\\
&[\bar{f}_{\xi\eta}]=([A^{(\xi)}]\otimes[A^{(\eta)}])[\bar{f}]
\end{aligned}
\qquad (۲۲)
$$

در این رابطه I^ξ و I^η به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های همانی از مرتبه N و M هستند.

بنابراین دستگاه معادلات دیفرانسیل به فرم ماتریسی معادله **۲۳** حاصل می‌شود:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{0\} \quad (۲۳)$$

که در رابطه **۲۳** $[M]$، $[C]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی هستند که به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$x_1=\frac{1}{L}(H_y\otimes A_x) \qquad x_2=\frac{1}{L^2}kron(H_y^2\otimes B_x) \quad (۲۴\text{-الف})$$

$$y_1=\frac{1}{L}\left(H_y\otimes F_xA_x\right)+\left(A_y\otimes I_x\right) \qquad y_2=\frac{1}{L^2}((H_y^2\otimes F_x^2B_x)+2(H_yA_y\otimes F_xA_x) \quad (۲۴\text{-ب})$$

$$x_1y_1=\frac{1}{L^2}((H_y^2\otimes F_xB_x)+\left(H_yA_y\otimes A_x\right)+G\left(H_y^2\otimes A_x\right)) \quad (۲۴\text{-پ})$$

$$I=\left(I_y\otimes I_x\right),\qquad Z=\left(Z_y\otimes Z_x\right) \quad (۲۴\text{-ت})$$

تحلیل پایداری پانل ساندویچی

برای تحلیل پایداری، معادله‌ی **۲۳** به فرم فضای حالت مرتبه اول تعریف می‌گردد:

$$\dot{Z}(\tau)=[D]Z(\tau) \quad (۲۵)$$

که بردار حالت

$$Z(\tau)=\begin{Bmatrix}T(\tau)\\ \dot{T}(\tau)\end{Bmatrix} \quad (۲۶)$$

و ماتریس حالت $[D]$ به شکل رابطه **۲۷** است:

$$[D]=\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C]\end{bmatrix} \quad (۲۷)$$

با فرض اینکه جواب معادله‌ی **۲۵** به فرم $\{Z\}=\{\bar{Z}\}e^{\Omega t}$ باشد، به مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی به شکل رابطه **۲۸** خواهیم رسید:

$$([\boldsymbol{D}]-i\Omega[\boldsymbol{I}])\{\bar{\boldsymbol{Z}}\}=0 \quad (۲۸)$$

که در آن Ω مقدار ویژه، $\{\bar{Z}\}$ بردار ویژه‌ی متناظر با آن و $[I]$ ماتریس همانی است. در حالت کلی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $[D]$ یک کمیت مختلط به‌صورت $\Omega=\Omega_R+i\Omega_I$ می‌باشند، که Ω_R بخش حقیقی و Ω_I بخش موهومی مقادیر ویژه هستند. برای اینکه معادله جواب غیر بدیهی داشته باشد، دترمینان ماتریس ضرایب باید صفر شود.

$$det([D]-i\Omega[I])=0 \quad (۲۹)$$

بنابراین رفتار پایداری سیستم با توجه به علامت و مقدار، مقادیر ویژه تعیین می‌شود. به طور مثال سیستم پایدار است، اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس $[D]$ دارای بخش حقیقی مثبت باشند، و ناپایدار است اگر حداقل یک مقدار ویژه‌ی بخش حقیقی منفی داشته باشد. در واقع، وقتی‌که قسمت حقیقی و موهومی مقادیر ویژه صفر می‌شوند سیستم پایداریش را از طریق دیورژانس از دست می‌دهد و اگر قسمت حقیقی مقادیر ویژه صفر و قسمت موهومی آن‌ها مخالف صفر باشد آنگاه سیستم پایداریش را از طریق فلاتر در فشار بحرانی λ_{cr} از دست می‌دهد.

نتایج، تفسیر و بررسی آن‌ها

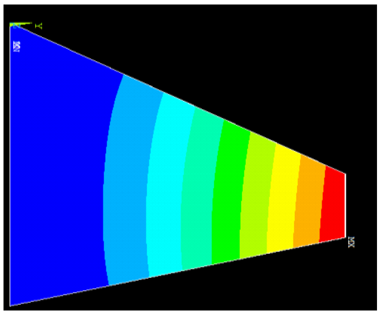
صحت سنجی

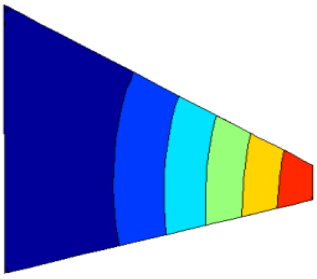
به منظور اطمینان یافتن از دقت و درستی شبیه‌سازی اجزا محدود، فرکانس‌های طبیعی در شش مود نخست از پانل ذوزنقه‌ای با ابعاد هندسی نسبت به افق در نظر گرفته شد. $a=0.088m$، ضخامت $h=0.00098m$ و زوایای $\alpha=30^\circ$. سپس، نتایج حاصل از بررسی اجزا محدود با نرم‌افزار انسیس با نتایج به دست آمده از روش GDQ توسط افشاری و ترابی [۳۲] و همچنین، نتایج آزمایشگاهی توسط رومرو و همکاران[۴] [۳۳] در جدول ۱ مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشخص است نتایج به دست آمده از روش اجزا محدود دارای دقت کافی و همخوانی مناسب با سایر نتایج ارائه شده می‌باشند.

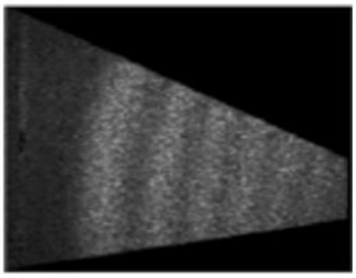
علاوه بر نتایج ارائه شده در جدول **۱**، در شکل **۳** نیز شش مود نخست پانل ذوزنقه‌ای به‌صورت گرافیکی نمایش داده شده و با نتایج به دست آمده از افشاری و ترابی [۳۲] که به دو روش اجزا محدود (نرم‌افزار انسیس) و حل عددی GDQ این شکل مودها را رسم کرده‌اند، مقایسه شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، تحلیل ارائه شده از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشد.

جدول ۱ – مقایسه شش فرکانس طبیعی اول با روش‌های اجزا محدود (نرم‌افزار انسیس)، روش عددی GDQ و روش تجربی

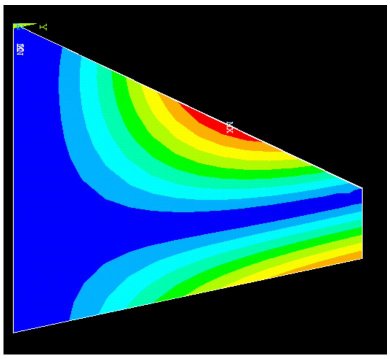
	Natural frequencies (Hz)					
	Mode numbers					
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مطالعه حاضر (نرم‌افزار انسیس)	۱۴۷/۰۲	۵۸۲/۲۹	۶۷۰/۱۸	۱۴۹۱/۹	۱۷۳۲/۶	۲۲۴۵/۶
افشاری و ترابی[۳۲] (GDQ)	۱۵۳/۱۰	۵۷۹/۵۹	۶۷۶/۴۵	۱۴۹۲/۸۴	۱۷۳۵/۴۶	۲۲۹۱/۵۴
رومرو و همکاران[۳۳] (تجربی)	۱۵۳	۵۹۴	۷۱۷	۱۵۷۱	۱۹۷۰	۲۳۲۰

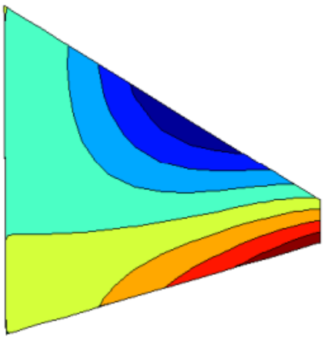

(الف)

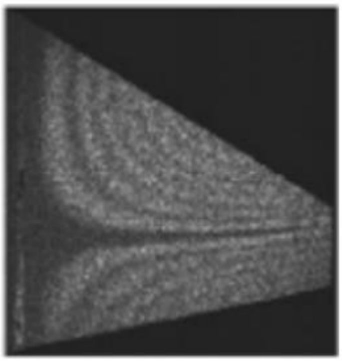

(ب)


(ج)

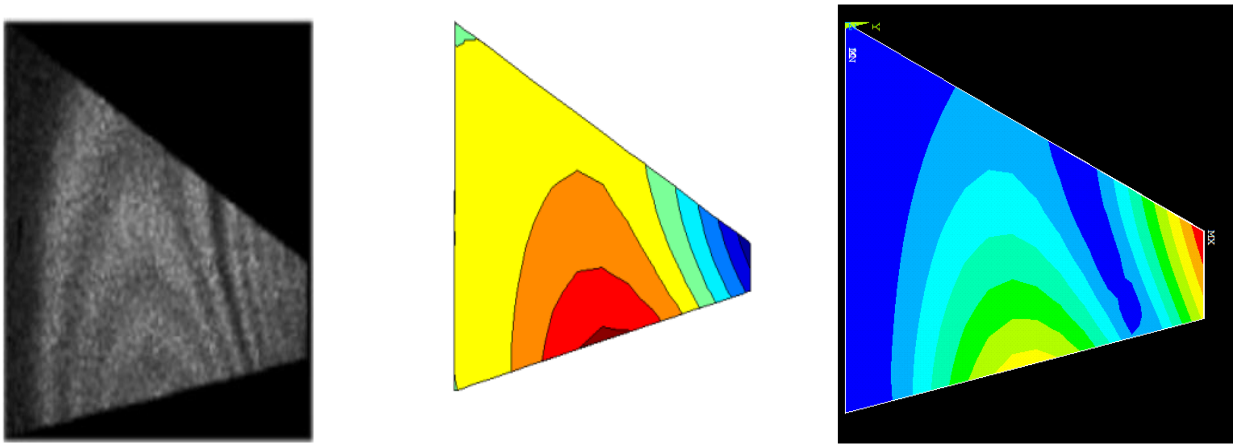
مود اول


(الف)


(ب)

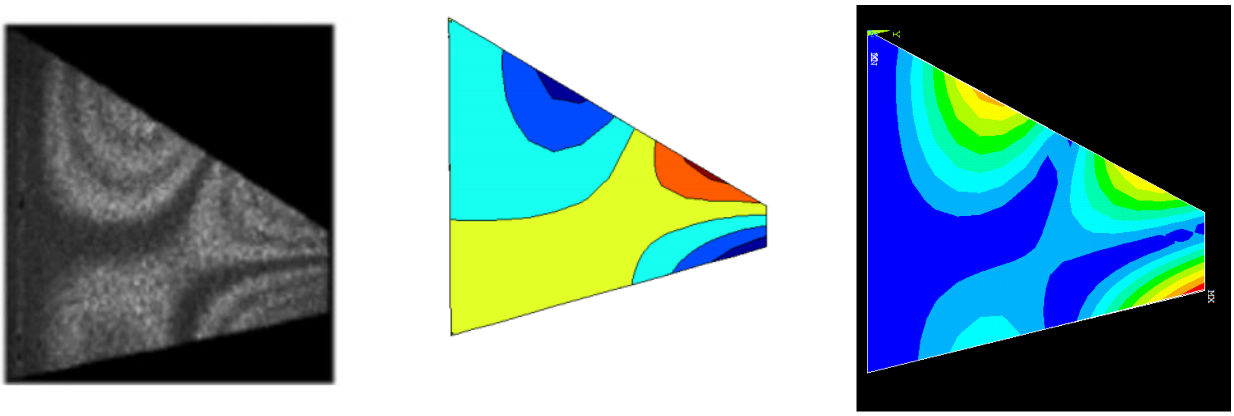

(ج)

مود دوم



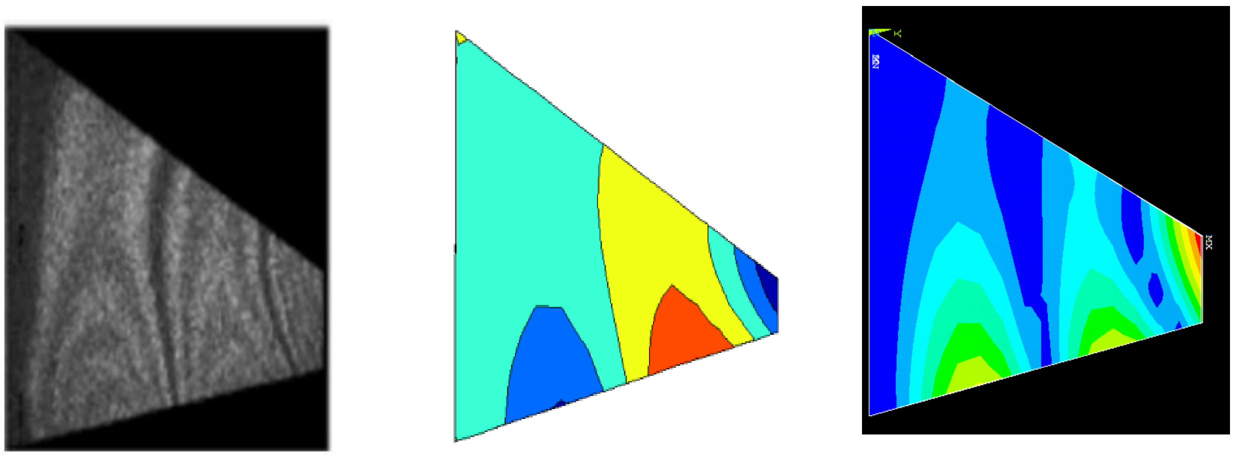
(الف) (ب) (ج)

مود سوم



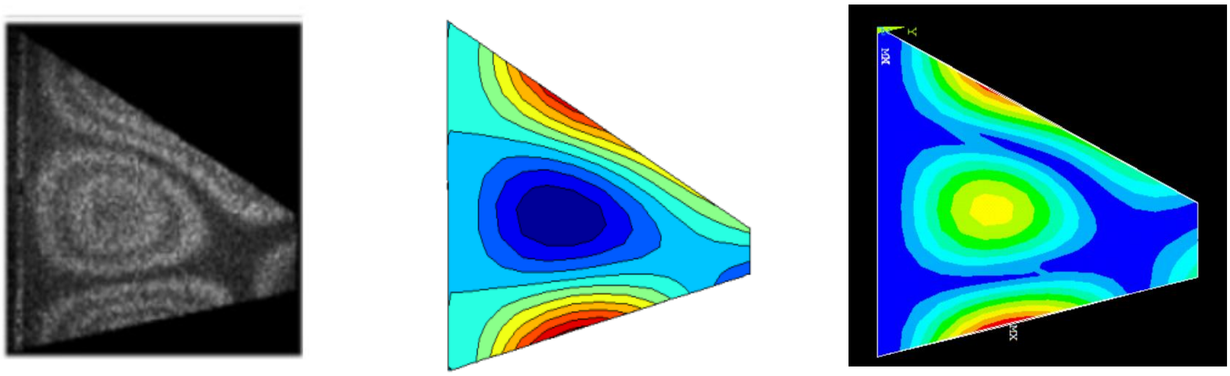
(الف) (ب) (ج)

مود چهارم



(الف) (ب) (ج)

مود پنجم



(الف) (ب) (ج)

مود ششم

شکل ۳ - مقایسه شش شکل مود اول پانل ذوزنقه‌ای با استفاده از روش اجزا محدود در نرم‌افزار انسیس و روش عددی GDQ الف) نرم‌افزار انسیس برای کار حاضر ب) نرم‌افزار انسیس در مقاله افشاری و ترابی [۲۷] ج) روش GDQ

تحلیل فرکانسی پانل ذوزنقه ساخته شده از مواد هدفمند

وابستگی به دما هر خاصیت دلخواه از ماده، P، بر طبق قانون تجربی به دست آمده، به شکل زیر می‌باشد [۳۴].

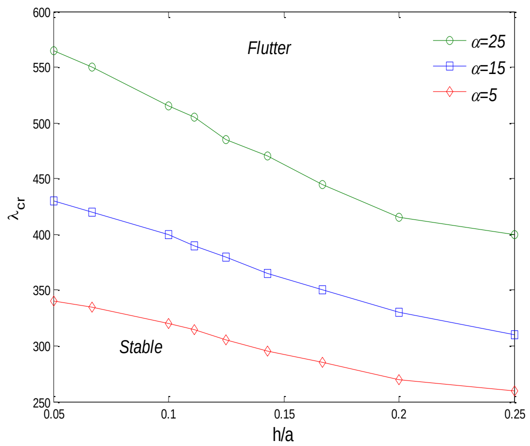
$$P(z)=P_0(1+\frac{P_{-1}}{T+1}+P_1T+P_2T^2+P_3T^3) \qquad (۳۰)$$

که در رابطه **۳۰**، P_0، P_{-1}، P_1، P_2 و P_3 ضرایب دمای محیط (بر اساس کلوین) هستند. خواص عددی مواد در نظر گرفته شده در این پژوهش به شرح ذیل می‌باشند.

$$Ceramic: E_0=384.43e^9 Pa, E_1=-3.070e^{-4} Pa$$
$$E_2=2.160e^{-7} Pa$$
$$E_3=-8.946e^{-10} Pa$$
$$v_0=0.246, v_1=-2.002e^{-4}, v_2=3.797e^{-7}, v_3=0$$
$$Metal: E_0=201.04e^9 Pa, E_1=3.079e^{-4} Pa$$
$$E_2=-6.534e^{-7} Pa, E_3=0$$
$$v_0=0.31, v_1=0, v_2=0, v_3=0$$

به‌منظور بررسی پایداری سیستم متشکل از پانل ذوزنقه‌ای شکل ساخته شده از مواد هدفمند، شکل **۴** تغییرات فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیکی را بر حسب تابعی از نسبت ابعاد پانل، ارتفاع به قاعده پانل ذوزنقه‌ای، برای سه زاویه مختلف پانل نسبت به افق، $\alpha=5^{\circ},15^{\circ},25^{\circ}$، را نشان می‌دهد. در این شکل مقادیر پارامترهای مختلف برابر $a=b=1, T=300^K$ و $\beta=10^{\circ}$ فرض شده است.

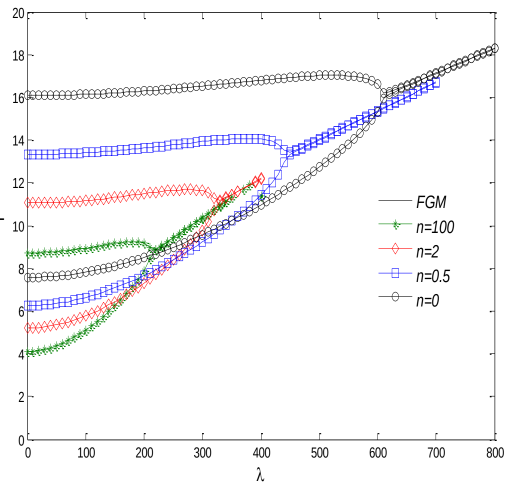
همان‌طور که از شکل **۴** مشخص است، افزایش زاویه پانل نسبت به افق سبب پیش‌بینی فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیک بیشتری می‌شود که به دنبال آن سیستم سفت‌تر شده و



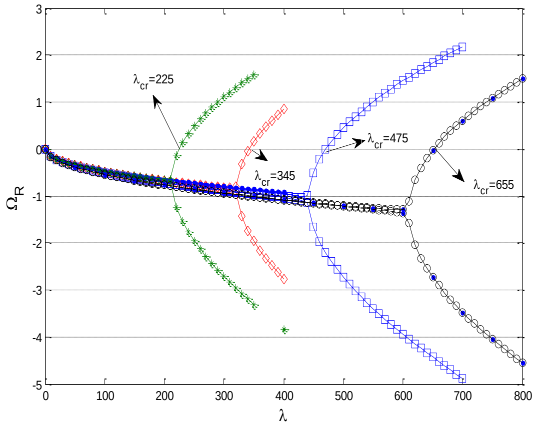
شکل ۴ - نمودار فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیک پانل ذوزنقه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند بر حسب نسبت ابعاد مختلف ورق و به ازای زوایای مختلف پانل ذوزنقه‌ای نسبت به افق

استحکام بیشتری دارد. به‌بیان‌دیگر، این افزایش در زاویه پانل نسبت به افق پایداری سیستم را افزایش می‌دهد و پانل ذوزنقه‌ای پس از مدت طولانی‌تری به مرز ناپایداری فلاتر خواهند رسید. همچنین، کاهش فشار بحرانی آیرودینامیکی به دلیل افزایش نسبت ابعاد پانل یکی دیگر از نکات قابل‌توجه در

توصیف شکل **۴** است. بنابراین، انتخاب پانل ذوزنقه‌ای با نسبت ضخامت به قاعده کمتر و زاویه بزرگ‌تر نسبت به افق یکی از راه‌کارهای بهینه در بالا بردن پایداری چنین سیستم‌هایی است. شکل **۵** بیانگر تغییرات مقادیر ویژه پانل ذوزنقه‌ای شکل نسبت به فشار آیرودینامیکی برای پارامترهای مختلف n و همچنین پانل ساخته شده از مواد هدفمند می‌باشد. این شکل با در نظر گرفتن پارامترهای $a=b=1, h=\dfrac{a}{10}, T=300^K$ و $\beta=10^\circ$ برای نمایش این تغییرات ترسیم شده است. می‌توان نشان داد که فرکانس‌های طبیعی پانل با هندسه ذوزنقه با افزایش پارامتر n، افزایش می‌یابد و هنگامی که پانل ذوزنقه‌ای به‌صورت هدفمند در نظر گرفته می‌شود، فرکانس طبیعی در بالاترین مقدار خود نسبت به n های مختلف قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، نتایج بیان می‌کنند که ساختن پانل از جنس مواد پیشرفته، می‌تواند به‌طور چشمگیری فرکانس‌های طبیعی سیستم را افزایش دهد. بنابراین در حالتی که پانل کاملاً از سرامیک ساخته شده باشد ($n=0$) سفت‌تر و از استحکام بالاتری برخوردار است و این مسئله خود سبب تشدید استحکام پانل ساخته شده از مواد هدفمند است. همچنین با افزایش n که بیانگر افزایش درصد فلزی بودن و کاهش درصد سرامیک بودن می‌باشد، فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیک کاهش می‌یابند.



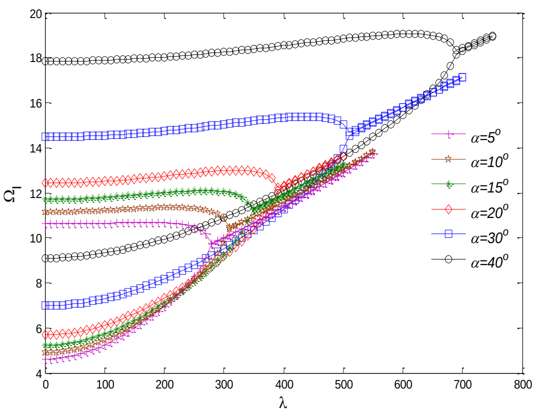
(الف)



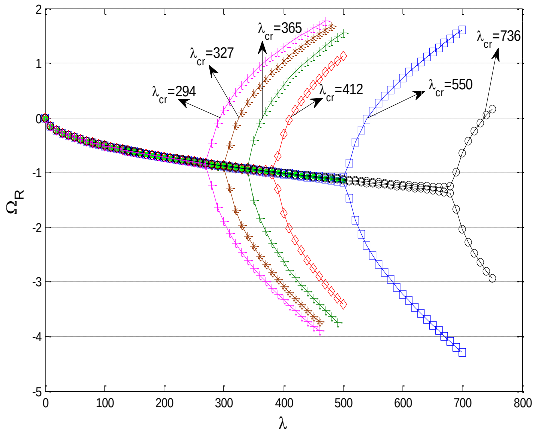
(ب)

شکل ۵ - تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک برای مقادیر مختلف n الف) قسمت موهومی ب) قسمت حقیقی

تغییرات مقادیر ویژه بر حسب فشار آیرودینامیکی برای پانل ذوزنقه‌ای شکل ساخته شده از مواد هدفمند در شکل **۶** به ازای مقادیر مختلف زاویه پانل نسبت به محور افق، α، ترسیم شده است. در این شکل مقادیر پارامترهای مختلف به‌صورت $a=b=1, h=\dfrac{a}{10}, T=300^K$، $\beta=10^\circ$ و $n=0.5$ در نظر گرفته شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش زاویه پانل نسبت به محور افق، فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر آن افزایش می‌یابند. به‌عبارت‌دیگر این نمودارها نشان می‌دهند که هر چه زاویه پانل نسبت به محور افق بیشتر باشد، استحکام پانل بیشتر می‌شود و فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر افزایش می‌یابند که سبب افزایش پایداری سیستم می‌شود.



(الف)

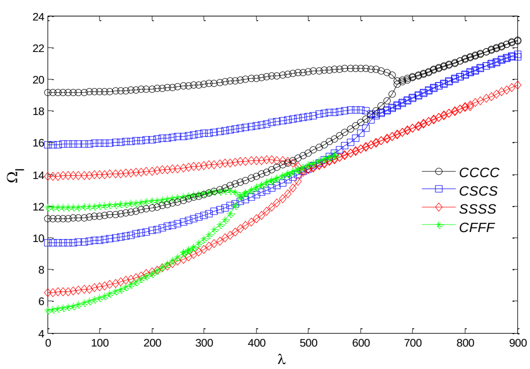


(ب)

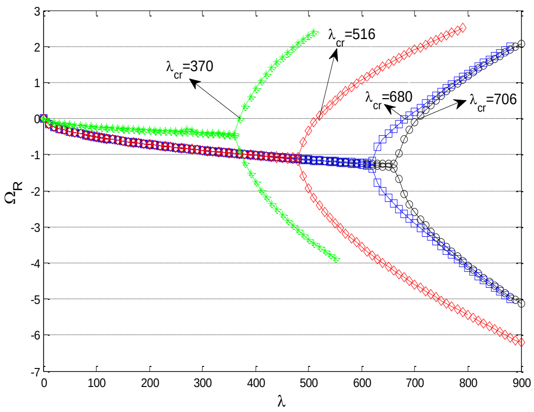
شکل ۶- تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک برای مقادیر مختلف از زوایای پانل ذوزنقه‌ای شکل نسبت به افق الف) قسمت موهومی ب) قسمت حقیقی

این بدان معناست که پانل با دارا بودن زاویه بزرگ‌تر نسبت به افق، پایداریش را دیرتر از دست می‌دهد. علاوه بر این، پانل با افزایش زاویه نسبت به افق به ترتیب در فشارهای فلاتر بحرانی ۲۹۴، ۳۲۷، ۳۶۵، ۴۱۲، ۵۵۰ و ۷۳۶ پایداریش را از دست می‌دهد.

شکل **۷** تغییرات مقادیر ویژه را برحسب فشار آیرودینامیکی پانل ذوزنقه‌ای شکل هدفمند برای شرایط مرزی مکانیکی مختلف نشان می‌دهد. در این شکل سایر پارامترها $a=b=1, h=\frac{a}{10}, T=300^K$، $\beta=5^\circ$ و $\alpha=25^\circ$ و $n=0.5$ در نظر گرفته شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۷- تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک برای مقادیر مختلف از زوایای پانل ذوزنقه‌ای شکل نسبت به افق الف) قسمت موهومی ب) قسمت حقیقی

در شکل **۷** همان‌طور که انتظار می‌رود، افزودن قید بر تکیه‌گاه‌های پانل، سبب افزایش فرکانس‌های طبیعی آن می‌شود. لذا می‌توان شرایط تکیه‌گاهی را به ترتیب افزایش فرکانس‌های طبیعی، به‌صورت (CCCC)، (SCSC)، (SSSS) و (CFFF) مرتب نمود. دلیل این تغییرات را در شکل **۷** می‌توان به این صورت بیان کرد که زمانی که یک لبه‌ی پانل دارای تکیه‌گاه ساده باشد، فرکانس طبیعی و فشار آیرودینامیکی بحرانی فلاتر آن به دلیل زیاد شدن سفتی خمشی پانل در مقایسه با سایر شرایط تکیه‌گاهی، کاهش می‌یابد. تغییرات فشار بحرانی آیرودینامیک برای شرایط تکیه‌گاهی (CCCC)، (SCSC)، (SSSS) و (CFFF) به ترتیب برابر ۳۷۰، ۵۱۶، ۶۸۰ و ۷۰۶ است.

تحلیل فرکانسی پانل ساندویچی ذوزنقه‌ای تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن

ازآنجایی‌که در این پژوهش یک تحلیل وابسته به دما انجام پذیرفته است، به دست آوردن یک تابع پیوسته برای ویژگی‌های مکانیکی- حرارتی به لحاظ دمایی مناسب است. برای هر کدام از این ویژگی‌ها مانند مدول یانگ، چگالی، نسبت پواسون و مدول برشی یک درون‌یابی مرتبه چهارم انجام شده است. هر کدام از این ویژگی‌ها که به‌عنوان نتیجه‌ای از درون‌یابی هستند، به شکل معادله **۳۱** نوشته می‌شوند [۳۵].

$$P = P_0 + P_1\left(\frac{T}{T_0}\right) + P_2\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 + P_3\left(\frac{T}{T_0}\right)^3 + P_4\left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \qquad (۳۱)$$

که در معادله **۳۱**، $T = 300^K$ دمای مرجع است. P نشان‌دهنده یک ویژگی مکانیکی- حرارتی است و ضرایب P_i برای هر خاصیت منحصربه‌فرد هستند که در جدول **۲** آمده‌اند. همچنین، در تمامی نتایج عددی به دست آمده، مگر اینکه مواردی دیگر ذکر شده باشد، خواص مواد وابسته به دما فرض شده‌اند.

جدول ۲ – ضرایب Pi مرتبط با درون‌یابی مرتبه چهارم برای ویژگی‌های مختلف مکانیکی- حرارتی

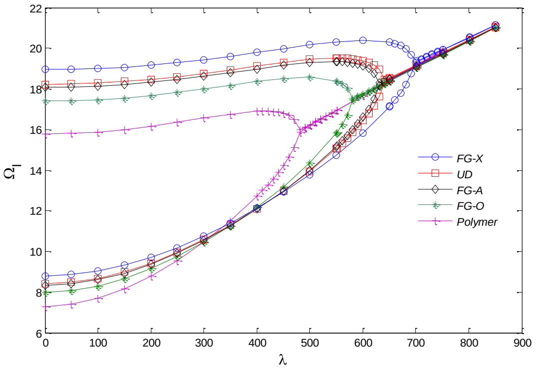
p	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
E_{11} (TPa)	+2.1560	-0.5531	+2.4387e-1	-3.3879e-2	-8.6786e-4
E_{22} (TPa)	+1.9590	-0.0824	-1.5645e-1	+1.0440e-1	-1.7550e-2
G_{12} (TPa)	+0.9633	-0.7672	+7.2866e-1	-2.7761e-1	+3.5839e-2
ϑ_{12}	+0.1770	0	0	0	0

جدول ۳- اعتبار سنجی مطالعه‌ی حاضر

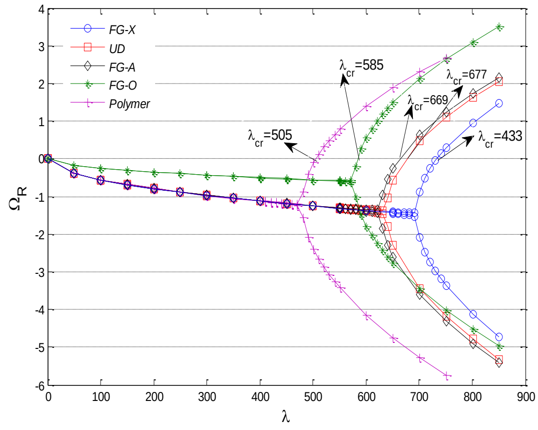
		زاویه α		
مود		15°	30°	45°
۱	Zhao [36]	۵/۱۵۴۳	۶/۰۸۲۷	۸/۳۰۲۵
	مقاله حاضر	۵/۲۳۷۵	۶/۱۱۲	۸/۳۷۸
۲	Zhao [36]	۱۱/۵۰۵	۱۲/۴۹۶	۱۵/۴۳۷
	مقاله حاضر	۱۱/۶۱۸	۱۲/۵۳۱	۱۵/۵۱۱
۳	Zhao [36]	۱۳/۱۹۳	۱۶/۴۶۳	۲۱/۹۰۷
	مقاله حاضر	۱۳/۳۶۸	۱۶/۵۴۲	۲۲/۰۱۱

همچنین در این بخش به منظور صحت سنجی، نتایج کار حاضر با نتایج ژائو و همکاران [۳۶] مقایسه گردید، که مطابق جدول **۳**، تطابق مطلوبی مشاهده شد.

ازآنجایی‌که تغییر در توزیع الگو نانو صفحات گرافنی می‌تواند تأثیر بسزایی در پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیروالاستیک پانل ذوزنقه‌ای تقویت‌شده با این نانو صفحات داشته باشد، بنابراین، شکل **۸** به منظور نشان دادن اثرات توزیع الگوهای مختلف نانو صفحات گرافنی بر روی فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیروالاستیک سیستم مذکور، ترسیم شده است. نتایج ارائه شده برای مقادیر $a = b = 1, h = \dfrac{a}{10}, T = 300^K$ و $\alpha = 10^\circ$ به دست آمده‌اند. می‌توان مشاهده کرد که پانل ذوزنقه‌ای تقویت‌شده با نانو صفحات گرافنی از نوع توزیع *FG-X*، بیشترین فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیروالاستیک را دارا می‌باشد، درحالی‌که این سیستم از نوع توزیع *FG-O*، کمترین میزان فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیروالاستیک را در بین چهار الگوی توزیع به خود اختصاص داده است. همچنین، سفتی پانل ذوزنقه‌ای تقویت‌شده با نانو صفحات گرافنی، با نوع الگوی توزیعی نانو صفحات در ماتریس تغییر می‌کند. بنابراین، می‌توان مشاهده کرد که پانل ذوزنقه‌ای با توزیع *FG-X* به دلیل افزایش سفتی پانل، ناحیه پایدار بیشتری را در مقایسه با سایر الگوهای توزیع نانو صفحات گرافنی پیش‌بینی می‌کند. این رفتار به این دلیل است که در توزیع *FG-X* بیشترین کسر حجمی از نانو صفحات گرافن در سطوح بالایی و پایینی پانل ذوزنقه‌ای توزیع شده است در حالی که کمترین مقدار آن در مرکز پانل متمرکز شده است. این توزیع الگو در پانل ذوزنقه‌ای *FG-O* به‌گونه‌ای است که بیشترین و کمترین مقادیر نانو صفحات گرافنی به ترتیب مربوط به مرکز و سطوح بالایی و پایینی پانل است. نکته قابل‌بیان دیگر این است که منحنی مربوط به پانل ذوزنقه‌ای که تنها از پلیمر ساخته شده است به‌منظور مقایسه فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیروالاستیک در دو حالت ورق تقویت‌شده و تقویت نشده، رسم شده است. کاملاً مشهود است که پانل ذوزنقه‌ای تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن با هر توزیع شکلی، پایداری سیستم را افزایش می‌دهد.



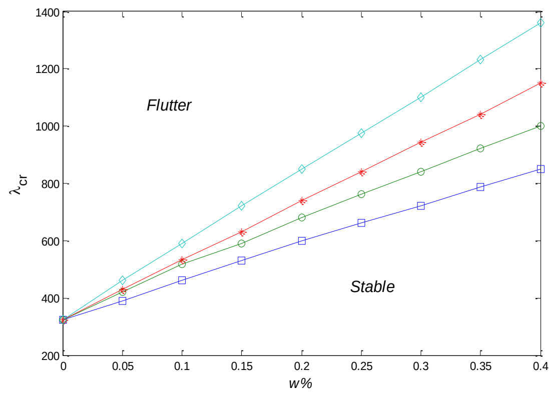
(الف)



(ب)

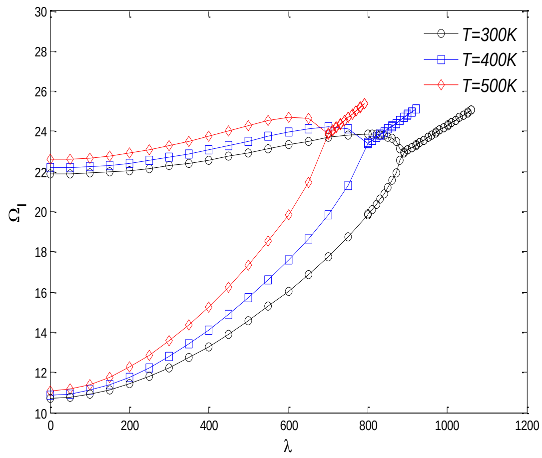
شکل ۸ - تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک برای توزیع الگوهای مختلف از نانو صفحات گرافن الف) قسمت موهومی ب) قسمت حقیقی

به‌منظور بررسی پایداری پانل ذوزنقه‌ای ساندویچی، شکل **۹** تغییرات فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیکی را بر حسب درصد وزنی نانو صفحات تقویت‌کننده در هر لایه، برای انواع توزیع نانو صفحات نشان می‌دهد. در این شکل مقادیر پارامترهای مختلف برابر $\alpha=30^\circ$ ،$\beta=5^\circ$ ،$a=b=1, h=\dfrac{a}{10}$ فرض شده است. همان‌طور که از شکل **۹** مشخص است، افزایش درصد وزنی نانو صفحات گرافن منجر به افزایش سفتی و استحکام بیشتر پانل می‌شود که فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیک و ناحیه پایدار پانل افزایش می‌یابند.

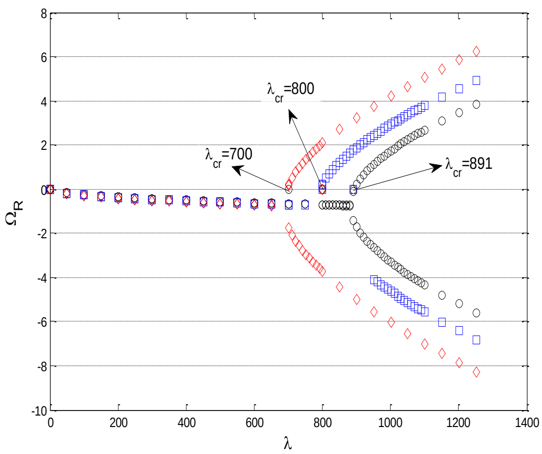


شکل ۹ - نمودار فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیک پانل ذوزنقه‌ای بر حسب درصد وزنی نانو صفحات گرافن به ازای توزیع‌های مختلف نانو صفحات

اثر دماهای مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیروالاستیک پانل ذوزنقه‌ای شکل در شکل **۱۰** به ازای پارامترهای $\alpha=30^\circ$ ،$\beta=5^\circ$ ،$a=b=1, h=\dfrac{a}{10}$ و FG- X نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشخص شده است، افزایش دما سبب کاهش سفتی سیستم می‌شود. ولی افزایش فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر آیرودینامیک بی‌بعد سیستم پیش‌بینی می‌شود. می‌توان مشاهده کرد که در دماهای۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ کلوین فشار بحرانی آیرودینامیک به ترتیب برابر ۸۹۱، ۸۰۰ و ۷۰۰ است.



(الف)



(ب)

شکل ۱۰ - تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک برای مقادیر مختلف از دما الف) قسمت موهومی ب) قسمت حقیقی

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، پانل ذورنقه‌ای ساخته شده از مواد پیشرفته برای دو جنس مواد هدفمند و ساندویچی تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن بررسی شده است. این پانل ساندویچی ذوزنقه‌ی شکل تحت تأثیر جریان مافوق صوت سیال قرار دارد. برای استخراج معادلات حاکم، از اصل همیلتون و با استفاده از تئوری‌های مرتبه بالا کانت به همراه تئوری پیستون استفاده شده است. سپس با روش عددیGDQ، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شدند. از مهم‌ترین نتایج تحقیق می‌توان به موارد ذیل اشاره نمود.

- با افزایش زاویه پانل نسبت به افق، فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیک بیشتری پیش‌بینی می‌شود. به‌بیان‌دیگر، این افزایش در زاویه پانل نسبت به افق پایداری سیستم را افزایش می‌دهد و پانل ذوزنقه‌ای دیرتر به مرز ناپایداری فلاتر می‌رسد.
- کاهش فشار بحرانی آیرودینامیکی به دلیل افزایش نسبت ابعاد پانل یکی دیگر از نکات قابل‌توجه بوده است. بنابراین، انتخاب پانل ذوزنقه‌ای با نسبت ضخامت به قاعده کمتر و زاویه بزرگ‌تر نسبت به افق یکی از راه‌های بهینه در بالا بردن پایداری چنین سیستم‌هایی است.
- فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر آیرودینامیک پانل با هندسه ذوزنقه با افزایش پارامتر n (توان ماده هدفمند)، افزایش می‌یابد.
- پانل ذوزنقه‌ای تقویت‌شده با نانو صفحات گرافنی از نوع توزیع *FG-X*، بیشترین فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیروالاستیک را دارا می‌باشد، درحالی‌که این سیستم از نوع توزیع *FG-O*، کمترین میزان فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر بحرانی آیروالاستیک را در بین چهار الگوی توزیع به خود اختصاص داده است.
- افزایش درصد وزنی نانو صفحات گرافن منجر به افزایش سفتی و استحکام بیشتر پانل می‌شود که فشار فلاتر بحرانی آیرودینامیک و ناحیه پایدار پانل افزایش می‌یابد.
- افزایش دما سبب کاهش سفتی سیستم و کاهش فرکانس‌های طبیعی و فشار فلاتر آیرودینامیک سیستم می‌شود.

فهرست علائم و اختصارات

طول پانل	a
عرض پانل	b
ماتریس میرایی	$[C]$
مدول الاستیک	$E(z)$
چگالی جرم	e_m
ممان اینرسی‌های جرم	$I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_6$
ماتریس ژاکوبین	$[\boldsymbol{J}]$
ماتریس سختی	$[\boldsymbol{K}]$
ارتفاع پانل ذوزنقه‌ای	L
برآیند گشتاورهای خمشی و پیچشی	M_{xx}, M_{xy}, M_{yy}
ماتریس جرم	$[\boldsymbol{M}]$
برآیند نیروهای درون‌صفحه‌ای	N_{xx}, N_{xy}, N_{yy}
برآیند تنش‌های مرتبه بالاتر	P_{xx}, P_{xy}, P_{yy}
برآیند نیروهای برون‌صفحه‌ای	Q_x, Q_y
ثوابت الاستیک تبدیل شده	Q_{ij}
برآیند تنش‌های مرتبه بالاتر	R_x, R_y
انرژی جنبشی پانل	T
انرژی کرنشی پانل	U
مؤلفه میدان جابجایی در راستای x	$u_x(x,y,z,t)$
مؤلفه میدان جابجایی در راستای y	$u_y(x,y,z,t)$
مؤلفه میدان جابجایی در راستای z	$u_z(x,y,z,t)$
مودهای تغییر شکل سطح مقطع عرضی مرتبه بالاتر	u_0^*, v_0^*, w_0^*
جابجایی درون صفحه‌ای در راستای y	$v(x,y,t)$
جابجایی عرضی صفحه میانی پانل	$w(x,y,t)$
زاویه پانل ذوزنقه‌ای نسبت به افق	α, β
عملگر گرادیان	$\vec{\nabla}$

مختصات تبدیل یافته در نگاشت پانل ذوزنقه‌ای	(ζ,η)
عملگر وریشن	δ
مؤلفه‌های برشی تانسور کرنش	γ_{ij}
چرخش نرمال حول محور- y	θ_x
چرخش نرمال حول محور- x	θ_y
مودهای تغییر شکل سطح مقطع عرضی مرتبه بالاتر	θ_z
مودهای تغییر شکل سطح مقطع عرضی مرتبه بالاتر	$\theta_x^*,\theta_y^*,\theta_z^*$
مؤلفه‌های تانسور کرنش	ε_{ij}
مؤلفه‌های تانسور تنش	σ_{ij}
چگالی جرم	$\rho(z)$
بیشترین مقدار چگالی جرم	ρ_1
چرخش خط عمود بر صفحه میانی پانل حول محور x	$\psi_x(x,y,t)$
چرخش خط عمود بر صفحه میانی پانل حول محور y	$\psi_y(x,y,t)$

پیوست

در این مقاله، با جایگذاری میدان‌های جابه‌جایی رابطه (۱) در معادلات کرنش- جابه‌جایی تئوری الاستیسیته کلاسیک، روابط زیر برای میدان‌های کرنش به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} + z\kappa_x + z^2\varepsilon_{x0}^* + z^3\kappa_x^* \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_{y0} + z\kappa_y + z^2\varepsilon_{y0}^* + z^3\kappa_y^* \\
\varepsilon_z &= \varepsilon_{z0} + z\kappa_z + z^2\varepsilon_{z0}^* + z^3\kappa_y^* \\
\gamma_{xy} &= \varepsilon_{xy0} + z\kappa_{xy} + z^2\varepsilon_{xy0}^* + z^3\kappa_{xy}^* \\
\gamma_{xz} &= \phi_x + z\kappa_{xz} + z^2\phi_x^* + z^3\kappa_{xz}^* \\
\gamma_{yz} &= \phi_y + z\kappa_{yz} + z^2\phi_y^* + z^3\kappa_{yz}^*
\end{aligned} \qquad \text{(الف-۱)}$$

که پارامترهای موجود در رابطه (الف-۱) به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\left(\varepsilon_{x0},\varepsilon_{y0},\varepsilon_{xy0}\right)=\left(\frac{\partial u_0}{\partial x},\frac{\partial v_0}{\partial y},\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\\
&\left(\varepsilon_{x0}^*,\varepsilon_{y0}^*,\varepsilon_{xy0}^*\right)=\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x},\frac{\partial v_0^*}{\partial y},\frac{\partial u_0^*}{\partial y}+\frac{\partial v_0^*}{\partial x}\right)\\
&(\varepsilon_{z0},\varepsilon_{z0}^*)=\left(\theta_z,3\theta_z^*\right)\\
&\left(\kappa_x,\kappa_y,\kappa_z,\kappa_{xy}\right)=\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x},\frac{\partial\theta_y}{\partial y},2w_0^*,\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\\
&(\kappa_x^*,\kappa_y^*,\kappa_{xy}^*)=(\frac{\partial\theta_x^*}{\partial x},\frac{\partial\theta_y^*}{\partial y},\frac{\partial\theta_x^*}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y^*}{\partial x})\\
&\left(\kappa_{xz},\kappa_{yz}\right)=\left(2u_0^*+\frac{\partial\theta_z}{\partial x},2v_0^*+\frac{\partial\theta_z}{\partial y}\right)\\
&\left(\kappa_{xz}^*,\kappa_{yz}^*\right)=\left(\frac{\partial\theta_z^*}{\partial x},\frac{\partial\theta_z^*}{\partial y}\right)\\
&\left(\phi_x,\phi_x^*,\phi_y,\phi_y^*\right)=(\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x},3\theta_x^*+\frac{\partial w_0^*}{\partial x},\\
&\qquad\theta_y+\frac{\partial w_0}{\partial y},3\theta_y^*+\frac{\partial w_0^*}{\partial y}
\end{aligned} \qquad \text{(الف-۲)}$$

می‌توان بیان کرد که انرژی پتانسیل کلی سیستم، شامل انرژی کرنش کلی ناشی از تغییر شکل‌ها و پتانسیل ناشی از بارهای خارجی می‌شود. با توجه به تئوری الاستیسیته کلاسیک می‌توان بیان کرد

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega}(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz})dzd\Omega\\
\delta U &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega}\{\sigma_x(\delta\varepsilon_{x0}+z\delta\kappa_x+z^2\delta\varepsilon_{x0}^*+z^3\delta\kappa_x^*)+\sigma_y(\delta\varepsilon_{y0}+z\delta\kappa_y+z^2\delta\varepsilon_{y0}^*\\
&+z^3\delta\kappa_y^*)+\sigma_z\left(\delta\varepsilon_{z0}+z\delta\kappa_z+z^2\delta\varepsilon_{z0}^*+z^3\delta\kappa_y^*\right)+\tau_{xy}(\delta\varepsilon_{xy0}+z\delta\kappa_{xy}+z^2\delta\varepsilon_{xy0}^*\\
&+z^3\delta\kappa_{xy}^*)+\tau_{yz}(\delta\phi_y+z\delta\kappa_{yz}+z^2\delta\phi_y^*+z^3\delta\kappa_{yz}^*)+\tau_{xz}(\delta\phi_x+z\delta\kappa_{xz}+z^2\delta\phi_x^*\\
&+z^3\delta\kappa_{xz}^*)\}dzd\Omega
\end{aligned} \qquad \text{(الف-۳)}$$

در ادامه تغییرات انرژی پتانسیل را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{\Omega}[N_x\delta\varepsilon_{x0}+M_x\delta\kappa_x+N_x^*\delta\varepsilon_{x0}^*+M_x^*\delta\kappa_x^*)+(N_y\delta\varepsilon_{y0}+M_y\delta\kappa_y+N_y^*\delta\varepsilon_{y0}^*\\
&+M_y^*\delta\kappa_y^*)+\left(N_z\delta\varepsilon_{z0}+M_z\delta\kappa_z+N_z^*\delta\varepsilon_{z0}^*+M_z^*\delta\kappa_y^*\right)+(N_{xy}\delta\varepsilon_{xy0}+M_{xy}\delta\kappa_{xy}\\
&+N_{xy}^*\delta\varepsilon_{xy0}^*+M_{xy}^*\delta\kappa_{xy}^*)+(Q_x\delta\phi_x+S_x\delta\kappa_{xz}+Q_x^*\delta\phi_x^*+S_x^*\delta\kappa_{xz}^*)+(Q_y\delta\phi_y\\
&+S_y\delta\kappa_{yz}+Q_y^*\delta\phi_y^*+S_y^*\delta\kappa_{yz}^*)\}d\Omega
\end{aligned} \qquad \text{(الف-۴)}$$

پس از انتگرال‌گیری جز به جز از رابطه مربوط به انرژی کرنش ذخیره شده در سیستم، که در بالا به آن اشاره شد، عبارت مربوط به انرژی کرنشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\delta U=-\int_{\Omega}&[\frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u_0+\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta\theta_x+\frac{\partial N_x^*}{\partial x}\delta u_0^*+\frac{\partial M_x^*}{\partial x}\delta\theta_x^*)+(\frac{\partial N_y}{\partial y}\delta v_0+\frac{\partial M_y}{\partial y}\delta\theta_y\\
&+\frac{\partial N_y^*}{\partial y}\delta v_0^*+\frac{\partial M_y^*}{\partial y}\delta\theta_y^*)+\left(-N_z\delta\varepsilon_{z0}-M_z\delta\kappa_z-N_z^*\delta\varepsilon_{z0}^*\right)+\{(\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\delta u_0\\
&+(\frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y}\delta\theta_x^*+\frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x}\delta\theta_y^*)\}+\{(-Q_x\delta\theta_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}\delta w_0)\\
&+(-2S_x\delta u_0^*+\frac{\partial S_x}{\partial x}\delta\theta_z)+(-3Q_x^*\delta\theta_x^*+\frac{\partial Q_x^*}{\partial x}\delta w_0^*+\frac{\partial S_x^*}{\partial x}\delta\theta_z^*)\}\\
&+\{(-Q_y\delta\theta_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\delta w_0)+(-2S_y\delta v_0^*+\frac{\partial S_y}{\partial y}\delta\theta_z)+(-3Q_y^*\delta\theta_y^*\\
&+\frac{\partial Q_y^*}{\partial y}\delta w_0^*+\frac{\partial S_y^*}{\partial y}\delta\theta_z^*)\}d\Omega
\end{aligned}
$$
(الف–۵)

رابطه بالا را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$
\begin{aligned}
\delta U=-\int_{\Gamma}&\{N_x\delta u_0n_x+M_x\delta\theta_xn_x+N_x^*\delta u_0^*n_x+M_x^*\delta\theta_x^*n_x\}+(N_y\delta v_0n_y\\
&+M_y\delta\theta_yn_y+N_y^*\delta v_0^*n_y+M_y^*\delta\theta_y^*n_y\}+\{(N_{xy}\delta u_0n_y+N_{xy}\delta v_0n_x)+(M_{xy}\delta\theta_xn_y\\
&+M_{xy}\delta\theta_yn_x)+\left(N_{xy}^*\delta u_0^*n_y+N_{xy}^*\delta v_0^*n_x\right)+(M_{xy}^*\delta\theta_x^*n_y+M_{xy}^*\delta\theta_y^*n_x)\}\\
&+\{(Q_x\delta w_0n_x+S_x\delta\theta_zn_x+Q_x^*\delta w_0^*n_x+S_x^*\delta\theta_z^*n_x)\}+\{(Q_y\delta w_0n_y+S_y\delta\theta_zn_y\\
&+Q_y^*\delta w_0^*n_y+S_y^*\delta\theta_z^*n_y)\}d\Omega
\end{aligned}
$$
(الف–۶)

تغییرات انرژی جنبشی پانل لمینیت ساندویچی به شکل زیر بیان می‌شود.

$$
\begin{aligned}
\delta K&=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega}\rho[\ddot{u}\delta u+\ddot{v}\delta v+\ddot{w}\delta w]d\Omega dz\\
\delta K&=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega}\rho[(\ddot{u}_0+z\ddot{\theta}_x+z^2\ddot{u}_0^*+z^3\ddot{\theta}_x^*)+(\delta u_0+z\delta\theta_x+z^2\delta u_0^*+z^3\delta\theta_x^*)]d\Omega dz\\
\delta K&=-\int_{\Omega}(I_1\ddot{u}_0\delta u_0+I_2\ddot{\theta}_x\delta u_0+I_3\ddot{u}_0^*\delta u_0+I_4\ddot{\theta}_x^*\delta u_0)+(I_2\ddot{u}_0\delta\theta_x+I_3\ddot{\theta}_x\delta\theta_x\\
&+I_4\ddot{u}_0^*\delta\theta_x+I_5\ddot{\theta}_x\delta\theta_x)+(I_3\ddot{u}_0\delta u_0^*+I_4\ddot{\theta}_x\delta u_0^*+I_5\ddot{u}_0^*\delta u_0^*+I_6\ddot{\theta}_x\delta u_0^*)+(I_4\ddot{u}_0\delta\theta_x^*\\
&+I_5\ddot{\theta}_x\delta\theta_x^*+I_6\ddot{u}_0^*\delta\theta_x^*+I_7\ddot{\theta}_x\delta\theta_x^*)
\end{aligned}
$$
(الف–۷)

در انرژی جنبشی I_1 ، I_2 ، I_3 ، I_4 ، I_5 ، I_6 و I_7 که نشان‌دهنده اینرسی‌های مربوط به سیستم هستند، از رابطه زیر به دست می‌آیند.

$$I_1,I_2,I_3,I_4,I_5,I_6,I_7=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho\left(1,z,z^2,z^3,z^4,z^5,z^6\right)dz$$

با قرار دادن تغییرات انرژی کرنش ذخیره‌شده و انرژی جنبشی سیستم در اصل همیلتون و با اعمال عوامل ریاضی، معادلات حاکم بر حرکت به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\delta u_0:\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_1\ddot{u}_0+I_2\ddot{\theta}_x+I_3\ddot{u}_0^*+I_4\ddot{\theta}_x^*\\
&\delta v_0:\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=I_1\ddot{v}_0+I_2\ddot{\theta}_y+I_3\ddot{v}_0^*+I_4\ddot{\theta}_y^*\\
&\delta w_0:\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+P_z^+=I_1\ddot{w}_0+I_2\ddot{\theta}_z+I_3\ddot{w}_0^*+I_4\ddot{\theta}_z^*\\
&\delta\theta_x:\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=I_2\ddot{u}_0+I_3\ddot{\theta}_x+I_4\ddot{u}_0^*+I_5\ddot{\theta}_x^*\\
&\delta\theta_y:\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=I_2\ddot{v}_0+I_3\ddot{\theta}_y+I_4\ddot{v}_0^*+I_5\ddot{\theta}_y^*\\
&\delta\theta_z:\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}-N_z+\frac{h}{2}(P_z^+)=I_2\ddot{w}_0+I_3\ddot{\theta}_z+I_4\ddot{w}_0^*+I_5\ddot{\theta}_z^*\\
&\delta u_0^*:\frac{\partial N_x^*}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y}-2S_x=I_3\ddot{u}_0+I_4\ddot{\theta}_x+I_5\ddot{u}_0^*+I_6\ddot{\theta}_x^*\\
&\delta v_0^*:\frac{\partial N_y^*}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x}-2S_y=I_3\ddot{v}_0+I_4\ddot{\theta}_y+I_5\ddot{v}_0^*+I_6\ddot{\theta}_y^*\\
&\delta w_0^*:\frac{\partial Q_x^*}{\partial x}+\frac{\partial Q_y^*}{\partial y}-2M_z^*+\frac{h^2}{4}(P_z^+)=I_3\ddot{w}_0+I_4\ddot{\theta}_z+I_5\ddot{w}_0^*+I_6\ddot{\theta}_z^*\\
&\delta\theta_x^*:\frac{\partial M_x^*}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y}-3Q_x^*=I_4\ddot{u}_0+I_5\ddot{\theta}_x+I_6\ddot{u}_0^*+I_7\ddot{\theta}_x^*\\
&\delta\theta_y^*:\frac{\partial M_y^*}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x}-3Q_y^*=I_4\ddot{v}_0+I_5\ddot{\theta}_y+I_6\ddot{v}_0^*+I_7\ddot{\theta}_y^*\\
&\delta\theta_z^*:\frac{\partial S_x^*}{\partial x}+\frac{\partial S_y^*}{\partial y}-3N_z^*+\frac{h^3}{8}(P_z^+)=I_4\ddot{w}_0+I_5\ddot{\theta}_z+I_6\ddot{w}_0^*+I_7\ddot{\theta}_z^*
\end{aligned}
$$
(الف–۸)

شرایط مرزی به دست آمده از اصل همیلتون را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد.

$$
\begin{aligned}
&(N_xn_x+N_{xy}n_y)\delta u_0=0\\
&(N_yn_y+N_{xy}n_x)\delta v_0=0\\
&(Q_yn_y+Q_xn_x)\delta w_0=0\\
&(M_xn_x+M_{xy}n_y)\delta\theta_x=0\\
&(M_yn_y+M_{xy}n_x)\delta\theta_y=0\\
&(S_xn_x+S_yn_y)\delta\theta_z=0\\
&(N_x^*n_x+N_{xy}^*n_y)\delta u_0^*=0\\
&(N_y^*n_y+N_{xy}^*n_x)\delta v_0^*=0\\
&(Q_x^*n_x+Q_y^*n_y)\delta w_0^*=0\\
&(M_x^*n_x+M_{xy}^*n_y)\delta\theta_x^*=0\\
&(M_y^*n_y+M_{xy}^*n_yx)\delta\theta_y^*=0
\end{aligned}
$$
(الف–۹)

که برای $x=0,a$:

$$
\begin{aligned}
&N_x=N_{xy}=Q_x=M_x=M_{xy}=S_x=0\\
&N_x^*=N_{xy}^*=Q_x^*=M_x^*=M_{xy}^*=S_x^*=0
\end{aligned}
$$
(الف–۱۰)

و برای $y=b$:

$$
\begin{aligned}
&N_y=N_{xy}=Q_y=M_y=M_{xy}=S_y=0\\
&N_y^*=N_{xy}^*=Q_y^*=M_y^*=M_{xy}^*=S_y^*=0
\end{aligned}
$$
(الف–۱۱)

در تمامی روابطی که در بالا ذکر شد، تنش‌های حاصل شده به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{bmatrix} M_x & M_x^* \\ M_y & M_y^* \\ M_z & 0 \\ M_{xy} & M_{xy}^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^{NL} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} z & z^3 \end{bmatrix} dz$$
(الف–۱۲)

و

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x^* \\ Q_y & Q_y^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^{NL} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z^2 \end{bmatrix} dz$$
(الف–۱۳)

و

$$\begin{bmatrix} N_x & N_x^* \\ N_y & N_y^* \\ N_z & N_z^* \\ N_{xy} & N_{xy}^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^{NL} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z^3 \end{bmatrix} dz$$
(الف–۱۴)

و

$$\begin{bmatrix} S_x & S_x^* \\ S_y & S_y^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^{NL} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} z & z^3 \end{bmatrix} dz$$
(الف–۱۵)

فرم نهایی این روابط به شکل زیر در می‌آید.

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q_{11}\left(\varepsilon_{x0} + z\kappa_x + z^2\varepsilon_{x0}^* + z^3\kappa_x^*\right) + Q_{12}(\varepsilon_{y0} + z\kappa_y$$
$$+z^2\varepsilon_{y0}^* + z^3\kappa_y^*) + Q_{13}(\varepsilon_{z0} + z\kappa_z + z^2\varepsilon_{z0}^*)]dz$$
$$N_x = \left(Q_{11}H_0\varepsilon_{x0} + Q_{11}H_1\kappa_x + Q_{11}H_2\varepsilon_{x0}^* + Q_{11}H_3\kappa_x^*\right) + (Q_{12}H_0\varepsilon_{y0} + Q_{12}H_1\kappa_y$$
$$+Q_{12}H_2\varepsilon_{y0}^* + Q_{12}H_3\kappa_y^*) + (Q_{13}H_0\varepsilon_{z0} + Q_{13}H_1\kappa_z + Q_{13}H_2\varepsilon_{z0}^*)$$
$$N_x^* = \left(Q_{11}H_2\varepsilon_{x0} + Q_{11}H_3\kappa_x + Q_{11}H_4\varepsilon_{x0}^* + Q_{11}H_5\kappa_x^*\right) + (Q_{12}H_2\varepsilon_{y0} + Q_{12}H_3\kappa_y$$
$$+Q_{12}H_4\varepsilon_{y0}^* + Q_{12}H_5\kappa_y^*) + (Q_{13}H_2\varepsilon_{z0} + Q_{13}H_3\kappa_z + Q_{13}H_4\varepsilon_{z0}^*)$$
$$M_x = \left(Q_{11}H_1\varepsilon_{x0} + Q_{11}H_2\kappa_x + Q_{11}H_3\varepsilon_{x0}^* + Q_{11}H_4\kappa_x^*\right) + (Q_{12}H_1\varepsilon_{y0} + Q_{12}H_2\kappa_y$$
$$+Q_{12}H_3\varepsilon_{y0}^* + Q_{12}H_4\kappa_y^*) + (Q_{13}H_1\varepsilon_{z0} + Q_{13}H_2\kappa_z + Q_{13}H_3\varepsilon_{z0}^*)$$
$$M_x^* = \left(Q_{11}H_3\varepsilon_{x0} + Q_{11}H_4\kappa_x + Q_{11}H_5\varepsilon_{x0}^* + Q_{11}H_6\kappa_x^*\right) + (Q_{12}H_3\varepsilon_{y0} + Q_{12}H_4\kappa_y$$
$$+Q_{12}H_5\varepsilon_{y0}^* + Q_{12}H_6\kappa_y^*) + (Q_{13}H_3\varepsilon_{z0} + Q_{13}H_4\kappa_z + Q_{13}H_5\varepsilon_{z0}^*)$$
(الف–۱۶)

و

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{12}\varepsilon_x + Q_{22}\varepsilon_y + Q_{23}\varepsilon_z)dz$$
$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q_{12}\left(\varepsilon_{x0} + z\kappa_x + z^2\varepsilon_{x0}^* + z^3\kappa_x^*\right) + Q_{22}(\varepsilon_{y0} + z\kappa_y + z^2\varepsilon_{y0}^* + z^3\kappa_y^*$$
$$+Q_{23}(\varepsilon_{z0} + z\kappa_z + z^2\varepsilon_{z0}^*)]dz$$
$$N_y = \left(Q_{12}H_0\varepsilon_{x0} + Q_{12}H_1\kappa_x + Q_{12}H_2\varepsilon_{x0}^* + Q_{12}H_3\kappa_x^*\right) + (Q_{22}H_0\varepsilon_{y0} + Q_{22}H_1\kappa_y$$
$$+Q_{22}H_2\varepsilon_{y0}^* + Q_{22}H_3\kappa_y^*) + (Q_{23}H_0\varepsilon_{z0} + Q_{23}H_1\kappa_z + Q_{23}H_2\varepsilon_{z0}^*)$$
$$N_y^* = \left(Q_{12}H_2\varepsilon_{x0} + Q_{12}H_3\kappa_x + Q_{12}H_4\varepsilon_{x0}^* + Q_{12}H_5\kappa_x^*\right) + (Q_{22}H_2\varepsilon_{y0} + Q_{22}H_3\kappa_y$$
$$+Q_{22}H_4\varepsilon_{y0}^* + Q_{22}H_5\kappa_y^*) + (Q_{23}H_2\varepsilon_{z0} + Q_{23}H_3\kappa_z + Q_{23}H_4\varepsilon_{z0}^*)$$
$$M_y = \left(Q_{12}H_1\varepsilon_{x0} + Q_{12}H_2\kappa_x + Q_{12}H_3\varepsilon_{x0}^* + Q_{12}H_4\kappa_x^*\right) + (Q_{22}H_1\varepsilon_{y0} + Q_{22}H_2\kappa_y$$
$$+Q_{22}H_3\varepsilon_{y0}^* + Q_{22}H_4\kappa_y^*) + (Q_{23}H_1\varepsilon_{z0} + Q_{23}H_2\kappa_z + Q_{23}H_3\varepsilon_{z0}^*)$$
$$M_y^* = \left(Q_{12}H_3\varepsilon_{x0} + Q_{12}H_4\kappa_x + Q_{12}H_5\varepsilon_{x0}^* + Q_{12}H_6\kappa_x^*\right) + (Q_{22}H_3\varepsilon_{y0} + Q_{22}H_4\kappa_y$$
$$+Q_{22}H_5\varepsilon_{y0}^* + Q_{22}H_6\kappa_y^*) + (Q_{23}H_3\varepsilon_{z0} + Q_{23}H_4\kappa_z + Q_{23}H_5\varepsilon_{z0}^*)$$
(الف–۱۷)

و

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44}\gamma_{xy} dz$$
$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44}(\varepsilon_{xy0} + z\kappa_{xy} + z^2\varepsilon_{xy0}^* + z^3\kappa_{xy}^*)dz$$
$$N_{xy} = Q_{44}H_0\varepsilon_{xy0} + Q_{44}H_1\kappa_{xy} + Q_{44}H_2\varepsilon_{xy0}^* + Q_{44}H_3\kappa_{xy}^*$$
$$N_{xy}^* = Q_{44}H_2\varepsilon_{xy0} + Q_{44}H_3\kappa_{xy} + Q_{44}H_4\varepsilon_{xy0}^* + Q_{44}H_5\kappa_{xy}^*$$
$$M_{xy} = Q_{44}H_1\varepsilon_{xy0} + Q_{44}H_2\kappa_{xy} + Q_{44}H_3\varepsilon_{xy0}^* + Q_{44}H_4\kappa_{xy}^*$$
$$M_{xy}^* = Q_{44}H_3\varepsilon_{xy0} + Q_{44}H_4\kappa_{xy} + Q_{44}H_5\varepsilon_{xy0}^* + Q_{44}H_6\kappa_{xy}^*$$
(الف–۱۸)

و

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66}\gamma_{xz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66}(\phi_x + z\kappa_{xz} + z^2\phi_x^* + z^3\kappa_{xz}^*)dz$$
$$Q_x = Q_{66}H_0\phi_x + Q_{66}H_1\kappa_{xz} + Q_{66}H_2\phi_x^* + Q_{66}H_3\kappa_{xz}^*$$
$$S_x = Q_{66}H_1\phi_x + Q_{66}H_2\kappa_{xz} + Q_{66}H_3\phi_x^* + Q_{66}H_4\kappa_{xz}^*$$
$$Q_x^* = Q_{66}H_2\phi_x + Q_{66}H_3\kappa_{xz} + Q_{66}H_4\phi_x^* + Q_{66}H_5\kappa_{xz}^*$$
$$S_x^* = Q_{66}H_3\phi_x + Q_{66}H_4\kappa_{xz} + Q_{66}H_5\phi_x^* + Q_{66}H_6\kappa_{xz}^*$$
(الف–۱۹)

و

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zy} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55}\gamma_{yz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55}(\phi_y + z\kappa_{yz} + z^2\phi_y^* + z^3\kappa_{yz}^*)dz$$
$$Q_y = Q_{55}H_0\phi_y + Q_{55}H_1\kappa_{yz} + Q_{55}H_2\phi_y^* + Q_{55}H_3\kappa_{yz}^*$$
$$S_y = Q_{55}H_1\phi_y + Q_{55}H_2\kappa_{yz} + Q_{55}H_3\phi_y^* + Q_{55}H_4\kappa_{yz}^*$$
$$Q_y^* = Q_{55}H_2\phi_y + Q_{55}H_3\kappa_{yz} + Q_{55}H_4\phi_y^* + Q_{55}H_5\kappa_{yz}^*$$
$$S_y^* = Q_{55}H_3\phi_y + Q_{55}H_4\kappa_{yz} + Q_{55}H_5\phi_y^* + Q_{55}H_6\kappa_{yz}^*$$
(الف–۲۰)

با جایگذاری روابط (الف–۱۶) تا (الف–۲۰) در معادلات حاکم بر حرکت، فرم نهایی این معادلات به‌صورت زیر در می‌آید.

$$\delta u_0 : \{(Q_{11}H_0\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{x0} + Q_{11}H_1\frac{\partial}{\partial x}\kappa_x + Q_{11}H_2\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{x0}^* + Q_{11}H_3\frac{\partial}{\partial x}\kappa_x^*)$$
$$+(Q_{12}H_0\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{y0} + Q_{12}H_1\frac{\partial}{\partial x}\kappa_y + Q_{12}H_2\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{y0}^* + Q_{12}H_3\frac{\partial}{\partial x}\kappa_y^*) + (Q_{13}H_0\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{z0}$$
$$+Q_{13}H_1\frac{\partial}{\partial x}\kappa_z + Q_{13}H_2\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{z0}^*)\} + \{Q_{44}H_0\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{xy0} + Q_{44}H_1\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{xy}$$
$$+Q_{44}H_2\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{xy0}^* + Q_{44}H_3\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{xy}^*\} = I_1\ddot{u}_0 + I_2\ddot{\theta}_x + I_3\ddot{u}_0^* + I_4\ddot{\theta}_x^*$$
(الف–۲۱)

و

$$\delta v_0 : \{\left(Q_{12}H_0\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{x0} + Q_{12}H_1\frac{\partial}{\partial y}\kappa_x + Q_{12}H_2\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{x0}^* + Q_{12}H_3\frac{\partial}{\partial y}\kappa_x^*\right)$$
$$+(Q_{22}H_0\varepsilon_{y0} + Q_{22}H_1\frac{\partial}{\partial y}\kappa_y + Q_{22}H_2\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{y0}^* + Q_{22}H_3\frac{\partial}{\partial y}\kappa_y^*) + (Q_{23}H_0\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{z0}$$
$$+Q_{23}H_1\frac{\partial}{\partial y}\kappa_z + Q_{23}H_2\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{z0}^*)\} + \{Q_{44}H_0\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{xy0} + Q_{44}H_1\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xy}$$
$$+Q_{44}H_2\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{xy0}^* + Q_{44}H_3\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xy}^*\} = I_1\ddot{v}_0 + I_2\ddot{\theta}_y + I_3\ddot{v}_0^* + I_4\ddot{\theta}_y^*$$
(الف–۲۲)

و

(الف-۲۳)
$$\begin{aligned}&\delta w_0:\{Q_{66}H_0\frac{\partial}{\partial x}\phi_x+Q_{66}H_1\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xz}+Q_{66}H_2\frac{\partial}{\partial x}\phi_x^*+Q_{66}H_3\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xz}^*\}\\&+\{Q_{55}H_0\frac{\partial}{\partial y}\phi_y+Q_{55}H_1\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{yz}+Q_{55}H_2\frac{\partial}{\partial y}\phi_y^*+Q_{55}H_3\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{yz}^*\}+P_z^+\\&=I_1\ddot{w}_0+I_2\ddot{\theta}_z+I_3\ddot{w}_0^*+I_4\ddot{\theta}_z^*\end{aligned}$$

و

(الف-۲۴)
$$\begin{aligned}&\delta\theta_x:\{(Q_{11}H_1\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{x0}+Q_{11}H_2\frac{\partial}{\partial x}\kappa_x+Q_{11}H_3\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{x0}^*+Q_{11}H_4\frac{\partial}{\partial x}\kappa_x^*)\\&+(Q_{12}H_1\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{y0}+Q_{12}H_2\frac{\partial}{\partial x}\kappa_y+Q_{12}H_3\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{y0}^*+Q_{12}H_4\frac{\partial}{\partial x}\kappa_y^*)+(Q_{13}H_1\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{z0}\\&+Q_{13}H_2\frac{\partial}{\partial x}\kappa_z+Q_{13}H_3\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{z0}^*))\}+\{Q_{44}H_1\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{xy0}+Q_{44}H_2\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{xy}\\&+Q_{44}H_3\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{xy0}^*+Q_{44}H_4\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{xy}^*\}-\{Q_{66}H_0\phi_x+Q_{66}H_1\kappa_{xz}+Q_{66}H_2\phi_x^*\\&+Q_{66}H_3\kappa_{xz}^*\}=I_2\ddot{u}_0+I_3\ddot{\theta}_x+I_4\ddot{u}_0^*+I_5\ddot{\theta}_x^*\end{aligned}$$

و

(الف-۲۵)
$$\begin{aligned}&\delta\theta_y:\{\left(Q_{12}H_1\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{x0}+Q_{12}H_2\frac{\partial}{\partial y}\kappa_x+Q_{12}H_3\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{x0}^*+Q_{12}H_4\frac{\partial}{\partial y}\kappa_x^*\right)\\&+(Q_{22}H_1\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{y0}+Q_{22}H_2\frac{\partial}{\partial y}\kappa_y+Q_{22}H_3\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{y0}^*+Q_{22}H_4\frac{\partial}{\partial y}\kappa_y^*)+(Q_{23}H_1\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{z0}\\&+Q_{23}H_2\frac{\partial}{\partial y}\kappa_z+Q_{23}H_3\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{z0}^*))\}+\{Q_{44}H_1\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{xy0}+Q_{44}H_2\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xy}\\&+Q_{44}H_3\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{xy0}^*+Q_{44}H_4\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xy}^*\}-\{Q_{55}H_0\phi_y+Q_{55}H_1\kappa_{yz}+Q_{55}H_2\phi_y^*\\&+Q_{55}H_3\kappa_{yz}^*\}=I_2\ddot{v}_0+I_3\ddot{\theta}_y+I_4\ddot{v}_0^*+I_5\ddot{\theta}_y^*\end{aligned}$$

و

(الف-۲۶)
$$\begin{aligned}&\delta\theta_z:\{Q_{66}H_1\frac{\partial}{\partial x}\phi_x+Q_{66}H_2\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xz}+Q_{66}H_3\frac{\partial}{\partial x}\phi_x^*+Q_{66}H_4\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xz}^*\}\\&+\{Q_{55}H_1\frac{\partial}{\partial y}\phi_y+Q_{55}H_2\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{yz}+Q_{55}H_3\frac{\partial}{\partial y}\phi_y^*+Q_{55}H_4\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{yz}^*\}\\&-\{\left(Q_{13}H_0\varepsilon_{x0}+Q_{13}H_1\kappa_x+Q_{13}H_2\varepsilon_{x0}^*+Q_{13}H_3\kappa_x^*\right)+(Q_{23}H_0\varepsilon_{y0}+Q_{23}H_1\kappa_y\\&+Q_{23}H_2\varepsilon_{y0}^*+Q_{23}H_3\kappa_y^*)+(Q_{33}H_0\varepsilon_{z0}+Q_{33}H_1\kappa_z+Q_{33}H_2\varepsilon_{z0}^*)\}+\frac{h}{2}(P_z^+)\\&=I_2\ddot{w}_0+I_3\ddot{\theta}_z+I_4\ddot{w}_0^*+I_5\ddot{\theta}_z^*\end{aligned}$$

شرایط مرزی متناظر به دست آمده از روابـط بـالا، در $x=0$ به شرح زیر می‌باشند.

(الف-۲۷)
$$\begin{aligned}&N_x=v_0=w_0=0\\&M_x=\theta_y=\theta_z=0\end{aligned}$$

همچنین، در ادامه روابط قبل خواهیم داشت

(الف-۲۸)
$$\begin{aligned}&\delta u_0^*:\{\left(Q_{11}H_2\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{x0}+Q_{11}H_3\frac{\partial}{\partial x}\kappa_x+Q_{11}H_4\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{x0}^*+Q_{11}H_5\frac{\partial}{\partial x}\kappa_x^*\right)\\&+(Q_{12}H_2\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{y0}+Q_{12}H_3\frac{\partial}{\partial x}\kappa_y+Q_{12}H_4\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{y0}^*+Q_{12}H_5\frac{\partial}{\partial x}\kappa_y^*)+(Q_{13}H_2\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{z0}\\&+Q_{13}H_3\frac{\partial}{\partial x}\kappa_z+Q_{13}H_4\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{z0}^*))\}+\{Q_{44}H_2\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{xy0}+Q_{44}H_3\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{xy}\\&+Q_{44}H_4\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{xy0}^*+Q_{44}H_5\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{xy}^*\}-2\{Q_{66}H_1\phi_x+Q_{66}H_2\kappa_{xz}+Q_{66}H_3\phi_x^*\\&+Q_{66}H_4\kappa_{xz}^*\}=I_3\ddot{u}_0+I_4\ddot{\theta}_x+I_5\ddot{u}_0^*+I_6\ddot{\theta}_x^*\end{aligned}$$

و

(الف-۲۹)
$$\begin{aligned}&\delta v_0^*:\{(Q_{12}H_2\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{x0}+Q_{12}H_3\frac{\partial}{\partial y}\kappa_x+Q_{12}H_4\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{x0}^*+Q_{12}H_5\frac{\partial}{\partial y}\kappa_x^*)\\&+(Q_{22}H_2\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{y0}+Q_{22}H_3\frac{\partial}{\partial y}\kappa_y+Q_{22}H_4\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{y0}^*+Q_{22}H_5\frac{\partial}{\partial y}\kappa_y^*)+(Q_{23}H_2\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{z0}\\&+Q_{23}H_3\frac{\partial}{\partial y}\kappa_z+Q_{23}H_4\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{z0}^*)+\{Q_{44}H_2\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{xy0}+Q_{44}H_3\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xy}\\&+Q_{44}H_4\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{xy0}^*+Q_{44}H_5\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xy}^*\}-2\{Q_{55}H_1\phi_y+Q_{55}H_2\kappa_{yz}+Q_{55}H_3\phi_y^*\\&+Q_{55}H_4\kappa_{yz}^*\}=I_3\ddot{v}_0+I_4\ddot{\theta}_y+I_5\ddot{v}_0^*+I_6\ddot{\theta}_y^*\end{aligned}$$

و

(الف-۳۰)
$$\begin{aligned}&\delta w_0^*:\left\{Q_{66}H_2\frac{\partial}{\partial x}\phi_x+Q_{66}H_3\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xz}+Q_{66}H_4\frac{\partial}{\partial x}\phi_x^*+Q_{66}H_5\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xz}^*\right\}\\&+\{Q_{55}H_2\frac{\partial}{\partial y}\phi_y+Q_{55}H_3\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{yz}+Q_{55}H_4\frac{\partial}{\partial y}\phi_y^*+Q_{55}H_5\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{yz}^*\}-2\{(Q_{13}H_3\varepsilon_{x0}\\&+Q_{13}H_4\kappa_x+Q_{13}H_5\varepsilon_{x0}^*+Q_{13}H_6\kappa_x^*)+(Q_{23}H_3\varepsilon_{y0}+Q_{23}H_4\kappa_y+Q_{23}H_5\varepsilon_{y0}^*\\&+Q_{23}H_6\kappa_y^*)+(Q_{33}H_3\varepsilon_{z0}+Q_{33}H_4\kappa_z+Q_{33}H_5\varepsilon_{z0}^*)\}+\frac{h^2}{4}(P_z^+)\\&=I_3\ddot{w}_0+I_4\ddot{\theta}_z+I_5\ddot{w}_0^*+I_6\ddot{\theta}_z^*\end{aligned}$$

و

(الف-۳۱)
$$\begin{aligned}&\delta\theta_x^*:\{\left(Q_{11}H_3\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{x0}+Q_{11}H_4\frac{\partial}{\partial x}\kappa_x+Q_{11}H_5\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{x0}^*+Q_{11}H_6\frac{\partial}{\partial x}\kappa_x^*\right)\\&+(Q_{12}H_3\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{y0}+Q_{12}H_4\frac{\partial}{\partial x}\kappa_y+Q_{12}H_5\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{y0}^*+Q_{12}H_6\frac{\partial}{\partial x}\kappa_y^*)+(Q_{13}H_3\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{z0}\\&+Q_{13}H_4\frac{\partial}{\partial x}\kappa_z+Q_{13}H_5\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{z0}^*))\}+\{Q_{44}H_3\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{xy0}+Q_{44}H_4\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{xy}\\&+Q_{44}H_5\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{xy0}^*+Q_{44}H_6\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{xy}^*\}-3\{Q_{66}H_2\phi_x+Q_{66}H_3\kappa_{xz}+Q_{66}H_4\phi_x^*\\&+Q_{66}H_5\kappa_{xz}^*\}=I_4\ddot{u}_0+I_5\ddot{\theta}_x+I_6\ddot{u}_0^*+I_7\ddot{\theta}_x^*\end{aligned}$$

و

(الف-۳۲)
$$\begin{aligned}&\delta\theta_y^*:\{(Q_{12}H_3\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{x0}+Q_{12}H_4\frac{\partial}{\partial y}\kappa_x+Q_{12}H_5\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{x0}^*+Q_{12}H_6\frac{\partial}{\partial y}\kappa_x^*)\\&+(Q_{22}H_3\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{y0}+Q_{22}H_4\frac{\partial}{\partial y}\kappa_y+Q_{22}H_5\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{y0}^*+Q_{22}H_6\frac{\partial}{\partial y}\kappa_y^*)+(Q_{23}H_3\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{z0}\\&+Q_{23}H_4\frac{\partial}{\partial y}\kappa_z+Q_{23}H_5\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_{z0}^*))\}+\{Q_{44}H_3\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{xy0}+Q_{44}H_4\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xy}\\&+Q_{44}H_5\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_{xy0}^*+Q_{44}H_6\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xy}^*\}-3\{Q_{55}H_2\phi_y+Q_{55}H_3\kappa_{yz}+Q_{55}H_4\phi_y^*\\&+Q_{55}H_5\kappa_{yz}^*\}=I_4\ddot{v}_0+I_5\ddot{\theta}_y+I_6\ddot{v}_0^*+I_7\ddot{\theta}_y^*\end{aligned}$$

و در نهایت خواهیم داشت:

(الف-۳۳)
$$\begin{aligned}&\delta\theta_z^*:\left\{Q_{66}H_3\frac{\partial}{\partial x}\phi_x+Q_{66}H_4\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xz}+Q_{66}H_5\frac{\partial}{\partial x}\phi_x^*+Q_{66}H_6\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{xz}^*\right\}\\&+\{Q_{55}H_3\frac{\partial}{\partial y}\phi_y+Q_{55}H_4\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{yz}+Q_{55}H_5\frac{\partial}{\partial y}\phi_y^*+Q_{55}H_6\frac{\partial}{\partial y}\kappa_{yz}^*\}-3\{(Q_{13}H_2\varepsilon_{x0}\\&+Q_{13}H_3\kappa_x+Q_{13}H_4\varepsilon_{x0}^*+Q_{13}H_5\kappa_x^*)+(Q_{23}H_2\varepsilon_{y0}+Q_{23}H_3\kappa_y+Q_{23}H_4\varepsilon_{y0}^*\\&+Q_{23}H_5\kappa_y^*)+(Q_{33}H_2\varepsilon_{z0}+Q_{33}H_3\kappa_z+Q_{33}H_4\varepsilon_{z0}^*)\}+\frac{h^3}{8}(P_z^+)\\&=I_4\ddot{w}_0+I_5\ddot{\theta}_z+I_6\ddot{w}_0^*+I_7\ddot{\theta}_z^*\end{aligned}$$

این در حالی است که شرایط مرزی به دست آمده از روابط بـالا به شکل زیر بیان می‌شوند

(الف-۳۴)
$$\begin{aligned}&At\ x=0,a:\\&v_0=N_x=w_0=\theta_y=M_x=\theta_z=0\\&v_0^*=N_x^*=w_0^*=\theta_y^*=M_x^*=\theta_z^*=0\\&At\ y=0,b:\end{aligned}$$

$$u_0 = N_y = w_0 = \theta_x = M_y = \theta_z = 0$$
$$u_0^* = N_y^* = w_0^* = \theta_x^* = M_y^* = \theta_z^* = 0$$

پی‌نوشت‌ها

۱ Kant and Manjunatha
۲ Manjunatha and Kant
۳ Marur and Kant
۴ Romero et al.

منابع و مراجع

[1]. Jafari, N., Azhari, M., *"Stability analysis of arbitrarily shaped moderately thick viscoelastic plates using Laplace–Carson transformation and a simple hp cloud method"*, Mechanics of Time-Dependent Materials, Vol. 21, No. 3, pp.365-381, 2017.

[2]. Jaberzadeh, E., Azhari, M., Boroomand, B., *"Thermal buckling of functionally graded skew and trapezoidal plates with different boundary conditions using the element-free Galerkin method"*, European Journal of Mechanics-A/Solids, Vol. 42, pp.18-26, 2013.

[3]. Najarzadeh, L., Movahedian, B., Azhari, M., *"Stability analysis of the thin plates with arbitrary shapes subjected to non-uniform stress fields using boundary element and radial integration methods"*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 87, pp.111-121, 2018.

[4]. Zhao, Z., Feng, C., Wang, Y., Yang, J., *"Bending and vibration analysis of functionally graded trapezoidal nanocomposite plates reinforced with graphene nanoplatelets (GPLs)"*, Composite Structures. Vol. 180, pp. 799-808, 2017.

[5]. Torabi, K., Afshari, H., *''Vibration analysis of a cantilevered trapezoidal moderately thick plate with variable thickness''*, Engineering Solid Mechanics, Vol. 5, No. 1, pp.71-92, 2017.

[6]. Zamani, M., Fallah, A., Aghdam, M., *"Free vibration analysis of moderately thick trapezoidal symmetrically laminated plates with various combinations of boundary conditions"*, European Journal of Mechanics-A/Solids, Vol. 36, pp. 204-21, 2012.

[7]. Shokrollahi, S., Shafaghat, S., *"A global Ritz formulation for the free vibration analysis of hybrid metal-composite thick trapezoidal plates"*, Scientia Iranica, Vol. 23, No. 1, pp. 249-59, 2016.

[8]. Mania, R., *"Buckling analysis of trapezoidal composite sandwich plate subjected to in-plane compression"*, Composite Structures, Vol. 69, No. 4, pp. 482-490, 2005.

[9]. Hildebrand, F., Reissner, E., Thomas, G., *"Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells"*, 1949.

[10]. Kant, T., Owen, D., Zienkiewicz, O., *"A refined higher-order C plate bending element"*, Computers & structures, Vol. 15, No. 2, pp.177-183,1982.

[11]. Pandya, B., Kant, T., *"A consistent refined theory for flexure of a symmetric laminate"*, Mechanics research communications, Vol. 14, No. 2, pp. 107-113, 1987.

[12]. Pandya, B., Kant, T., *"Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates—finite element evaluations"*, international Journal of Solids and Structures, Vol. 24, No. 12, pp. 1267-1286, 1988.

[13]. Pandya, B., Kant, T., *"Flexural analysis of laminated composites using refined higher-order C° plate bending elements"*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 66, No. 2, pp. 173-198, 1988.

[14]. Pandya, B., Kant, T., *"A refined higher-order generally orthotropic C0 plate bending element"*, Computers & structures, Vol. 28, No. 2, pp. 119-133, 1988.

[15]. Pandya, B., Kant, T., *"Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model"*, Composites Science and Technology, Vol. 32, No. 2, pp. 137-155, 1988.

[16]. Kant, T., Manjunatha, B., *"An unsymmetric FRC laminate C° finite element model with 12 degrees of freedom per node"*, Engineering Computations: Int J for Computer-Aided Engineering, Vol. 5, No. 4, pp. 300-308, 1993.

[17]. Kant, T., Manjunatha, B., *"On accurate estimation of transverse stresses in multilayer laminates"*, Computers & structures, Vol. 50, No. 3, pp. 351-365, 1994.

[18]. Manjunatha, B., Kant, T., *"A comparison of 9 and 16 node quadrilateral elements based on higher-order laminate theories for estimation of transverse stresses"*, Journal of reinforced plastics and composites, Vol. 11, No. 9, pp. 968-1002, 1992.

[19]. Kant, T., *''Free vibration of symmetrically laminated plates using a higher- order theory with finite element technique''*, International journal for numerical methods in engineering, Vol. 28, No. 8, pp. 1875-89, 1989.

[20]. Kant, T., Gupta, A., *"A finite element model for a higher-order shear-deformable beam theory"*,

Journal of sound and vibration, Vol. 125, No. 2, pp. 193-202, 1988.

[21]. Kant, T., Marur, S., Rao, G., *"Analytical solution to the dynamic analysis of laminated beams using higher order refined theory",* Composite Structures, Vol. 40, No. 1, pp. 1-9, 1997.

[22]. Marur, S., Kant, T., *"Free vibration analysis of fiber reinforced composite beams using higher order theories and finite element modelling",* Journal of sound and vibration, Vol. 194, No. 3, pp. 337-351, 1996.

[23]. Reddy, J.N., *"A simple higher-order theory for laminated composite plates",* Journal of applied mechanics, Vol. 51, No. 4, pp. 745-75, 1984.

[24]. Reddy, J., Phan, N., *"Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory",* Journal of sound and vibration, Vol. 98, No. 2, pp.157-170, 1985.

[25]. Noor, A.K., Burton, W.S., *"Assessment of shear deformation theories for multilayered",* composite plates, 1989.

[26]. Punera, D., Kant, T., *"Free vibration of functionally graded open cylindrical shells based on several refined higher order displacement models",* Thin-Walled Structures, Vol. 119, pp. 707-726, 2017.

[27]. Punera, D., Kant, T., *"Elastostatics of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with two refined higher order models",* Composite Structures, Vol. 182, pp. 505-52, 2017.

[۲۸]. پورموید، علیرضا، ملک‌زاده فرد، کرامت، شهروی، مرتضی، " تحلیل فلاتر پانل ساندویچی استوانه‌ای تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده با استفاده از روش تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته"، نشریه علمی پژوهشی مهندسی هوانوردی، دوره ۲۰، شماره ۱، صفحات ۶۱-۴۹، ۱۳۹۷.

[29]. Kitipornchai, S., Chen, D., Yang, J., *"Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets",* Materials & Design, Vol. 116, pp.656-665, 2017.

[۳۰]. کرانیان، سیدعیسی، اسماعیل‌زاده خادم، سیامک، کوکبی، مهرداد، " تحلیل ارتعاشات اجباری صفحه نانو کامپوزیت ویسکوالاستیک تقویت‌شده با نانو لوله‌های کربنی"، سومین همایش ملی تکنولوژی‌های نوین در شیمی، پتروشیمی و نانو ایران، دانشگاه شهید بهشتی تهران، ۲۲ و ۲۳ خرداد، ۱۳۹۲.

[31]. Reddy, J.N., *"Energy and variational methods in applied mechanics: with an introduction to the finite element method",* Wiley New York, 1984.

[32]. Afshari, H., Torabi, K., *"A Parametric Study on Flutter Analysis of Cantilevered Trapezoidal FG Sandwich Plates"*, AUT Journal of Mechanical Engineering , Vol. 1, pp. 191-210, 2017.

[33]. Romero, G., Alvarez, L., Alanís, E., Nallim, L., Grossi, R., *"Study of a vibrating plate: comparison between experimental (ESPI) and analytical results", Optics and lasers in engineering*, Vol. 40, pp. 81-90, 2003.

[34]. Allahverdizadeh, A., Naei, M., Bahrami, M.N., *"Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates",* Journal of sound and vibration, Vol. 310, No. 4-5, pp. 966-984, 2008.

[35]. Kiani, Y., Mirzaei, M., *"Enhancement of non-linear thermal stability of temperature dependent laminated beams with graphene reinforcements",* Composite Structures, Vol. 186, pp. 114-122, 2018.

[36]. Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M., *"Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method",* Journal of Sound and Vibration, Vol. 319, pp. 918–939, 2009.