

تحلیل ارتعاشی و کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده طولی با شرایط مرزی مختلف تحت بار محوری استاتیکی

نوری، علی^{1*}، آستراکی، سهراب²
1- استادیار دانشگاه هوایی شهید ستاری
1- استادیار دانشگاه هوایی شهید ستاری
(دریافت مقاله: 1397/08/25 تاریخ پذیرش: 1398/07/15)

چکیده

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده طولی (استرینگر) به روش تحلیلی با هشت نوع مختلف تکیه گاه ساده و تکیه گاه گیردار مورد بررسی قرار گرفته است. در حل تحلیلی از روش ریتز استفاده شده و تقویت کننده‌ها بصورت المانهایی مجزا در نظر گرفته شده‌اند. در برخی از حالت‌ها، پوسته تقویت شده در جهت محوری تحت بار استاتیکی فشاری قرار گرفته است و تکیه گاه‌ها به صورت متحرک محوری همراه با بار می‌باشند. نتایج تحلیلی فرکانس‌های طبیعی با مقادیر تجربی و تحلیلی موجود در مراجع دیگر مقایسه شده است که مطابقت بسیار خوبی مشاهده شده است. به علاوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی، فرکانس پایه و شکل مودهای طبیعی به ازای شرایط مرزی پیش گفته مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است و در برخی حالت‌ها نتایج به دست آمده با نتایج روش المان محدود مقایسه شده است. همچنین اثر خارج از مرکزی تقویت کننده‌ها بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی خصوصاً فرکانس پایه مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان اثر بارگذاری فشاری استاتیکی محوری و شرایط مرزی بر فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفته و بار کمانش آنها نیز تعیین گردید.

واژه‌های کلیدی: پوسته استوانه‌ای، تقویت کننده طولی، ارتعاش آزاد، فرکانس طبیعی، کمانش، بار محوری

Vibration and buckling analysis of longitudinally stiffened cylindrical shells under the axial static loading

A. Nouri¹, S. Astaraki²

Abstract

In this research, the free vibration analysis of cylindrical shells with longitudinal stiffeners, i.e. stringer with analytical method, for eight different types of simply supported and clamped boundary conditions is investigated. Ritz method is applied in analytical solution while stiffeners treated as discrete elements. The stiffened shell is loaded axially under static pressure and supports are axially follower force type. Some analytical results for natural frequencies are compared with other's experimental and analytical results, which showed good agreement. Furthermore, variations of natural frequencies, fundamental frequency and natural mode shapes for mentioned boundary conditions are studied and in some cases, these results are compared with FEM results. Also, the effect of stiffener eccentricity on natural frequencies, especially fundamental frequency is considered. Furthermore, variations of natural frequencies for different axial static pressure load are considered and with plot of these, the buckling load is determined.

Key words: Cylindrical Shell, Longitudinal Stiffener, Free Vibration, Natural Frequency, Buckling, Axial load.

مقدمه

شناخت خواص دینامیکی سازه‌های پوسته‌ای از مسائل مورد توجه طراحان می‌باشد، زیرا چنین سازه‌هایی کاربردهای زیادی از جمله در بدنه هواپیماها و موشکها دارند. در اکثر این موارد پوسته تحت بارهای دینامیکی قرار دارد و ممکن است دچار ارتعاش، کماتش و خستگی شود. فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی، از موارد مهم و قابل توجه در طراحی این نوع سازه‌ها است. یکی از راه‌های افزایش نسبت استحکام به وزن در چنین سازه‌هایی، تقویت پوسته با تقویت کننده طولی بشکل تیر می‌باشد. همچنین در سازه‌هایی که تحت بار فشاری قرار دارند بار کماتش نیز یکی دیگر از پارامترهای تعیین کننده می‌باشد. نمونه عملی چنین سازه‌های می‌توان بدنه موشک را نام برد که پوسته استوانه‌ای تقویت شده بوده و تحت نیروی محوری رانش موتور و نیروی پسای آیرودینامیکی قرار دارد.

سندرز [1]، معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای نازک را ارائه نمود. ایگل و سیوال [2]، اثر تقویت کننده‌ها بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده با استرینگر (تقویت کننده طولی) و رینگ (تقویت کننده محیطی)، با شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار دادند. تقویت کننده‌ها بصورت المانهایی مجزا در نظر گرفته شده و از روش انرژی و اصل همپلتون برای بدست آوردن معادلات حرکت استفاده شده است. راینهارت و ونگ [3]، ارتعاشات آزاد پوسته تقویت شده با استرینگر با تکیه گاه ساده را از روش لاگرانژ مورد بررسی قرار دادند و استرینگرها را بصورت المانهایی مجزا مدل نمودند. مصطفی و علی [4]، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده با رینگ و استرینگر و با تکیه‌گاه ساده را با کاربرد روش ریلی ریتز و استفاده از مدلسازی گسسته انجام دادند. همچنین زاهو و لی [5]، آنالیز ارتعاشی پوسته استوانه‌ای چند لایه دوار با تکیه گاه ساده و تقویت کننده‌های طولی و محیطی را با استفاده از روش انرژی انجام دادند. اثر تقویت کننده‌ها به دو نوع متوسط‌گیری و روش المان مجزا مدلسازی شدند. روتولو [6] تئوریهای پوسته‌های جدار نازک برای استفاده در آنالیزهای دینامیکی پوسته‌های تقویت شده را مورد مقایسه قرار داد و نشان داد که هرچه فاصله‌ی بین رینگ‌های تقویت کننده زیاد شود، یا طول موج ارتعاشات کوچکتر از این فاصله‌ها شود در این صورت دیگر تعیین مشخصه‌های دینامیکی پوسته‌ی تقویت شده دارای دقت کمتری بوده و بنابراین برای یک مدل کلی‌تر رینگ‌های تقویت‌کننده باید مثل المان‌های گسسته رفتار کنند.

مصطفی و همکاران [7] با استفاده از روش انرژی به تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده پرداختند و نتایج بدست آمده را با نتایج دیگر محققان مورد مقایسه قرار دادند. آن‌ها در این روش تنها فرض کردند که توابع جابجایی، شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را ارضا

می‌کنند. پان و همکاران [8] ارتعاشات پوسته‌های تقویت شده با رینگ و با شرایط مرزی دلخواه را مورد مطالعه قرار دادند. در تحقیق انجام شده توسط آنها، جابجاییهای پوسته بر حسب توابع مثلثاتی بیان گردید و تکیه‌گاه‌های دو انتها به صورت دیافراگم برشی در نظر گرفتند. صادقی‌فر و همکاران [9]، بهینه‌سازی پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت کننده‌های محیطی و طولی را انجام دادند. آنها برای تحلیل از روش ریتز استفاده کرده و شکل‌های مختلف مقطع تقویت کننده‌ها را مورد بررسی قرار دادند. جعفری و همکاران [10] با بکارگیری روش ریلی ریتز بر مبنای انرژی، اثر سرعت و تقویت کننده‌ها را بر روی ارتعاشات روتورهای کامپوزیتی را با استفاده از تئوری ساندروز مورد بررسی قرار دادند. آنها در بدست آوردن معادلات حرکت پوسته، اثرات نیروی محیطی اولیه، نیرویهای گریز از مرکز و کریولیس ایجاد شده ناشی از چرخش پوسته را مد نظر قرار دادند. ژیانگ و همکاران [11]، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای به استفاده از روش موجک انجام دادند. آنها توابع جابجایی را بر اساس سری فوریه در نظر گرفتند. پاسح دینامیکی و ارتعاشات آزاد پوسته تقویت شده با انحنای سهموی با استفاده از روش انرژی توسط عدالت و همکاران مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. آنها از پوسته تقویت نشده معادل، برای پیش‌بینی مشخصه‌های دینامیکی پوسته تقویت شده استفاده نمودند [12]. هیون و مون [13]، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای را با استفاده از روش ریلی ریتز و بر اساس تئوری‌های مختلف پوسته بررسی نمودند. نقاش و همکاران [14]، ارتعاشات آزاد پوسته با شکل دلخواه و با ضخامت متغیر که با استرینگرهایی تقویت شده است را به روش نوار محدود تحلیل نمودند. آنها از چندجمله‌ای لاگرانژ برای توابع جابجایی استفاده نمودند و تقویت کننده‌ها را به صورت المان‌های مجزا در نظر گرفتند.

در این مقاله، ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده طولی برای تکیه گاه ساده و گیردار تحت بار محوری استاتیکی فشاری به روش تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده برای فرکانس‌های طبیعی با نتایج تحلیلی و تجربی مراجع دیگر مورد مقایسه قرار گرفته و اعتبار سنجی شده است. همچنین با توجه به اینکه در کارهای انجام شده توسط دیگر محققین، شرایط مرزی تکیه گاه ساده و گیردار صرفاً به صورت صفر بودن جابجایی‌ها و شیب‌ها در نظر گرفته شده اند، برای اولین بار برای هر کدام از شرایط مرزی پیش گفته 4 نوع مختلف قیدهای هندسی معرفی و مورد تحلیل قرار گرفته است و نتایج تغییرات فرکانس‌های طبیعی، فرکانس پایه و تغییر در شکل مدهای طبیعی آنها با هم مورد مقایسه قرار گرفته است. همچنین دقت روش تحلیلی و محدودیت آن در استخراج مدهای متقارن و نامتقارن محیطی با استفاده از

با صرف نظر کردن از اینرسی چرخشی بخاطر نازک بودن پوسته، انرژی جنبشی پوسته بدون در نظر گرفتن تقویت کننده بر طبق رابطه زیر می‌باشد:

$$T = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \rho h \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} R d\theta dx \quad (2)$$

انرژی استرینگر

برای انرژی کرنشی استرینگر z ام با در نظر گرفتن اثرات کشش، خمش دو محوری و پیچش می‌توان نوشت:

$$U_{s_j} = \frac{E s_j}{2} \int_0^L \left[A s_j \left(\frac{\partial u_{s_j}}{\partial x} \right)^2 + I_{y s_j} \left(\frac{\partial^2 w_{s_j}}{\partial x^2} \right)^2 + I_{z s_j} \left(\frac{\partial^2 v_{s_j}}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx + \frac{G s_j}{2R^2} \int_0^L J s_j \left(\frac{\partial^2 w_{s_j}}{\partial x \partial \theta} \right)^2 dx \quad (3)$$

همچنین انرژی جنبشی استرینگر z ام با در نظر گرفتن اینرسی‌های انتقالی در سه جهت و اینرسی دورانی حول دو محور، عبارتست از:

$$T_{s_j} = \frac{1}{2} \rho s_j \int_0^L \left\{ A s_j \left[\left(\frac{\partial u_{s_j}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{s_j}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{s_j}}{\partial t} \right)^2 \right] + (I_{y s_j} + I_{z s_j}) \left(\frac{\partial^2 w_{s_j}}{\partial t \partial x} \right)^2 \right\} dx \quad (4)$$

انرژی فشار خارجی

انرژی پتانسیل فشار یکنواخت محوری p را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$V_p = -\frac{p}{4} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 R^2 d\theta dx \quad (5)$$

روابط هندسی موجود بین تغییر مکانهای مرکز سطح استرینگر z ام $(u_{s_j}, v_{s_j}, w_{s_j})$ با تغییر مکانهای متناظر سطح میانی پوسته (u, v, w) بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} u_{s_j} &= u + e s_j \frac{\partial w}{\partial x} \\ v_{s_j} &= v \left(1 + \frac{e s_j}{R} \right) + \frac{e s_j}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (6)$$

$w_{s_j} = w$
خارج از مرکزی هر استرینگر بصورت زیر تعریف می‌شود:

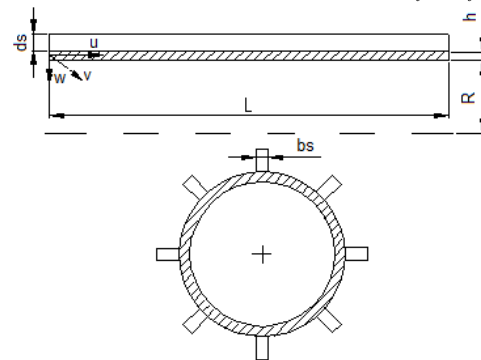
$$e s_j = \pm \frac{h + d s_j}{2} \quad (7)$$

که علامت مثبت و منفی به ترتیب برای استرینگر بیرونی و داخلی به کار می‌رود. با جایگذاری روابط (6) و (7) در معادلات انرژی تقویت کننده (معادلات 3 و 4) می‌توان، انرژی تقویت

روش المان محدود نیز مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی در حالت بارگذاری محوری فشاری استاتیکی بررسی شده و با رسم نمودار تغییرات آنها، بار کماتش نیز تعیین گردید که در مقایسه با مراجع دیگر از دقت بسیار خوبی برخوردار بود. همچنین اثر تقویت بیرونی و داخلی و اثر خارج از مرکزی تقویت کننده‌ها بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است.

روابط تنوری

هدف بدست آوردن معادلات حرکت برای یک پوسته استوانه‌ای نازک مطابق شکل (1)، با ضخامت یکنواخت h ، شعاع R ، طول L ، دانسیته جرمی ρ ، مدول الاستیسیته E ، نسبت پواسون ν و مدول برشی $G = E/2(1+\nu)$ می‌باشد. این پوسته با تعداد S استرینگر که به فواصل یکسان از همدیگر قرار گرفته‌اند، تقویت شده است. استرینگر z ام دارای عرض ثابت $b s_j$ و ارتفاع ثابت $d s_j$ می‌باشد. هر کدام از تقویت کننده‌ها می‌توانند دارای جنس‌های مختلف و حتی متفاوت با پوسته باشند. نسبت پواسون، مدول برشی، مدول الاستیسیته و دانسیته جرمی استرینگر z ام بترتیب با پارامترهای $\rho s_j, E s_j, G s_j, \nu s_j$ مشخص شده‌اند.



شکل 1- پوسته استوانه‌ای تقویت شده طولی

انرژی پوسته

بر اساس تئوری پوسته نازک سندرز [1]، انرژی کرنشی خمشی و کششی پوسته بدون در نظر گرفتن تقویت کننده‌ها را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} U_\epsilon &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{E h}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)^2 \right] \right. \\ &+ \frac{2\nu}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \left. \right\} \\ &+ \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{R^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{2\nu}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\left. \left. + \frac{2(1-\nu)}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{3}{4} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{4R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} R d\theta dx \quad (1) \end{aligned}$$

افزایش تعداد جملات سری (NS)، همگرایی تغییر مکانهای تقریبی بیشتر خواهد شد.

معادلات حرکت

با استفاده از روش ریتز (مینیم کردن تابع انرژی نسبت به ضرایب توابع ریتز)، معادلات حرکت بدست می آیند. با حل این معادلات، فرکانسهای طبیعی و مودهایی ارتعاشی بدست خواهند آمد.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_i} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, NS \quad (13)$$

با جایگذاری روابط (9) تا (12) در رابطه (8) و جایگذاری آن در رابطه (13)، ماتریس مشخصه سیستم بصورت زیر بدست می آید:

$$\left[[K] + \sum_{j=1}^S [Ks_j] + \lambda [G] - \Omega^2 \left([M] + \sum_{j=1}^S [Ms_j] \right) \right] \{C\} = \{0\} \quad (14)$$

در رابطه بالا $[M]$ و $[K]$ ماتریس جرم و ماتریس سفتی پوسته، $[Ms_j]$ و $[Ks_j]$ ماتریس جرم و ماتریس سفتی استرینگر زام، $[G]$ ماتریس بارگذاری و $\lambda = pr(1-v^2)/Eh$ پارامتر بعد بارگذاری می باشند.

همچنین $\{C\} = \{p_1, \dots, p_{NS}, q_1, \dots, q_{NS}, r_1, \dots, r_{NS}\}^T$ بردار ستونی ضرایب ریتز و $\Omega^2 = (1-v^2)\rho R^2 \omega^2 / E$ پارامتر فرکانسی بدون بعد می باشد.

جدول 1 - توانهای مختلف P به ازای شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	S1	S2	S3	S4	C1	C2	C3	C4
P_u	0	0	1	1	0	0	1	1
P_v	1	0	0	1	1	0	0	1
P_w	1	1	1	1	2	2	2	2

نتایج تحلیل

معادله فرکانسی برای دو مدل پوسته تقویت شده طولی با شرایط مرزی تکیه گاه ساده از نوع S1-S1 و تکیه گاه گیردار از نوع C1-C1 حل شده است. مشخصات پوسته های تقویت شده در جدول 2 آمده است. تفاوت این دو مدل در نوع تقویت شامل تقویت داخلی و خارجی می باشد. جدول 3، مقایسه بین نتایج تحلیل با نتایج تجربی و تحلیلی موجود در مراجع دیگر را برای مدل M1 با شرایط مرزی تکیه گاه ساده از نوع S1-S1 نشان می دهد که مطابقت خیلی

کننده ها را بر حسب مولفه های تغییر مکان سطح میانی پوسته نوشت و تابع انرژی کل سیستم را بصورت زیر تشکیل داد:

$$F = U + T + \sum_{j=1}^S (Us_j + Ts_j) + Vp \quad (8)$$

توابع زیر را می توان برای جداسازی متغیرهای فضایی x, θ و متغیر زمانی t بکار برد:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= u(x) \sin n\theta e^{i\omega t} \\ v(x, \theta, t) &= v(x) \cos n\theta e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (9)$$

در این روابط n شماره مود محیطی و ω فرکانس ارتعاشات می باشد.

شرایط مرزی

برای پوسته استوانه ای با تکیه گاه ساده، چهار نوع شرط مرزی را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} S_1: \bar{w} = \bar{v} = 0; \quad S_2: \bar{w} = 0; \\ S_3: \bar{w} = \bar{u} = 0; \quad S_4: \bar{w} = \bar{v} = \bar{u} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

همچنین چهار نوع تکیه گاه گیردار نیز می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} C_1: \bar{w} = \bar{v} = \frac{d\bar{w}}{dx} = 0; \quad C_2: \bar{w} = \frac{d\bar{w}}{dx} = 0; \\ C_3: \bar{w} = \bar{u} = \frac{d\bar{w}}{dx} = 0; \quad C_4: \bar{w} = \bar{v} = \bar{u} = \frac{d\bar{w}}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

توابع ریتز

توابع تغییر مکان ریتز طوری باید باشند که شرایط مرزی فوق را ارضا نمایند. در حالت کلی این توابع را می توان بصورت چندجمله ای های خاصی بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\bar{u} = \left(\sum_{i=1}^{NS} p_i \bar{x}^{i-1} \right) (\bar{x}) P_u^0 (1-\bar{x}) P_u^1 = \sum_{i=1}^{NS} p_i \bar{u}_i \quad (12-1)$$

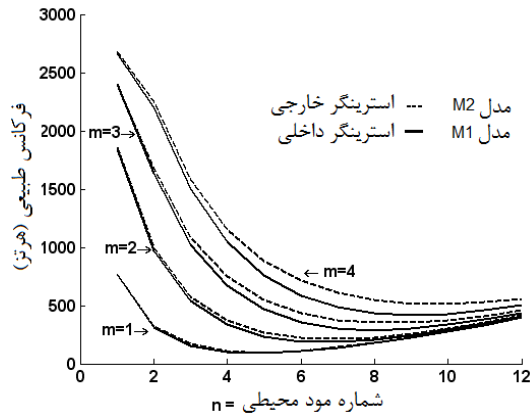
$$\bar{v} = \left(\sum_{i=1}^{NS} q_i \bar{x}^{i-1} \right) (\bar{x}) P_v^0 (1-\bar{x}) P_v^1 = \sum_{i=1}^{NS} q_i \bar{v}_i \quad (12-2)$$

$$\bar{w} = \left(\sum_{i=1}^{NS} r_i \bar{x}^{i-1} \right) (\bar{x}) P_w^0 (1-\bar{x}) P_w^1 = \sum_{i=1}^{NS} r_i \bar{w}_i \quad (12-3)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{h}; \quad \bar{v} = \frac{v}{h}; \quad \bar{w} = \frac{w}{R}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L} \quad (12-4)$$

توانهای مختلف P ، در جدول (1) آمده است. اندیس های P ، شامل 0 و 1 نشان دهنده دو انتهای پوسته در $x=0$ و $x=1$ می باشند. این شکل از توابع ریتز برحالی قابل مشتق گیری و انتگرال گیری هستند و ترکیبات مختلفی از شرایط مرزی برحالی قابل بررسی می باشند. همچنین با

$m=$ در دو حالت مختلف استرینگر بیرونی و داخلی، با ارتفاع یکنواخت برای مدل‌های $M1$ و $M2$ نشان می‌دهد. همانطور که می‌توان مشاهده نمود، استرینگر خارجی فرکانس‌های بالاتری را نسبت به استرینگر داخلی نتیجه می‌دهد. ولی این اختلاف در مودهای پایین کم است و با افزایش شماره مود طولی، این اختلاف فرکانس بیشتر محسوس است.



شکل 2- تغییرات فرکانس‌های طبیعی بر حسب شماره مود محیطی برای مدل‌های $M1$ و $M2$

جدول 2- ابعاد هندسی و خواص مکانیکی دو مدل پوسته تقویت شده طولی

خصوصیات	ابعاد و مقادیر	
	مدل $M1$	مدل $M2$
S تعداد استرینگرها	4	4
R (m) شعاع	0/1945	0/1945
h (m) ضخامت	0/000464	0/000464
L (m) طول	0/9868	0/9868
ds (m) ارتفاع استرینگرها	0/0101	0/0101
bs (m) عرض استرینگرها	0/00104	0/00104
E (Gpa) مدول الاستیسیته	200	200
ρ (Kg/m ³) دانسیته	7770	7770
ν نسبت پواسون	0/3	0/3
نوع تقویت	داخلی	خارجی

شکل 2، تغییرات فرکانس‌های طبیعی را بر حسب شماره مود محیطی n با زای شماره مودهای طولی 1، 2، 3، 4،

جدول 3- همگرایی و مقایسه فرکانس‌های طبیعی با مراجع دیگر برای پوسته تقویت شده مدل $M1$ با تکیه گاه ساده $S1-S1$

شماره مود	نتایج تحلیل - فرکانس‌های طبیعی (هرتز)	مقادیر تجربی	درصد خطا %	مقادیر تحلیلی [4]	خطا %				
						تعداد جملات - NS - توابع رینتز			
m	n	3	4	6	8	[3]			
1	1	805/6867	764/0022	763/8867	763/8867	---	---	778	-1/8
1	2	348/8287	312/4860	312/4105	312/4105	---	---	317	-1/5
1	3	182/6912	156/3567	156/3143	156/3143	156	0/2	159	-1/7
1	4	118/5108	99/0733	99/0496	99/0496	100	-0/95	99/6	-0/6
1	5	101/5458	88/7221	88/7107	88/7107	89	-0/32	91/5	-3/1
1	6	113/4129	105/8682	105/8633	105/8633	104	1/8	106	-0/1
1	7	141/9655	137/2760	137/2738	137/2738	137	0/2	142	-3/4
1	8	180/4947	177/1039	177/1028	177/1028	174	1/8	178	-0/5

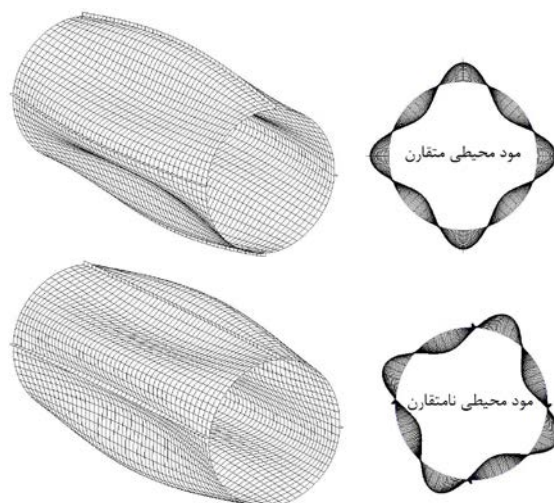
مودهای محیطی متقارن را می‌توان استخراج نمود در صورتیکه در روش المان محدود هر دو مود متقارن و نامتقارن قابل استخراج می‌باشد. این محدودیت به علت شکل مود محیطی متقارن در نظر گرفته شده در معادله (9) می‌باشد.

نکته دیگری که در این جدول می‌توان مشاهده نمود اختلاف فرکانس مودهای متقارن و نامتقارن در n های زوج و عدم اختلاف آنها در n های فرد می‌باشد. در شکل‌های 3 و 4 مودهای محیطی متقارن و نامتقارن به ازای $n=4$ و $n=5$ نشان داده شده است. همانطور که در این شکل‌ها دیده می‌شود به ازای n زوج، در مود متقارن همه تقویت کننده‌ها در نقاط غیرگره ای مود قرار می‌گیرند و در ماتریس جرم و سفتی همه آنها تاثیر می‌گذارند اما در مود نامتقارن،

جدول 4 و 5 مقایسه نتایج فرکانس‌های طبیعی

به روش تحلیلی برای پوسته تقویت شده مدل $M2$ با 4 نوع مختلف تکیه گاه ساده و 4 نوع مختلف تکیه گاه گیردار را (مطابق معادلات 10 و 11 و جدول 1) نشان می‌دهند. قابل توجه اینکه در جدول 4 نتایج تحلیل مودال به روش المان محدود نیز با نتایج تحلیلی مقایسه شده اند. برای تحلیل المان محدود از نرم افزار MSC NASTRAN PATRAN/ استفاده شده است. پوسته تقویت شده به صورت المان shell نازک 8 گره ای مدل سازی شده است که در راستای طولی دارای 50 المان و در راستای محیطی دارای 60 المان می‌باشد. همانطور که در جدول 4 مشاهده می‌شود مطابقت بسیار خوبی بین نتایج تحلیلی و المان محدود وجود دارد. تنها محدودیت روش تحلیلی این است که فقط

همه تقویت کننده ها در قسمت گره مود قرار می گیرند و در نتیجه چگونگی تاثیرگذاری آنها بر خواص جرمی و سفتی مجموعه با مود متقارن متفاوت بوده و در نتیجه فرکانس های طبیعی پایین تری را نتیجه می دهد. اما به ازای n فرد، توزیع تقویت کننده ها در نقاط گره ای و غیر گره ای در مودهای متقارن و نامتقارن یکسان می باشد (نیمی از آنها در نقاط گره ای و نیمی دیگر در نقاط غیر گره ای قرار می گیرند) و در نتیجه چگونگی تاثیر آنها بر خواص جرمی و سفتی مجموعه یکسان بوده و فرکانس های طبیعی هر دو حالت یکسان می باشد که این موضوع کاملاً در جدول 4 مشهود است.



شکل 3- مودهای ارتعاشی به ازای $n=4$ و $m=1$

جدول 4- مقایسه نتایج فرکانس های طبیعی برای پوسته تقویت شده مدل M2 با 4 نوع مختلف تکیه گاه ساده

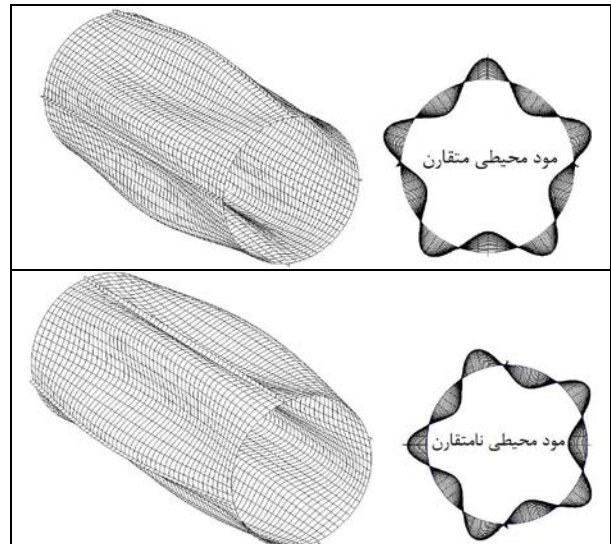
شماره مود		فرکانس های طبیعی (هرتز)							
m	n	S1-S1		S2-S2		S3-S3		S4-S4	
		تحلیلی	المان محدود	تحلیلی	المان محدود	تحلیلی	المان محدود	تحلیلی	المان محدود
1	1	--	--	--	--	--	--	--	--
		769	--	440	--	461	--	966	--
	2	--	318	--	289	--	421	--	516
		322	331	294	302	416	453	519	566
	3	--	168	--	165	--	285	--	306
		167	168	163	165	282	285	304	306
	4	--	106	--	106	--	192	--	198
		109	109	108	109	194	196	201	202
	5	--	97	--	97	--	152	--	153
		96	97	96	97	151	152	154	153
2	6	--	110	--	110	--	139	--	140
		111	114	111	114	142	143	143	144
	7	--	143	--	143	--	158	--	159
		141	143	141	143	157	158	158	159
	8	--	179	--	179	--	184	--	184
		180	189	180	189	189	195	189	195
	9	--	233	--	233	--	235	--	235
		226	233	226	233	231	235	231	235
	10	--	276	--	276	--	281	--	281
		278	294	278	294	281	296	281	296
2	1	--	--	--	--	--	--	--	--
		1859	--	771	--	1038	--	1873	--
	2	--	--	--	--	--	--	--	--
		999	--	690	--	801	--	1098	--
	3	--	582	--	546	--	607	--	702
		579	582	542	546	604	607	696	702
	4	--	357	--	342	--	440	--	471
		374	377	365	361	445	447	477	478
	5	--	274	--	272	--	343	--	355
		271	274	268	272	340	343	354	355
2	6	--	204	--	202	--	270	--	275
		223	226	222	225	279	282	286	288
	7	--	213	--	213	--	255	--	260
		211	213	211	213	252	255	256	260
	8	--	218	--	218	--	250	--	251
		226	229	226	229	254	257	257	259
	9	--	259	--	259	--	278	--	279
		257	259	257	259	276	278	277	279
	10	--	298	--	298	--	308	--	308
		301	307	301	307	314	317	314	317

جدول 5- مقایسه نتایج فرکانس های طبیعی برای پوسته تقویت شده مدل M2 با 4 نوع مختلف تکیه گاه گیردار

شماره مود	فرکانس های طبیعی به روش تحلیلی (هرتز)					
	m	n	C1-C1	C2-C2	C3-C3	C4-C4
1	1	1	771	558	620	974
	2	2	332	327	495	531
	3	3	185	184	313	315
	4	4	133	129	210	210
	5	5	120	116	161	161
	6	6	129	126	149	149
	7	7	153	152	162	162
	8	8	188	187	193	193
	9	9	232	231	234	234
	10	10	282	282	284	284
2	1	1	1864	994	1157	1879
	2	2	1011	919	947	1117
	3	3	600	594	691	720
	4	4	405	404	497	502
	5	5	308	306	376	376
	6	6	263	260	307	307
	7	7	248	246	276	276
	8	8	257	255	273	273
	9	9	283	281	292	292
	10	10	321	320	327	327

همچنین در تکیه گاه های نوع S2 و C2 فرکانس پایه در $n=5$ رخ می دهد اما در تکیه گاه های نوع S4 و C4 فرکانس پایه در $n=6$ ایجاد می شود و به عبارتی فرکانس پایه تغییر مود می دهد. به علاوه تکیه گاه های نوع S2 و C2 همواره کمترین فرکانس های طبیعی را دارند و تکیه گاه های نوع S4 و C4 بیشترین فرکانس های طبیعی را به ازای موج های محیطی و طولی مختلف نتیجه می دهند اما در n های پایین این اختلاف ها بیشتر هستند و در n های بالا اختلاف بین نتایج تکیه گاه های مختلف کاهش می یابند. با توجه به معادلات (10) و (11) و جدول 1، این نتایج قابل توجیه فیزیکی می باشند. تکیه گاه های نوع S2 و C2 دارای کمترین قید و در نتیجه دارای پایینترین فرکانس های طبیعی و پایینترین فرکانس پایه می باشند. از طرفی دیگر تکیه گاه های نوع S4 و C4 دارای بیشترین قید و در نتیجه دارای بیشترین فرکانس های طبیعی و بیشترین فرکانس پایه می باشند. با توجه به دقت نتایج روش تحلیلی به دست آمده در این تحقیق در مقایسه با نتایج مراجع دیگر که در جدول 3 ارائه گردید و عدم وجود نتایج فرکانس های طبیعی برای شرایط مرزی مختلف (4 نوع تکیه گاه ساده و 4 نوع تکیه گاه گیردار)، نتایج ارائه شده در جداول 6 و 7 مرجع خوبی برای محققان برای شرایط مرزی مختلف می تواند مورد استفاده قرار بگیرد.

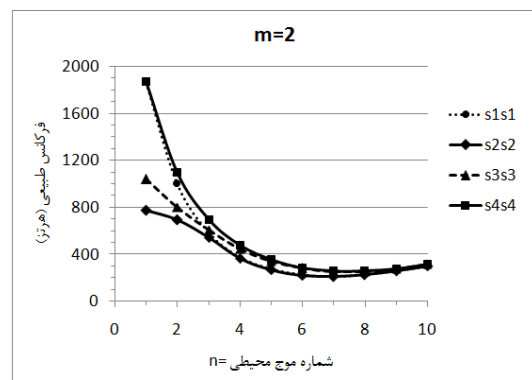
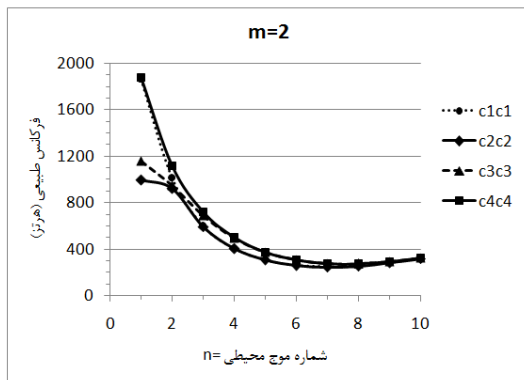
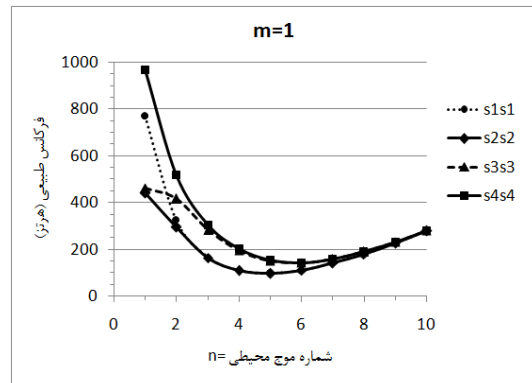
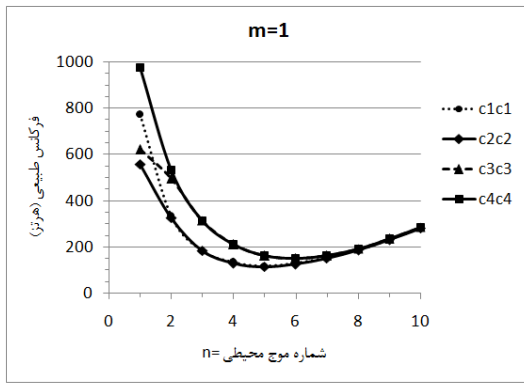
در شکل های 7 الی 10 شکل مود های طبیعی پوسته در راستای طولی به ازای چند نوع مختلف تکیه گاه های پیش گفته نشان داده شده اند. همانطور که در این شکل ها می توان مشاهده نمود در تمامی آنها مقدار جابجایی W در دو انتهای پوسته برابر صفر می باشد اما مقادیر U و V متناسب با نوع تکیه گاه صفر و یا غیر صفر می باشند (مطابق معادلات 10 و 11 و جدول 1) که نشان دهنده صحت حل تحلیلی و ارضا شدن قیدهای هندسی می باشند. همچنین در تکیه گاه های نوع گیردار صفر بودن شیب جابجایی شعاعی ($= \frac{\partial W}{\partial x} = 0$) در دو انتهای پوسته کاملاً مشهود می باشد.



شکل 4- مودهای ارتعاشی به ازای $n=5$ و $m=1$

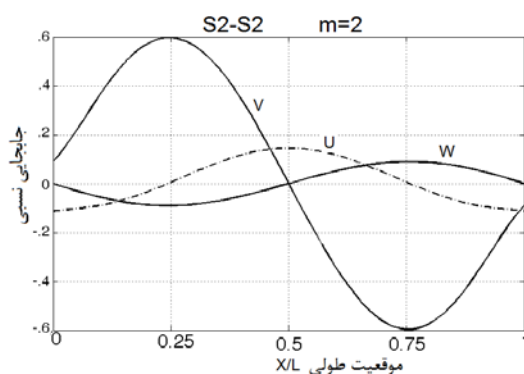
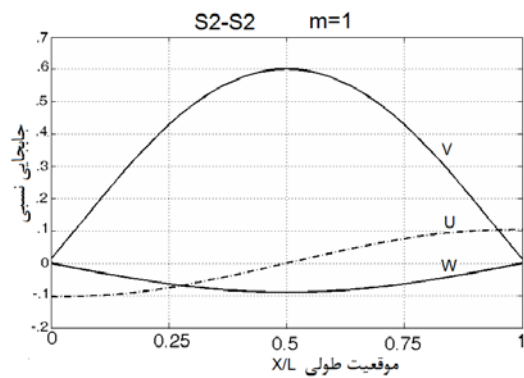
همچنین چگونگی تغییرات فرکانس های طبیعی بر حسب تعداد موج محیطی در مودهای خمشی 2 و $m=1$ و برای شرایط مرزی پیش گفته در شکل های 5 و 6 نشان داده شده اند.

همانطور که در این شکل ها و جداول می توان مشاهده نمود کمترین فرکانس پایه مربوط به تکیه گاه های S2-S2 و C2-C2 می باشند و تکیه گاه های S4-S4 و C4-C4 بیشترین فرکانس پایه را دارا می باشند.



شکل 6- تغییرات فرکانس های طبیعی پوسته تقویت شده مدل M2 با 4 نوع مختلف تکیه گاه گیردار

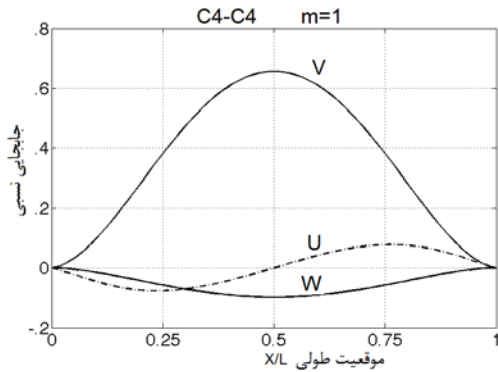
شکل 5- تغییرات فرکانس های طبیعی پوسته تقویت شده مدل M2 با 4 نوع مختلف تکیه گاه ساده



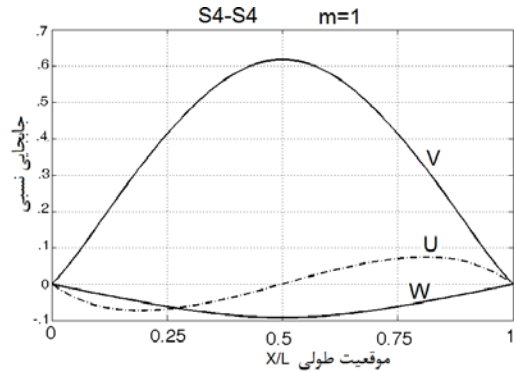
شکل 7- مودهای ارتعاشی تکیه گاه ساده از نوع S2-S2

در ادامه مدل M2 با شرایط مرزی تکیه گاه ساده از نوع S1-S1 و تکیه‌گاه گیردار از نوع C1-C1 تحت بار محوری استاتیکی فشاری حل شده است و اثر شرایط مرزی و بار محوری بر روی تغییرات فرکانس های طبیعی و فرکانس پایه ارائه گردید.

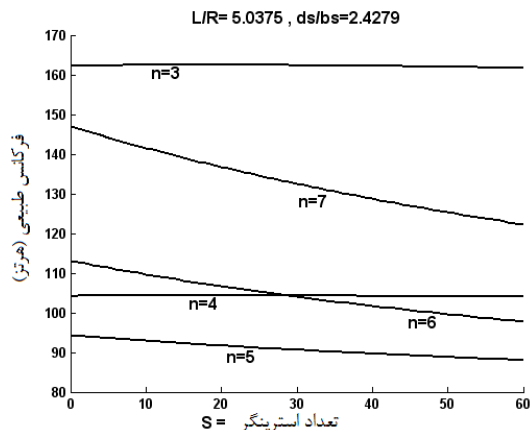
شکل‌های 11 الی 14، اثر تعداد تقویت کننده‌ها را بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی برای مدل M2 با تکیه‌گاه ساده از نوع S1-S1 برای حالت‌های تقویت شده خیلی سبک (نسبت ارتفاع به عرض تقویت کننده‌ها ds/bs خیلی کوچک باشد)، سبک، سنگین و خیلی سنگین (نسبت ارتفاع به عرض تقویت کننده‌ها ds/bs خیلی بزرگ باشد)، نشان می‌دهند. قابل ذکر است که برای این مدل پوسته، مقادیر تعداد تقویت کننده‌ها و ارتفاع آنها مطابق جدول 2 نبوده ولی بقیه خصوصیات مطابق جدول ذکر شده می‌باشند.



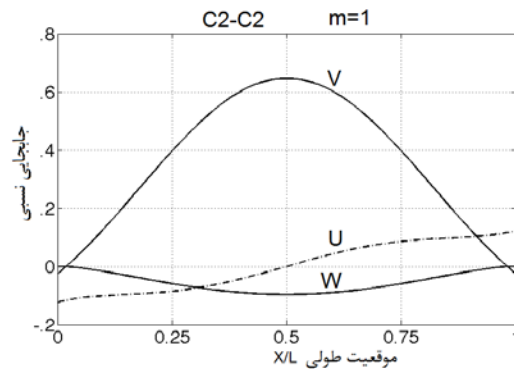
شکل 10- مودهای ارتعاشی تکیه گاه گیردار از نوع C4-C4



شکل 8- مودهای ارتعاشی تکیه گاه ساده از نوع S4-S4

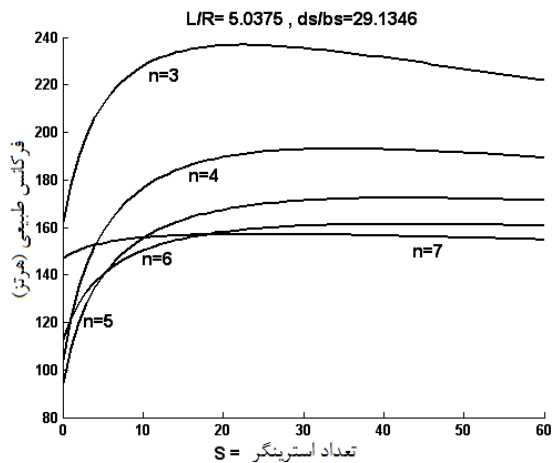


شکل 11- تغییرات فرکانس‌های طبیعی بر حسب تعداد تقویت کننده‌ها حالت تقویت شده خیلی سبک



شکل 9- مودهای ارتعاشی تکیه گاه گیردار از نوع C2-C2

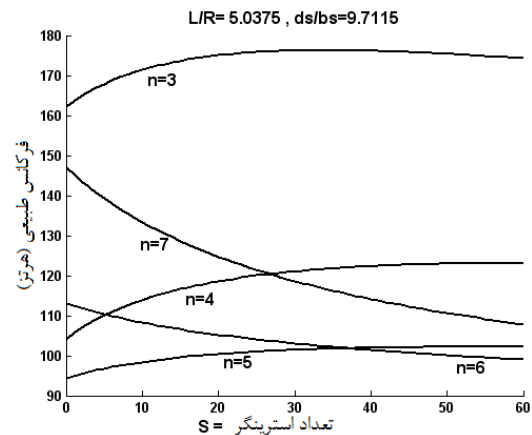
برای نسبت ds/bs های مختلف، عرض تقویت کننده‌ها ثابت و ارتفاع آنها تغییر داده شده است. در این شکلها مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد تقویت کننده‌ها، فرکانس بعضی از مودهای محیطی افزایش و برخی دیگر کاهش می‌یابند. ولی با افزایش تعداد تقویت کننده‌ها، نرخ افزایش فرکانس‌ها کاهش یافته و در برخی موارد نیز ثابت باقی می‌ماند. همچنین فرکانس پایه در محدوده‌های پایین S ، روند افزایشی و بعد از محدوده‌ای روند کاهشی دارد. این نوع رفتار بخاطر تغییر مود محیطی (Mode Switching) مربوط به فرکانس پایه می‌باشد. همچنین می‌توان مشاهده نمود که با افزایش نسبت ارتفاع به عرض تقویت کننده‌ها، این تغییر مود در S های پایینتری رخ داده و تعداد دفعات



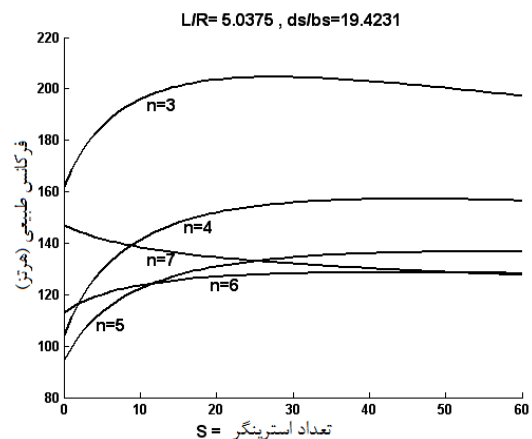
شکل 14- تغییرات فرکانس‌های طبیعی بر حسب تعداد تقویت کننده‌ها حالت تقویت شده خیلی سنگین

شکل‌های 13 و 14، اثر بار محوری استاتیکی فشاری را بر فرکانس‌های طبیعی، برای مدل M2 با تکیه‌گاه ساده از نوع S1-S1 و گیردار از نوع C1-C1، به ازای دو مقدار برای تعداد تقویت کننده‌ها نشان می‌دهند. همانطور که می‌توان مشاهده نمود با افزایش بار محوری فشاری، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند. از این شکلها می‌توان بار کمانش استاتیکی را نیز بدست آورد. در حقیقت بار محوری فشاری که به ازای آن فرکانس پایه پوسته به صفر برسد، بار کمانش می‌باشد. برای پوسته با تکیه‌گاه ساده کمانش در مود $n=5$ و $m=1$ ایجاد می‌شود ولی برای تکیه‌گاه گیردار وضعیت تغییر می‌کند. برای پوسته با تعداد استرینگر کم، کمانش در مود $n=5$ و $m=1$ اتفاق می‌افتد. ولی با افزایش تعداد استرینگرها نه تنها بار کمانش افزایش می‌یابد بلکه کمانش به مود $n=6$ و $m=1$ انتقال می‌یابد. با توجه به شکل‌های 15 و 16 مقادیر بار کمانش برای شرایط مرزی‌های پیش گفته و با تعداد مختلف استرینگر مطابق جدول 6 استخراج شده است. همانطور که در این جدول نیز می‌توان مشاهده نمود به ازای مقادیر مختلف تعداد تقویت کننده‌ها در پوسته با تکیه‌گاه ساده، کمانش در $n=5$ رخ می‌دهد اما برای تکیه‌گاه گیردار، در مقادیر کم تعداد تقویت کننده‌ها مد کمانش در $n=5$ است و با افزایش تعداد استرینگرها مد کمانش به $n=6$ تغییر می‌یابد.

آن نیز افزایش می‌یابد بطوریکه برای شکل (14) در طی سه مرحله فرکانس پایه از مود $n=5$ به $n=6$ و سپس به مود $n=7$ انتقال می‌یابد.

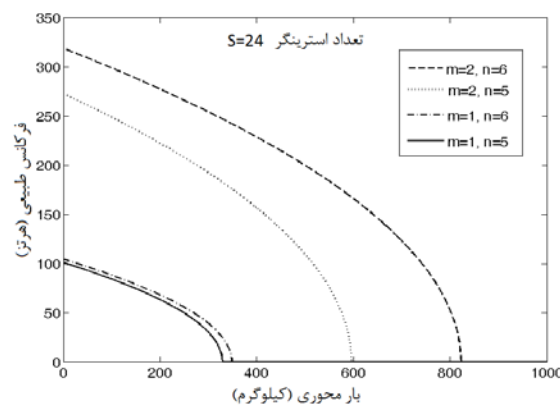
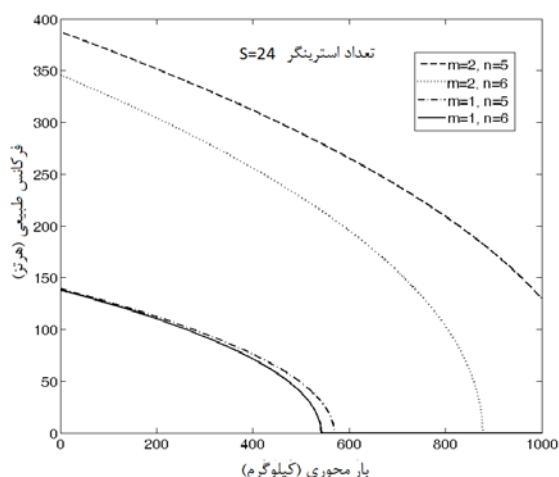
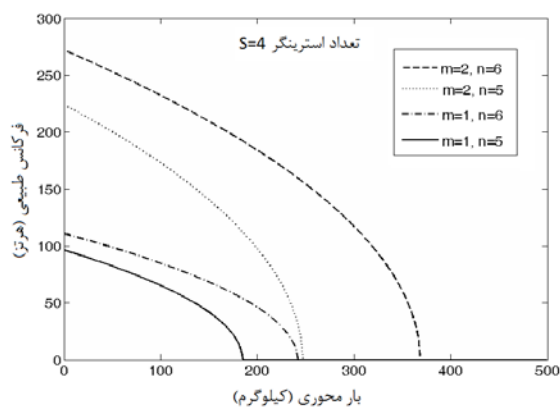
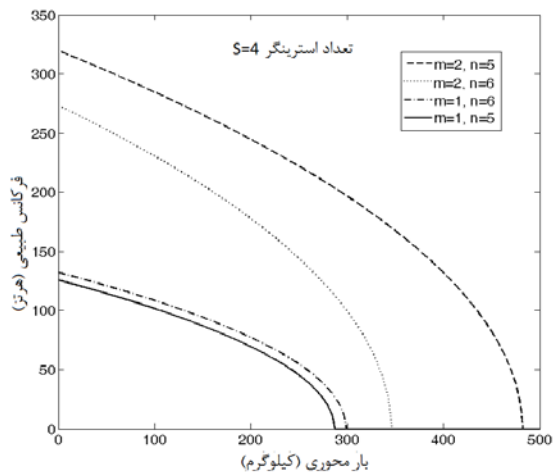


شکل 12- تغییرات فرکانس‌های طبیعی بر حسب تعداد تقویت کننده‌ها حالت تقویت شده سبک



شکل 13- تغییرات فرکانس‌های طبیعی بر حسب تعداد تقویت کننده‌ها حالت تقویت شده سنگین

در حالت‌های تقویت سبک، میزان تاثیر تقویت کننده‌ها در افزایش انرژی جنبشی مجموعه بیش از تاثیر آنها در انرژی پتانسیل بوده و در نهایت با افزایش تعداد تقویت کننده‌ها، جرم مودال بیشتر از سفتی مودال افزایش یافته و باعث کاهش در فرکانس‌های طبیعی می‌شود. در حالت تقویت سنگین، بعلاوه بزرگ شدن پارامتر خارج از مرکزی تقویت کننده‌ها، درصد افزایش انرژی پتانسیل بیش از درصد افزایش انرژی جنبشی بوده و افزایش فرکانس‌های طبیعی در بعضی از مودها مشاهده می‌شود که باعث ایجاد تقاطع در نمودار تغییرات فرکانس‌های طبیعی می‌شود. از این شکلها می‌توان نتیجه گرفت که همیشه افزایش تعداد تقویت کننده‌ها باعث افزایش فرکانس طبیعی نمی‌شود بلکه تا محدوده‌ای افزایش تعداد آنها مناسب است و بعد از آن اثر معکوس خواهد داشت. از طرفی دیگر اثر خارج از مرکزی تقویت کننده پارامتر مهمی است که باید مد نظر قرار گیرد و حتی الامکان بزرگ انتخاب شود.



شکل 15- تغییرات فرکانس‌های طبیعی بر حسب بار محوری فشاری تکیه گاه ساده بازای مودهای محیطی و طولی مختلف

شکل 16- تغییرات فرکانس‌های طبیعی بر حسب بار محوری فشاری تکیه گاه گیردار بازای مودهای محیطی و طولی مختلف

جدول 6- بار کمانش مدل M2 با دو شرط مرزی مختلف و تعداد تقویت کننده‌های مختلف

تعداد استرینگر	تکیه گاه ساده S1- S1		تکیه گاه گیردار C1- C1	
	بار کمانش (کیلوگرم)	شماره مود	بار کمانش (کیلوگرم)	شماره مود
4	185	n=5	286	n=5
8	213		350	m=1
12	243	m=1	403	n=6
16	271		452	
20	300	m=1	497	m=1
24	328		541	

نتیجه گیری

در این تحقیق ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده طولی تحت بار محوری فشاری استاتیکی به روش تحلیلی و به ازای دو شرط مرزی تکیه گاه ساده و گیردار مورد بررسی قرار گرفت. در روش تحلیلی از تئوری سندرز و برای حل معادلات از روش ریتز استفاده گردید و تقویت کننده‌ها به صورت المان‌های مجزا در نظر گرفته شدند. برای شرایط مرزی پیش گفته به ازای مقادیر مختلف بار محوری و تعداد مختلف تقویت کننده‌ها، برخی نتایج تغییرات فرکانس‌های طبیعی و فرکانس پایه ارائه شد. نتایج فرکانس‌های طبیعی حاصل از تحقیق با کار تجربی و تحلیلی مراجع دیگر مقایسه گردید و مطابقت خوبی مشاهده شد. در نتایج جداول و نمودارها مشاهده گردید که تقویت کننده‌های بیرونی بیشتر از تقویت کننده‌های داخلی فرکانس‌های طبیعی را افزایش می‌دهند. در روش تحلیلی به ازای 4 نوع مختلف تکیه گاه ساده و 4 نوع مختلف تکیه گاه گیردار نتایج تغییرات فرکانس‌های طبیعی، فرکانس پایه و شکل مودهای طبیعی ارائه شد. همچنین مدل با 4 نوع تکیه گاه ساده به روش المان محدود نیز مورد تحلیل قرار گرفت که تطابق بسیار خوبی با نتایج روش تحلیلی

Circular Cylindrical Shells with Stringer and Ring Stiffeners", Int. J. of Solids and Str., Vol. 39, pp. 529-545, 2002.

- [6] Ruotolo R. A., "Comparison of Some Thin Shell Theories Used for the Dynamic Analysis of Stiffened Cylinders", J. Sound Vib., vol. 243, pp. 847-860, 2001.
- [7] Mustafa B. A. Ali J. and R., "Prediction of Natural Frequency of vibration of stiffened Cylindrical Shells and Orthogonally Stiffened Curved Panels", J. Sound Vib., vol. 113, pp. 317-327, 1987.
- [8] Pan, Z., Li, X. and Ma, J., "A study on free vibration of a ring-stiffened thin circular cylindrical shell with arbitrary boundary conditions J. Sound Vib., Vol. 314, 2008, pp. 330-342.
- [9] Sadeghifar, M., Bagheri, M. and Jafari, A.A. "Multiobjective optimization of orthogonally stiffened cylindrical shells for minimum weight and maximum axial buckling load", Thin-Walled Structures, Vol. 48, No.12, pp. 979-988, 2010.
- [10] Jafari, A. A., Mozafari, A. and Maghsoudi Mehrabani, M., "Effect of Rotating Speed and Stiffeners on Natural Frequency of Composite Shell", Journal of Space Science and Technology, Vol. 4, No. 1 & 2, 2011, pp. 1-9.
- [11] Xiang, X., Guoyong, Jin. And Zhigang, Liu. "Free vibration analysis of cylindrical shells using the Haar wavelet method", Int. J. of Mechanical Sciences, Vol. 77, pp. 47-56, 2013.
- [12] Edalat, P., Khedmati, M. R. and Soares, G., "Free vibration and dynamic response analysis of stiffened parabolic shells using equivalent orthotropic shell parameters", Latin American Journal of Solid and Structures, Vol. 10, 2013, pp. 747 - 766.
- [13] Hyun, W. L., Moon, K. K. "Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh-Ritz method and comparison of different shell theories", J. of Sound and Vibration, Vol. 353, No.29, 2015, pp. 344-377.
- [14] Naghsh, A., Saadatpour, M.M. and Azhari M. "Free vibration analysis of stringer stiffened general shells of revolution using a meridional finite strip method", Thin-Walled Structures, Vol. 94, 2015, pp. 651-662.

مشاهده گردید. به علاوه در نتایج المان محدود به ازای هر n ، دو مود محیطی متقارن و نامتقارن استخراج گردید اما روش تحلیلی فقط توانایی استخراج مودهای متقارن را دارد. همچنین مقدار عددی فرکانس‌های طبیعی مودهای متقارن و نامتقارن در n های فرد یکسان بوده و در n های زوج باهمدیگر اختلاف دارند که این اختلاف بخاطر متفاوت بودن قرارگیری تقویت کننده‌ها در نقاط گره‌ای و غیر گره‌ای در این دو حالت می‌باشند. در نتایج جداول و نمودارها مشاهده گردید که تکیه‌گاه‌های ساده نوع S4 و گیردار C4 دارای بیشترین مقادیر فرکانس‌های طبیعی و بالاترین مقدار فرکانس پایه و تکیه‌گاه‌های ساده نوع S2 و گیردار C2 دارای کمترین مقادیر فرکانس‌های طبیعی و پایینترین مقدار فرکانس پایه هستند. علت این مسئله به ترتیب، به خاطر وجود بیشترین قید هندسی و کمترین قید هندسی در این نوع تکیه‌گاه‌ها می‌باشد. همچنین چگونگی کاهش فرکانس‌های طبیعی به ازای افزایش بار محوری برای دو نوع تکیه‌گاه ساده و گیردار نشان داده شد. همچنین بار کمانش از روش دینامیکی تعیین شد. به عبارتی دیگر تحت بار محوری که فرکانس پایه پوسته به صفر برسد، بار کمانش می‌باشد که به ازای مقادیر مختلف تعداد تقویت کننده‌ها تعیین شدند. در نتایج مشخص شد که برای تکیه‌گاه ساده مد کمانش بدون تغییر بود اما در تکیه‌گاه گیردار با تغییر تعداد تقویت کننده‌ها، مد کمانش نیز تغییر نمود. به علاوه بار کمانش پوسته با تکیه‌گاه گیردار به مراتب بیشتر از تکیه‌گاه ساده می‌باشد.

مراجع

- [1] Sanders, J. L. "An Improved First-approximation Theory for Thin Shells", NASA TR R-24, Nat. Aeronautics and Space Admin., Washington, D.C. 1959.
- [2] Egle, D. M. and Sewall, J. L. "Analysis of Free Vibration of Orthogonally Stiffened Cylindrical Shells with Stiffeners Treated as Discrete Elements", AIAA Journal, Vol. 6, No. 3, pp. 518-526, 1968.
- [3] Rinehart, S. A. and Wang, J. T. S. "Vibration of Simply Supported Cylindrical Shells with Longitudinal Stiffeners", Journal of Sound and Vibration, Vol. 24, No. 2, pp. 151-163, 1972.
- [4] Mustafa, B. A. J. and Ali, R. "An Energy Method for Free Vibration Analysis of Stiffened Circular Cylindrical Shells", Computer & Structures, Vol. 32, No. 2, pp. 335-363, 1989.
- [5] Zhao, X. and Liew, K. M. and Ng, T. Y. "Vibration of Rotating Cross-Ply Laminated