

بررسی اثر جرم گسترده بر رفتار ارتعاشی ورق یک سر گیردار کامپوزیتی

وحدت آزاد، نادر*^۱، سلیمانی، حسین^۲، وحدت آزاد، ابازر^۳

۱- هیئت علمی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری

۲- کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۳- هیئت علمی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۹/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۱/۱۲)

چکیده

در این پژوهش رفتار ارتعاشی یک ورق کامپوزیتی چند لایه یک سر گیردار در حضور جرم گسترده به فاصله دلخواه از سر گیردار بررسی شده است. به منظور استخراج فرکانس‌های طبیعی با انتخاب مدهای فرضی از روش ریلی-ریتز استفاده شده است. در این روش انرژی کرنشی ورق محاسبه شده و اثر جرم گسترده اضافه شده بصورت انرژی جنبشی برای سیستم لحاظ شده است. پس از حل مسئله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی و افت آنها برای ورق با و بدون جرم گسترده مقایسه شده است. اثر دوری و نزدیکی جرم گسترده نسبت به سر گیردار ورق بر چهار فرکانس اول ورق مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین اثر طول گستردگی یک جرم مشخص بر رفتار ارتعاشی ورق بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد هر چه جرم گسترده از سر گیردار دورتر باشد، فرکانس‌های طبیعی اول و دوم افت محسوس تری خواهند داشت در حالی که برای فرکانس سوم و چهارم بستگی به موقعیت جرم اضافه شده دارد. همچنین استفاده از طول‌های کمتر برای یک جرم مشخص منجر به کمترین افت فرکانس در مدهای دوم و چهارم می‌شود. علاوه بر این، افزایش چگالی جرم اضافه شده در یک موقعیت مشخص بر فرکانس‌های طبیعی کاهش پیوسته فرکانس‌ها را نشان می‌دهد. در انتها با فرض چند لایه با زاویه لایه‌چینی‌های متفاوت، لایه‌چینی بهینه و کارآمد برای داشتن حداکثر فرکانس در هر مود ارتعاشی پیشنهاد می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: ورق یک سرگیردار، کامپوزیت، ارتعاشات آزاد، فرکانس طبیعی، جرم اضافه شده، ریلی-ریتز

Vibration Behavior of a Laminated Composite Cantilever Plate with an Attached Strip Mass

Nader Vahdat azad, Hossein Soleimani, Abazar Vahdat azad

Abstract

In this study the vibration behavior of a laminated composite cantilever plate with an attached strip mass was studied. In order to extract natural frequencies, the Rayleigh-Ritz method was used by choosing selected shape functions. In this method, strain energy of the plate is calculated and the effect of attached mass is considered as kinetic energy for the system. After reaching an eigenvalue problem, natural frequencies of the plate and their reduced due to attached mass are compared. For the attached mass, the effect of distance from the clamped edge on first four natural frequencies is studied. Results has shown that for first and second natural frequencies moving the mass toward the free edge causes frequency reduction while for the third and fourth natural frequencies, it depends on the position of mass. Also, the investigation on the length of attached mass has shown that using smaller strip of mass makes the lowest frequency reduction for the second and fourth modes. Moreover, for a specific position of attached mass, results have shown that natural frequencies reduce continuously by increasing the mass density. At the end, by considering a specific laminate with different orientation of layers, the optimum lay-up for the maximum of natural frequency for each mode is recommended.

Key words: Cantilever plate, Composite, Free vibration, Natural frequency, Attached mass, Rayleigh-Ritz

مقدمه

در سال‌های اخیر صفحات چند لایه کامپوزیتی در صنعت و زمینه‌های جدید علوم مهندسی وارد شده است. سازه‌های ساخته شده از این مواد در معرض شرایط متفاوت بارگذاری از جمله بارهای دینامیکی هستند. ورق‌های مربعی و مستطیلی کاربرد وسیعی در مهندسی عمران، مکانیک و هوافضا دارند. به طور کلی در بیشتر سازه‌های هوایی، دریایی و خودرو، ورق و پوسته بکار رفته است [۱]. این سازه‌ها در بسیاری موارد در معرض بارگذاری‌های ارتعاشی هستند. از بین انواع شرایط مرزی متفاوت برای ورق‌ها، ورق یک سر گیردار به دلیل شرایط مرزی پیچیده کمتر بررسی شده است در حالی که کاربرد فراوانی برای آن یافت می‌شود. به عنوان نمونه در صنعت هوانوردی بال هواپیما را می‌توان با یک ورق یک سر گیردار معادل قرار داد و یا سطوح کنترلی بال و دم همگی ورق یک سر گیردار هستند که مسئله ارتعاشات آزاد و اجباری آن سال‌ها توسط محققین بررسی شده است [۲].

مسئله ورق دارای بارگذاری به صورت جرمی از سیستم‌های الکترونیکی شروع شد. بوردهای الکتریکی و پایه صفحه‌مانند آن‌ها می‌تواند ورق مستطیلی در نظر گرفته شود که تعدادی جرم متمرکز را حمل می‌کند و در معرض بارگذاری ارتعاشی قرار دارد [۱]. گورمن در سال ۱۹۷۶ ارتعاشات آزاد یک ورق یک سر گیردار ایزوتروپ را حل کرد [۳]. او به کمک روش جمع آثار موده‌های متقارن و پادمقارن را برای ورق با نسبت‌های منظری متفاوت تقریب زد. بوآی در سال ۱۹۹۴ ارتعاشات آزاد یک صفحه مستطیل شکل ایزوتروپ دارای جرم متمرکز را بررسی کرد. او به کمک روش ریتز و توابع پایه مثلثاتی تغییرشکل صفحه را تقریب زد و مسئله را برای انواع شرایط مرزی مطالعه کرد [۴]. کمپاز در سال ۲۰۰۲ برای اولین بار ارتعاش آزاد ورقی را که دارای جرم توزیع شده است بررسی کرد [۵]. تا پیش از آن مطالعات غالباً بر روی تیر با جرم گسترده یکنواخت و یا ورق دارای جرم متمرکز محدود می‌شد. او معادلات حرکت سیستم را استخراج کرد و به کمک روش گلرکین مسئله را به یک مسئله مقدار ویژه تبدیل کرد تا به فرکانس‌های طبیعی سیستم منجر گردد. او دریافت که مکان قرارگیری جرم اثر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار ورق دارد. او همچنین اثر افزایش جرم در یک موقعیت مشخص را بر چند شکل موده‌های اول ورق بررسی کرد [۵]. ونگ در سال ۲۰۰۲ اثر

توده جرمی به صورت گسترده را بر پاسخ ارتعاشی ورق بررسی کرد [۶]. او به منظور محاسبه پاسخ صفحه مستطیلی از روش ریلی-ریتز استفاده کرد. در آن مطالعه اثر تغییرشکل برشی و اینرسی دورانی لحاظ نشده بود. در سال ۲۰۰۸ علی بیگلو و همکاران ارتعاشات آزاد یک ورق چندلایه مستطیل شکل به همراه توده جرمی را بررسی کردند [۱]. آنها به منظور حل مسئله از تئوری مرتبه سوم برشی به کمک اصل همیلتون استفاده کرده و با توجه به چهار طرف مفصل بودن ورق، از توابع تقریب سری فوریه کمک گرفتند. آنها دریافتند که فرکانس‌های طبیعی ورق به مقدار بارگذاری جرمی و مکان آن وابسته است. همچنین با افزایش سطح توزیع جرم، فرکانس‌های طبیعی ورق افزایش می‌یابند [۱]. علی بخشی در سال ۲۰۱۱ ارتعاشات آزاد یک صفحه مستطیلی کامپوزیتی که جرم گسترده دو بعدی داشت را بررسی کرد [۷]. او معادلات را به کمک تئوری صفحات دو متغیره اصلاح شده استخراج کرد و اثر نسبت منظری ورق، اندازه و موقعیت جرم گسترده را بر ارتعاشات آزاد ورق بررسی کرد. در ادامه علی بخشی در سال ۲۰۱۲ در یک ورق چند لایه کامپوزیتی مستطیلی دارای جرم گسترده، اثر ناهمسانگردی را بر رفتار ارتعاشی ورق بررسی کرد [۸]. او با مطالعه پارامتری فرکانس بی‌بعد شده اثر ناهمسانگردی روی ارتعاشات آزاد صفحه چهار طرف مفصل برای چندین نوع لایه‌چینی متفاوت مورد مطالعه قرار داد. علی بخشی در سال ۲۰۱۴ ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیل شکل کامپوزیتی که دارای یک جرم گسترده دایروی در حال دوران است را بررسی کرد [۹]. اثر دوران دیسک با سرعت زاویه‌ای دلخواه بر روی ورق به صورت انرژی جنبشی به انرژی جنبشی ورق اضافه شده است. در مطالعه او شرایط مرزی ورق چهار طرف مفصل در نظر گرفته شده است و اثر پارامترهای متفاوت بررسی شده است.

هرچند تحقیقاتی در زمینه ارتعاشات ورق با جرم نقطه‌ای و یا جرم توزیع شده بصورت دوبعدی وجود دارد، در نظر گرفتن جرم بصورت یک نوار نازک و لحاظ کردن آن به صورت توزیع یک بعدی تاکنون در نظر گرفته نشده است. در این پژوهش ارتعاشات آزاد یک ورق یک سر گیردار به همراه جرم طولی توزیع شده روی آن بررسی شده است. این مسئله می‌تواند مدلی ساده از بال یک هواپیما باشد و توزیع جرم نیز متعلقات نصب شده روی بال مانند موتور و یا مخزن سوخت هستند. روابط این

است که جابجایی ورق یعنی (u, v, w) در هر سه راستا در نظر گرفته شود. دامنه هندسه صفحه بصورت $0 < x < C$ و $0 < y < L$ و $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$ تعریف می‌شود.

روابط حاکم

روش ریلی-ریتز بر پایه این فرض استوار است که فرم کلی جواب بصورت جمع ضربی از توابع معلوم تقریب زده می‌شود [۱۰]. توابع پایه اولیه بایستی شرایط مرزی هندسی را ارضاء کنند. مزیت استفاده از روش انرژی نسبت به معادله دیفرانسیل عدم نیاز به ارضای شرایط مرزی نیرویی است که در بسیاری از مسائل از جمله صفحه یک سر گیردار نیاز نیست توابع پایه اولیه شرایط مرزی پیچیده نیرویی را نیز ارضاء کنند. جنس صفحه چندلایه کامپوزیتی فرض شده است. توزیع مشخصات ماده در هر لایه بصورت ارتوتروپ فرض می‌شود. رابطه کرنش با منته‌های تنش در یک چندلایه بصورت رابطه (۱) است [۱۱].

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در این رابطه ماتریس سختی داخل صفحه مطابق معادله (۲) استخراج می‌شود [۱۱].

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2)$$

ماتریس کوپل بین سختی داخل صفحه با خارج صفحه مطابق معادله (۳) و همچنین سختی خمشی یا خارج از صفحه بر اساس رابطه (۴) بدست می‌آید [۱۱].

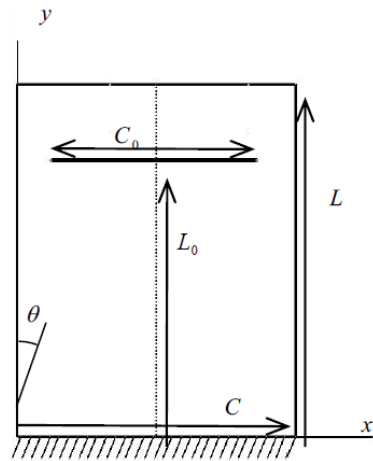
$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (3)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (4)$$

مسئله با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده، به کمک توابع تقریب اولیه برای ورق یک سر گیردار حل شده و به کمک روش ریلی-ریتز به مسئله مقدار ویژه منجر شده است. ابتدا دوری و نزدیکی جرم به سر گیردار بررسی شده است. ادامه با ثابت در نظر گرفتن فاصله جرم گسترده از سر گیردار ورق، اثر اندازه موثر جرم یعنی اندازه گستردگی بر فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. در مرحله بعد اثر افزایش جرم بر فرکانس‌های طبیعی در دو موقعیت متفاوت جرم بررسی شده است. در نهایت برای یک چند لایه با زاویه چینی $[\theta, -\theta, \theta, -\theta, \theta]$ اثر تغییر زاویه بر هر فرکانس طبیعی سازه در حالت ورق با جرم و بدون جرم مقایسه شده است و لایه چینی بهینه برای افزایش پایداری ارتعاشی ورق در محدوده‌های فرکانسی متفاوت پیشنهاد شده است.

تعریف مسئله

شکل ۱ ورق مستطیلی با عرض C ، طول L و ضخامت کلی h را نشان می‌دهد.



شکل ۱- هندسه ورق یک سر گیردار با جرم اضافه شده

شرایط مرزی ورق یک سر گیردار در نظر گرفته شده است بدین معنی که ورق از یک طرف در راستای عرض خود گیردار و از سه طرف دیگر آزاد است. به فاصله مشخص L_0 از لبه گیردار ورق جرمی بصورت توزیع متقارن یک‌بعدی بر روی ورق سوار شده است که گستردگی آن C_0 در نظر گرفته می‌شود. دستگاه مختصات عمومی در لبه صفحه تعریف شده است و مرکز آن در صفحه میانی ورق قرار دارد. در ادامه فرض بر این

$$T_{plate} = \frac{1}{2} \rho h \int_0^L \int_0^C \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^C I \left\{ \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy \quad (9)$$

که در رابطه (۹) دوران‌ها مطابق معادله (۱۰) تعریف می‌شوند [۱۳].

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (10)$$

همچنین ممان اینرسی مطابق معادله (۱۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (11)$$

برای انرژی جنبشی جرم اضافه شده سرعت ناشی از تغییر مکان‌های عرضی در محل جرم در نظر گرفته شده است. معادله (۱۲) این انرژی را نشان می‌دهد.

$$T_{mass} = \frac{1}{2} \int_{\frac{c-C_0}{2}}^{\frac{c+C_0}{2}} M_0 \left\{ \left(\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(x, y_0)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x, y_0)}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \quad (12)$$

جابجایی‌ها را به صورت بسط روابط (۱۳) در نظر می‌گیریم [۱۰].

$$u = \sum_i \sum_j a_{ij}(t) u_i(x) v_j(y)$$

$$v = \sum_r \sum_s b_{rs}(t) u_r(x) v_s(y) \quad (13)$$

$$w = \sum_m \sum_n q_{mn}(t) \phi_m(x) \psi_n(y)$$

صفحه در نظر گرفته شده از یک سر گیردار و از سه سمت دیگر آزاد است. به همین خاطر بر اساس مرجع [۱۰] توابع پایه اولیه را بصورت روابط (۱۴) الی (۱۹) در نظر می‌گیریم:

$$u_i(x) = \cos i \pi \frac{x}{c}, \quad v_j(y) = \sin \left(\frac{2j-1}{2} \right) \pi \frac{y}{L} \quad (14)$$

ماتریس \bar{Q}_{ij} برای هر لایه بر اساس زاویه θ آن محاسبه می‌شود که انحراف از راستای ۱ تک لایه است. روابط مربوطه در مرجع [۱۱] آورده شده‌اند. کرنش‌ها و انحنای صفحه میانی چندلایه نیز بصورت روابط (۵) تعریف می‌شوند [۱۱].

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

با توجه به تعریف انرژی کرنشی طبق رابطه (۶) می‌توان نوشت

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (6)$$

و با جاگذاری به رابطه کلی انرژی کرنشی برای یک ورق کامپوزیتی معادله (۷) بدست می‌آید [۱۲].

$$U = \int_0^L \int_0^C (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy} + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \quad (7)$$

انرژی جنبشی نیز مطابق رابطه (۸) دارای دو بخش انرژی جنبشی ورق کامپوزیتی و انرژی جنبشی برای جرم اضافه شده می‌باشد.

$$T_{total} = T_{plate} + T_{mass} \quad (8)$$

برای ورق انرژی جنبشی ناشی از تغییر مکان‌های عرضی و همچنین اینرسی‌های دورانی در نظر گرفته شده است. رابطه (۹) معادله حاکم به منظور استخراج انرژی جنبشی ورق را نشان می‌دهد [۱۳].

در رابطه (۲۰) T حداکثر انرژی جنبشی ورق و U حداکثر انرژی کرنشی است. تابع لاگرانژین سیستم $L = T - U$ می-باشد و معادلات لاگرانژ برای سه راستای u ، v و w به صورت روابط (۲۱) می-باشد [۱۰].

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{ij}} \right) - \frac{\partial L}{\partial a_{ij}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{b}_{rs}} \right) - \frac{\partial L}{\partial b_{rs}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{mn}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{mn}} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

به منظور تخمین فرکانس‌های طبیعی صفحه و بر اساس معادله حساب تغییراتی بالا، از روش ریلی-ریتز استفاده شده است. فرض حرکت هارمونیک ساده $(\bar{w} = e^{i\omega t} w)$ برای هر سه راستای u ، v و w در نظر گرفته شده است [۱۲]. بنابراین پس از جایگذاری روابط مربوط به توابع پایه در معادلات لاگرانژ، دستگاه معادلاتی بر حسب ضرایب a و b و q بدست می-آیند و مشتق‌گیری از این ضرایب منجر به شکل-گیری ماتریس‌های سختی و جرم می-شود. فرض کنید دستگاه معادلات لاگرانژی بر حسب q باشد آنگاه ماتریس‌های M و K مطابق با روابط (۲۲) و (۲۳) بدست می-آیند.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial U}{\partial q_1} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{\partial U}{\partial q_1} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial U}{\partial q_1} \right) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial U}{\partial q_n} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{\partial U}{\partial q_n} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial U}{\partial q_n} \right) \end{bmatrix} \quad (23)$$

که n و m تعداد جملات برای توابع $\phi(x)$ و $\psi(y)$ می-باشند. بر اساس ماتریس‌های جرم و سختی ساخته‌شده، معادله مقدار ویژه (۲۴) بدست می-آید [۱۲].

$$[[K] - \omega^2 [M]] \begin{Bmatrix} a_{ij} \\ b_{rs} \\ q_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (24)$$

$$u_r(x) = \cos r \pi \frac{x}{c}, \quad v_s(y) = \sin \left(\frac{2s-1}{2} \right) \pi \frac{y}{L} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \phi_m(x) &= \sqrt{2} \sin \left(\beta_m \frac{x}{c} + \frac{3}{4} \pi \right) \\ &+ \exp \left(-\beta_m \frac{x}{c} \right) + (-1)^{m+1} \exp \left[-\beta_m \left(1 - \frac{x}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \psi_n(y) &= \sqrt{2} \sin \left(\beta_n \frac{y}{L} - \frac{1}{4} \pi \right) \\ &+ \exp \left(-\beta_n \frac{y}{L} \right) + (-1)^{n+1} \exp \left[-\beta_n \left(1 - \frac{y}{L} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

که در روابط (۱۴) تا (۱۷) داریم؛

$$\beta_m = \left(m - \frac{3}{2} \right) \pi, \quad \beta_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \quad (18)$$

در رابطه (۱۶) $\phi(x)$ تابع شکل مود تیر با شرایط مرزی آزاد-آزاد و $\psi(y)$ در رابطه (۱۷) شکل مود تیر یک سر گیردار است. برای $m \leq 2$ مدهای جابجایی و دورانی در نظر گرفته شده است. بنابراین در رابطه (۱۹) $A = 2$ در نظر گرفته می-شود تا مقدار توابع $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ در $x = 0$ با مقدار تابع $\phi_m(x)$ سازگار باشد.

$$\phi_1(x) = A, \quad \phi_2(x) = A \left(1 - 2 \frac{x}{C} \right) \quad (19)$$

در توابع استفاده شده تمامی شرایط مرزی هندسی رعایت شده است یعنی در $y = 0$ ، $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ ، $u = v = w = 0$ می-باشد.

تعداد جمله‌های مورد نیاز در استفاده از توابع تقریب اولیه بستگی به تعداد فرکانس مورد نظر دارد. همچنین دقت فرکانس‌های محاسبه شده تعداد توابع پایه استفاده شده را تحت تاثیر قرار می-دهد.

در رفتار ارتعاشات آزاد صفحات به دلیل این که فرض می-شود صفحه نسبت به زمان حرکت تناوبی داشته باشد، کاربرد اصل تغییرات همپلتون برای حرکت صفحه بین زمان صفر و $\frac{\pi}{\omega}$ منجر به معادله حساب تغییراتی (۲۰) می-شود؛

$$\delta(T - U) = 0 \quad (20)$$

های محاسبه شده توسط دیگر مطالعات مقایسه شده و صحت آنها بررسی می‌شود. به دلیل استفاده مرجع [۱۴] از پارامتر فرکانس طبیعی بی‌بعد شده، این رابطه به صورت رابطه (۲۸) تعریف می‌شود:

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \quad (28)$$

در رابطه (۲۸) ρh چگالی بر واحد سطح ورق است و D_0 سختی خمشی مرجع برای ورق است که مطابق رابطه (۲۹) تعریف می‌شود:

$$D_0 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (29)$$

در حالت تحلیل چندلایه، ضخامت تک تک لایه‌ها برابر در نظر گرفته می‌شود. ماده کامپوزیت مورد بررسی ترکیب الیاف با چسب رزین است. نوع الیاف یک بار الیاف شیشه و بار دیگر الیاف گرافیت در نظر گرفته شده است. دلیل این انتخاب کاربرد فراوان این دو ماده در صنعت می‌باشد که به همین دلیل مشخصات مواد آنها به راحتی در دسترس است و همچنین می‌توان از پژوهش‌های پیشین [۱۴] به منظور صحت‌گذاری نتایج بهره جست. جدول ۱ مشخصات مکانیکی این دو ماده را نشان می‌دهد که از مرجع آورده شده است. این جدول نشان می‌دهد که درجه ارتوتروپیک بودن این دو ماده متفاوت است. کامپوزیت E-glass/Epoxy (E/E) نسبتاً دارای ارتوتروپیک ضعیف است در حالی که کامپوزیت Graphite/Epoxy (G/E) دارای ارتوتروپیک قوی‌تری می‌باشد. معیار سنجش میزان ارتوتروپیک بودن را با نسبت $\frac{E_1}{E_2}$ نشان می‌دهند.

جدول ۱- ویژگی مواد برای ورق‌های مطالعه شده [۱۴] و [۱۵]

نوع ماده	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}	ρ
E-Glass/Epoxy	۶۰/۷	۲۴/۸	۱۱/۹۹	۰/۲۳	۱۹۰۰
Graphite/Epoxy	۱۳۸	۸/۹۶	۷/۱	۰/۳	۱۵۲۰

به دلیل این که سهم اصلی انرژی کرنشی ورق ناشی از خمش خارج صفحه است اضافه کردن تعداد جملات توابع تقریب u و v تفاوت چشمگیری در نتایج ایجاد نخواهد کرد. در این پژوهش همگرایی نتایج بر اثر اضافه کردن جملات w در

که در این رابطه K و M ماتریس‌های سختی و جرم هستند. ابعاد ماتریس‌های کلی و مسئله مقدار ویژه به تعداد ترم کلی که در نظر گرفته شده است بستگی دارد. پس از حل این مسئله مقدار ویژه خطی، مقادیر ویژه همان فرکانس‌های طبیعی ورق و بردارهای ویژه شکل مودهای متناظر با همان فرکانس طبیعی هستند.

ارتعاشات اجباری - فلاتر

در رفتار ارتعاشات اجباری صفحه، کاربرد اصل تغییرات همیلتون برای حرکت صفحه منجر به معادله (۲۵) می‌شود

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\delta T - \delta U) + \delta T - \delta W] dt = 0 \quad (25)$$

در رابطه (۲۵) δT تغییرات انرژی جنبشی ورق و δU تغییرات انرژی کرنشی است. تغییرات کار مجازی انجام شده توسط نیروهای ناپایستار با δW نشان داده شده است. تغییرات کار مجازی بوسیله نیروهای ناپایستار با رابطه (۲۶) نشان داده می‌شود.

$$\delta W = \int \Delta P \delta w dA \quad (26)$$

که در این رابطه ΔP نیروی آیرودینامیکی بر روی ورق بوده و مطابق با "نئوری پیستون" بدست می‌آید؛

$$\Delta P = P - P_\infty = -\frac{2q}{\sqrt{Ma^2 - 1}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{Ma^2 - 2}{Ma^2 - 1} \frac{1}{V_a} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (27)$$

در رابطه (۲۷) Ma عدد ماخ و $q = \frac{\rho_a V_a^2}{2}$ فشار دینامیکی می‌باشد. با حل رابطه همیلتون و در نظر گرفتن اثر خارجی از رابطه (۲۷) تحلیل فلاتر ورق بر حسب سرعت جریان بدست می‌آید.

نتایج

نتایج این پژوهش برای دو حالت ورق کامپوزیتی تک لایه با زاویه الیاف θ و چند لایه با لایه‌چینی آورده شده است. در صورتی که $\theta = 0$ باشد، E_1 در راستای محور y قرار دارد و مقادیر دیگر θ میزان انحراف از این محور را نشان می‌دهد. به منظور اعتبارسنجی نتایج ابتدا فرکانس‌های طبیعی با فرکانس-

نسبت منظری $\left(\frac{L}{C} = 1\right)$ در نظر گرفته شده است. به منظور مقایسه و صحت‌گذاری، نتایج حاصل از پژوهش مرجع و نتایج حاصل از روش المان محدود از همین مرجع آورده شده است.

جدول ۳- پارامتر فرکانس طبیعی تک لایه E/E و $L/C = 1$

روش	θ	Ω_1	Ω_2	Ω_3
مطالعه حاضر	۰	۳/۶۸	۶/۹۷	۱۸/۹
نتایج مرجع [۱۴]	۰	۳/۵	۶/۹	۱۸/۴
حل المان محدود	۰	۳/۳۷	۶/۸	۱۸/۱
مطالعه حاضر	۴۵	۲/۷	۷/۲	۱۶/۶
نتایج مرجع [۱۴]	۴۵	۲/۶	۷/۱۱	۱۶/۱۳
حل المان محدود	۴۵	۲/۵	۶/۹۱	۱۵/۲۱
مطالعه حاضر	۹۰	۲/۳۵	۶/۲	۱۴/۴
نتایج مرجع [۱۴]	۹۰	۲/۲۴	۶/۱۳	۱۴
حل المان محدود	۹۰	۲/۲۱	۶/۰	۱۳/۸

لازم به ذکر است ورق در روش المان محدود در نرم‌افزار آباکوس با المان Shell به نام S8R مدل شده است که یک المان سه‌بعدی ۸ گره‌ای است. توابع تقریب المان از نوع مرتبه دوم است و تعداد ۱۰۰۰ المان برای ورق در نظر گرفته شده است.

جدول ۴ نتایج را برای یک ورق پنج لایه از جنس G/E و نسبت منظری ورق $\frac{L}{C} = 2$ نشان می‌دهد. این چند لایه به صورت $[\theta, -\theta, \theta, -\theta, \theta]$ در نظر گرفته شده است که به ازای سه مقدار متفاوت برای θ پارامتر فرکانس طبیعی مقایسه شده است.

جدول ۴- پارامتر فرکانس طبیعی پنج لایه G/E و $L/C = 2$

روش	θ	Ω_1	Ω_2	Ω_3
مطالعه حاضر	۳۰	۲/۶	۱۰/۴۱	۱۵/۷۲
نتایج مرجع [۱۴]	۳۰	۲/۴۴	۱۰/۳۱	۱۵/۲۶
حل المان محدود	۳۰	۲/۴	۱۰/۲	۱۴/۶۳
مطالعه حاضر	۴۵	۱/۷۹	۱۰/۱۸	۱۱/۳۳
نتایج مرجع [۱۴]	۴۵	۱/۷	۱۰/۰۸	۱۱/۱۹
حل المان محدود	۴۵	۱/۶۵	۹/۸۶	۱۰/۲
مطالعه حاضر	۶۰	۱/۳	۷/۴۵	۹/۷
نتایج مرجع [۱۴]	۶۰	۱/۱۸	۷/۲۶	۹/۴۷
حل المان محدود	۶۰	۱/۱	۷/۱۱	۹/۱۷

دو راستای x و y آورده شده است و تعداد جملات u و v در تمامی تحلیل‌ها یکسان در نظر گرفته شده است. درجه ارتوتروپی ماده ورق می‌تواند بر سرعت همگرایی موثر باشد. به عنوان نمونه در این پژوهش استفاده از ماده با جنس E/E موجب همگرا شدن سریع‌تر نتایج در مقایسه با ماده G/E شده است که این تفاوت در مرجع [۱۴] نیز وجود دارد.

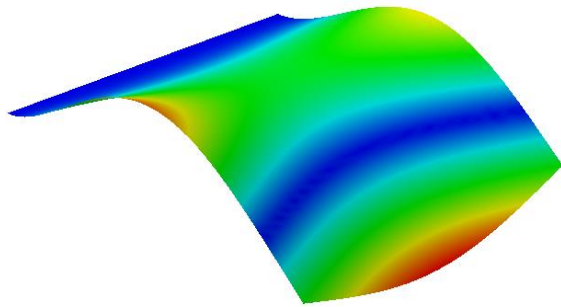
جدول ۲ یک نمونه از همگرایی نتایج را برای یک ورق تک لایه به ازای استفاده از تعداد توابع تقریب متفاوت نشان می‌دهد. این ورق تک لایه از جنس E/E ، با زاویه الیاف $\theta = 0$ ، ضخامت $h = 0.001m$ و هندسه مربعی $\left(C = \frac{1}{4}m, L = \frac{1}{4}m\right)$ در نظر گرفته شده است. فرکانس‌های f_1 تا f_5 بر حسب Hz هستند.

جدول ۲- مطالعه همگرایی برای یک تک لایه

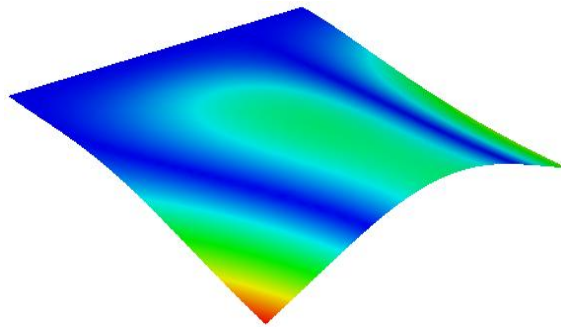
تعداد جملات w	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$m=2, n=1$	۹/۶۹	۲۸/۰۸	۸۶۴۱	۱۲۱۶۸	-
$m=3, n=1$	۹/۶۷	۲۸/۰۸	۱۰۲۳	۸۶۴۱	۱۲۱۶۸
$m=3, n=2$	۹/۶۲	۲۴/۵۴	۵۸/۱۴	۹۳/۹۱	۹۹/۳
$m=4, n=2$	۹/۶۲	۲۴/۴	۵۸/۱	۹۲/۲	۹۹/۳
$m=5, n=2$	۹/۶۲	۲۴/۴۳	۵۸/۱	۹۲/۲۵	۹۹/۲۶
$m=4, n=3$	۹/۶۱	۲۴/۴۱	۵۸/۱۴	۹۰/۳۵	۹۹/۱۴
$m=5, n=3$	۹/۶۰	۲۴/۴۱	۵۸/۱۰	۹۰/۳۵	۹۹/۱۱
$m=4, n=4$	۹/۶۰	۲۴/۳۰	۵۸/۱۴	۹۰/۲۴	۹۹/۰۱
$m=5, n=4$	۹/۵۹	۲۴/۳۰	۵۸/۱۰	۹۰/۲۳	۹۸/۹۸

یکی از برجستگی‌های این مقاله استفاده از توابع تقریب سازگار با ورق یک سرگیردار است. همانطور که جدول ۲ نشان می‌دهد به منظور همگرایی پنج فرکانس اول ورق با دقت 0.1% ، استفاده از ۱۲ جمله کافی است ($m=4, n=3$) در حالی که مطابق مرجع در صورت استفاده از چند جمله‌ای‌های جبری برای ورق یک سرگیردار، حداقل ۱۰۰ جمله نیاز است تا نتایج همگرا شوند. به دلیل این که تعداد توابع پایه اولیه مورد نیاز برای همگرایی ورق چندلایه شبیه به ورق تک لایه است، در این پژوهش ۱۲ جمله برای تقریب w به منظور استخراج فرکانس‌های طبیعی در نظر گرفته شده است.

در جدول ۳ نتایج برای یک ورق تک‌لایه به ازای زاویه الیاف متفاوت آورده شده است. جنس انتخاب شده E/E است و



مود سوم



مود چهارم

شکل ۲ - مودهای ورق یک سر گیردار

جدول ۵ - افت پارامتر فرکانس طبیعی بر اثر جرم اضافه شده

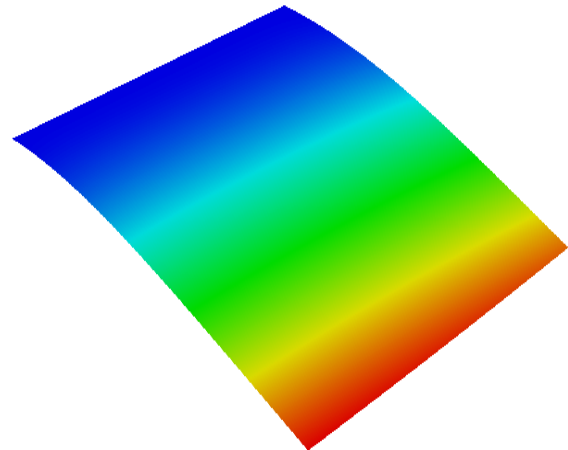
نوع ورق	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
مطالعه حاضر					
ورق بدون جرم	۴۰	۱۰۶	۲۴۱	۳۰۲	۳۹۳
ورق با جرم در سر آزاد	۲۵	۶۹	۱۷۲	۱۹۷	۲۶۸
درصد کاهش فرکانس	%۳۸	%۳۵	%۲۹	%۳۵	%۳۲
حل المان محدود					
ورق بدون جرم	۳۸	۱۰۵	۲۳۳	۳۰۶	۳۶۶
ورق با جرم در سر آزاد	۲۲	۶۵	۱۷۵	۱۹۷	۲۶۹
درصد کاهش فرکانس	%۴۲	%۳۸	%۲۵	%۳۶	%۲۷

نمودار شکل ۳ نسبت فرکانس طبیعی به فرکانس ورق بدون جرم را برای چهار فرکانس اول به ازای مقادیر متفاوت $\frac{L_0}{L}$ نشان می‌دهد. در این نمودار f_p نشان دهنده فرکانس ورق بدون جرم اضافه شده و f نشان دهنده فرکانس همان ورق با جرم اضافه شده بر حسب Hz است. این بررسی نشان می‌دهد که اولاً اضافه کردن جرم لزوماً منجر به کاهش فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سیستم خواهد شد که بدیهی

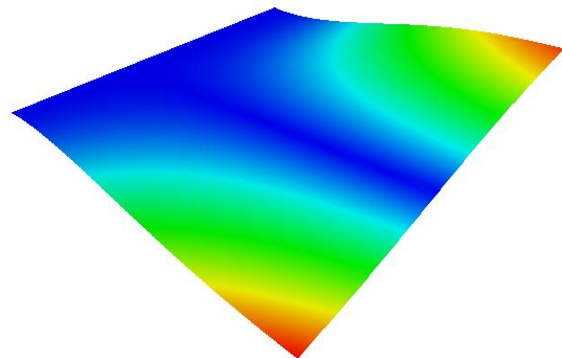
در ادامه به دلیل این که کار مشابهی وجود ندارد که گستردگی جرم اضافه شده روی ورق را در یک بعد در نظر بگیرد، نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج حاصل از حل به کمک روش المان محدود مقایسه می‌شود.

ابتدا اثر فاصله جرم اضافه شده تا سر گیردار ورق بررسی می‌گردد. جرم اضافه شده در حداکثر فاصله می‌تواند در سر گیردار قرار گیرد. بنابراین جرم به اندازه $M_0 = \frac{M}{2}$ و $C_0 = C$ در راستای y حرکت داده شده و نتایج ثبت شده است.

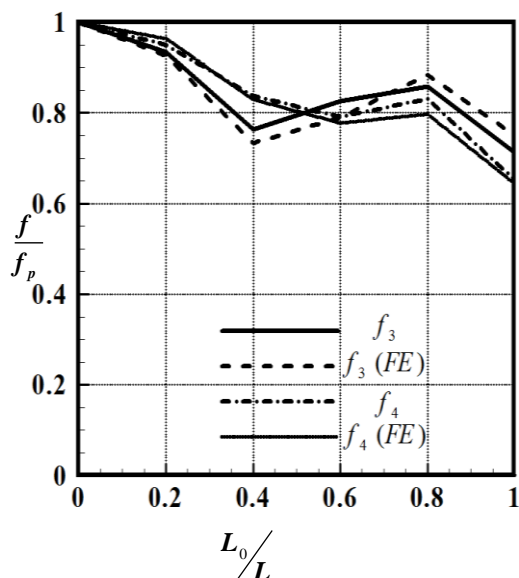
شکل ۲ چهار مود اول یک ورق کامپوزیتی مربعی بدون جرم اضافه شده را نشان می‌دهد که غالب تغییر شکل مود اول و سوم آن خمشی و مود دوم آن پیچشی است. جدول ۵ مقادیر پنج فرکانس اول ورق در حالت با جرم و بدون جرم را نشان می‌دهد که این نتایج به منظور صحت‌گذاری با نتایج حل المان محدود مقایسه شده است. درصد کاهش هر فرکانس نسبت به حالت بدون جرم نیز آورده شده است.



مود اول

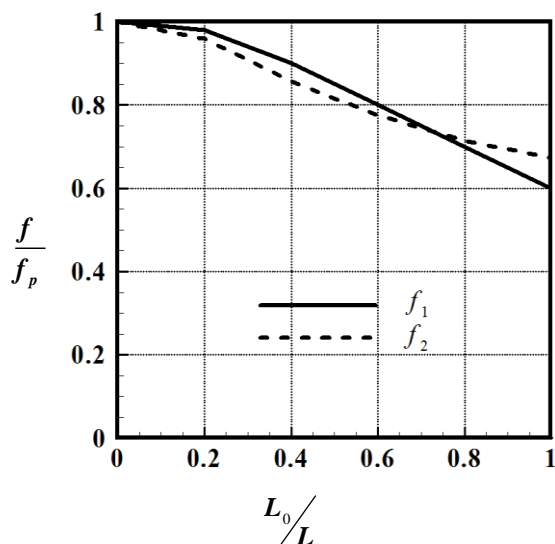


مود دوم



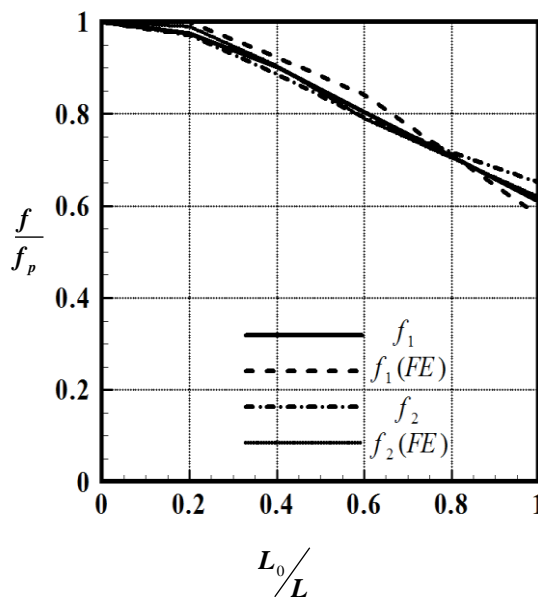
شکل ۴ - تغییرات فرکانس‌های سوم و چهارم برای L_0 با $\frac{L}{C} = 1$

رفتار نشان داده شده برای چهار فرکانس اول به ازای تغییر موقعیت جرم اضافه شده از سر گیردار برای نسبت‌های منظره متفاوت بررسی شده است و تا زمانی که موده‌های پیچشی و خمشی جابجا نشده‌اند روند تغییرات به همین شکل برقرار است. شکل ۵ تحلیل مشابه را برای ورق با $\frac{L}{C} = 2$ نشان می‌دهد که تغییرات فرکانس‌های اول و دوم شبیه به حالت قبل است.



شکل ۵ - تغییرات فرکانس‌های اول و دوم برای L_0 با $\frac{L}{C} = 2$

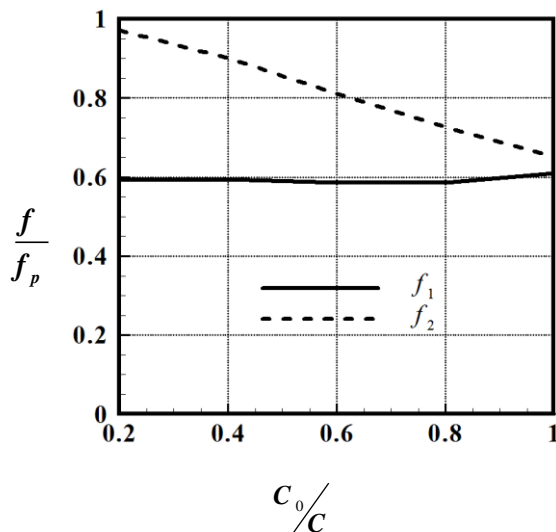
است. ثانیاً برای فرکانس‌های اول و دوم، هرچه جرم اضافه شده از سر گیردار دور شود، فرکانس‌های ورق کاهش می‌یابد. شدت این کاهش از حدود $\frac{L_0}{L} = 0.8$ برای فرکانس اول شدیدتر می‌شود و به همین خاطر نمودارهای دو فرکانس یکدیگر را در این محدوده قطع می‌کنند.



شکل ۳ - تغییرات فرکانس‌های اول و دوم برای L_0 با $\frac{L}{C} = 1$

رفتار فرکانس سوم و چهارم با دو فرکانس اول اندکی متفاوت است. برای فرکانس سوم، در محدوده $\frac{L_0}{L} = 0.4$ تا $\frac{L_0}{L} = 0.8$ با دور کردن جرم از سر گیردار ورق، فرکانس سوم ورق افزایش می‌یابد. این رفتار به دلیل قرارگیری جرم اضافه شده در محدوده‌ای از صفحه است که مانند گره عمل می‌کند و ورق در این محدوده برای مود سوم جابجایی نسبی کمتری دارد. بنابراین انرژی جنبشی ذخیره شده در جرم کمتر خواهد بود و این پدیده منجر به افزایش فرکانس نسبت به مقادیر دیگر می‌شود. این رفتار با این شدت برای مود چهارم مشاهده نشده است و تنها از $\frac{L_0}{L} = 0.6$ به $\frac{L_0}{L} = 0.8$ فرکانس چهارم اندکی افزایش را تجربه می‌کند. تمامی این تغییرات در مدل المان محدود نیز مشاهده شده است (شکل ۴).

می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد برای مود اول تغییرات C_0 چندان اثری بر این فرکانس ندارد در حالی که با افزایش C_0 فرکانس دوم کاهش می‌یابد. دلیل این کاهش فرکانس قرارگرفتن نقطه اثر جرم اضافه شده در لبه‌های آزاد ورق است و چون این مود پیچشی است، سهم انرژی جنبشی جرم اضافه شده بیشتر می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه‌گیری کرد که برای موده‌های پیچشی هرچه جرم اضافه شده متمرکزتر باشد از نظر پایداری ارتعاشی وضعیت ورق بهتر است.



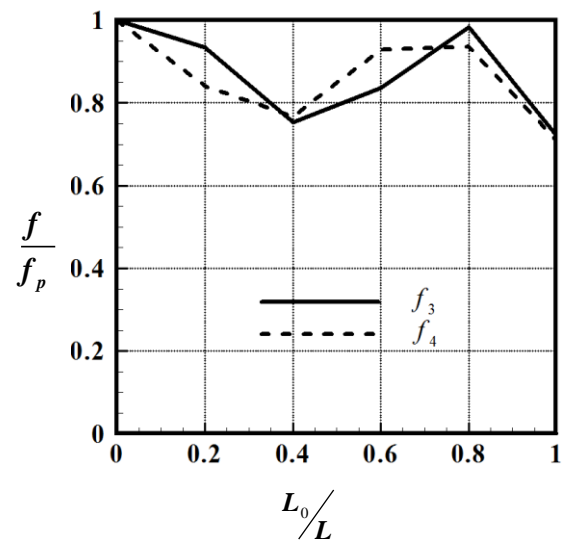
شکل ۷ - تغییرات فرکانس‌های اول و دوم برای C_0 با $L/C = 1$

در بررسی اندازه C_0 ، رفتار فرکانس سوم و چهارم شبیه به دو فرکانس اول است. شکل ۸ تغییرات فرکانس سوم و چهارم را نشان می‌دهد. به صورت کلی با نگاهی به شکل ۸ می‌توان گفت در صورتی که جرم اضافه شده بر روی بخشی از ورق باشد که پاسخ یا شکل مود در آن مکان بزرگتر از بقیه ورق باشد، این دامنه زیاده‌تر نوسانات منجر به سرعت گرفتن نسبی جرم در آن ناحیه شده و انرژی جنبشی جرم اضافه شده بیشتر می‌شود و همین افزایش انرژی جنبشی باعث کاهش فرکانس می‌شود. در این حالت نیز شبیه به حالت بررسی L_0 ، تغییر نسبت منظری ورق اثر چندانی بر این رفتار ندارد.

در شکل‌های ۹ و ۱۰ اثر افزایش جرم در یک موقعیت مشخص بررسی شده است. شکل ۹ نسبت فرکانس‌های ورقی را با جرم M نشان می‌دهد که جرم M_0 با مشخصات $(L_0 = L, C_0 = C)$ روی آن قرار داده شده است.

در این حالت همان جرم قبلی یعنی $M_0 = \frac{M}{4}$ به ورق اضافه شده است. لازم به ذکر است که با دو برابر شدن L ، M نیز دو برابر می‌شود. از این نمودار پیداست که روند تغییرات فرکانس شبیه به حالت‌های قبل است و تنها حساسیت‌ها کمتر شده است. به عنوان مثال برای فرکانس اول وقتی که جرم اضافه شده در محل سر آزاد ورق قرار دارد، نسبت فرکانس به فرکانس ورق بدون جرم اضافه شده برای $\frac{L}{C} = 1$ حدود ۰/۶ است در حالی که برای $\frac{L}{C} = 2$ حدود ۰/۷۵ می‌باشد.

برای ورق جدید یعنی شکل ۶ نمودار زیر تغییرات فرکانس‌های سوم و چهارم را نشان می‌دهد.

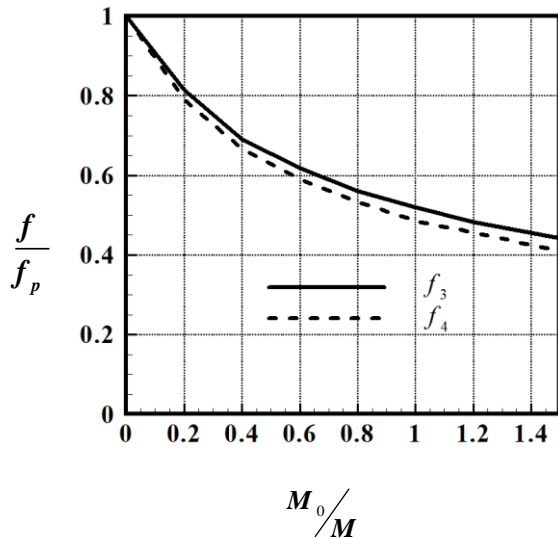


شکل ۶ - تغییرات فرکانس‌های سوم و چهارم برای L_0 با $L/C = 1$

همانطور که از این نمودار مشخص است در حالت $\frac{L}{C} = 2$ دامنه نوسانات نسبت به حالت $\frac{L}{C} = 2$ کمتر است و فرکانس چهارم نیز از حالت $\frac{L_0}{L} = 0.4$ به $\frac{L_0}{L} = 0.6$ بر خلاف حالت قبل افزایش دارد.

به منظور بررسی اثر پهنای جرم اضافه شده، جرمی با اندازه برابر در عرض ورق با تراکم‌های متفاوت قرار داده شده و اثر آن بر چهار فرکانس اول ورق بررسی شده است. همانطور که شکل ۷ نشان می‌دهد طول جرم که به صورت $\frac{C_0}{C}$ روی محور افقی نشان داده شده است محل اثر جرم اضافه شده را نشان

شده است. در حالی که جرم اضافه شده و ورق با مشخصات $[\theta, -\theta, \theta, -\theta, \theta]$ برای مقادیر متفاوت θ در نظر گرفته شده است. در حالی که جرم اضافه شده و ورق با مشخصات $(L_0 = L, C_0 = C, L = 1m, C = 1m, M_0 = \frac{1}{2}M)$ فرض شده است، مقدار کاهش فرکانسها با حالت ورق بدون جرم مقایسه شده و تاثیر زاویه لایه چینی بر تک تک فرکانسها بررسی می شود.

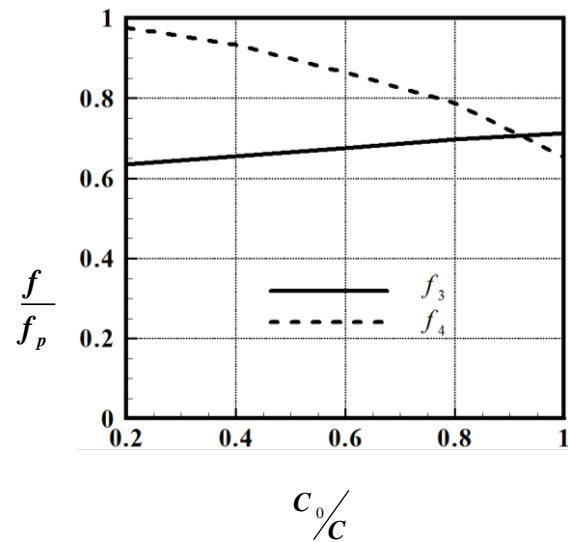


شکل ۱۰ - تغییرات فرکانسهای سوم و چهارم برای M_0 با $\frac{L}{C} = 1$

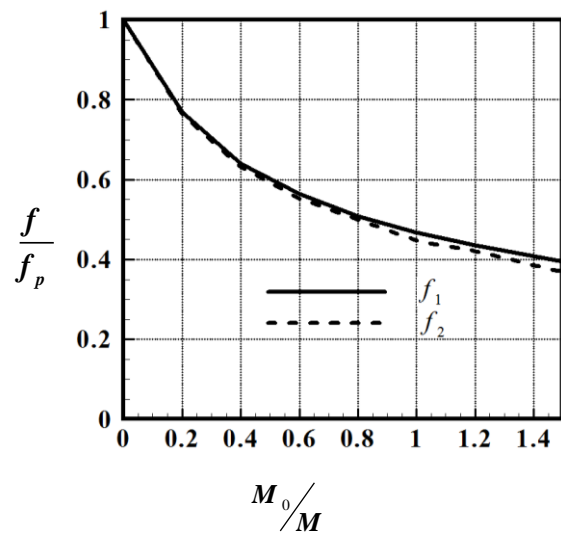
شکل ۱۱ این تغییرات را برای فرکانس اول نشان می دهد. نتایج ورق بدون جرم با مرجع [۱۴] مطابقت دارد. از این نمودار مشخص است که جرم اضافه شده روند نمودار را تغییر نمی دهد و شبیه به حالت ورق بدون جرم، اگر سازه بخواهد در بار ارتعاشی در محدوده فرکانس اول را تجربه کند بهترین زاویه لایه چینی، لایه هایی با زوایای کوچک و نزدیک صفر است.

شکل ۱۲ تغییرات فرکانس دوم ورق با جرم و بدون جرم را برای لایه چینی های متفاوت نشان می دهد. به دلیل پیچشی بودن مود دوم بهترین زاویه به منظور داشتن حداکثر فرکانس در حالت ورق با جرم شبیه به ورق بدون جرم حدود ۴۵ درجه می باشد.

شکل ۱۳ تغییرات فرکانس سوم ورق با جرم و بدون جرم را برای لایه چینی های متفاوت نشان می دهد. از این نمودار مشخص است که بهترین زاویه لایه چینی به منظور داشتن حداکثر فرکانس در حالت ورق با جرم با ورق بدون جرم متفاوت است.



شکل ۸ - تغییرات فرکانسهای سوم و چهارم برای C_0 با $\frac{L}{C} = 1$



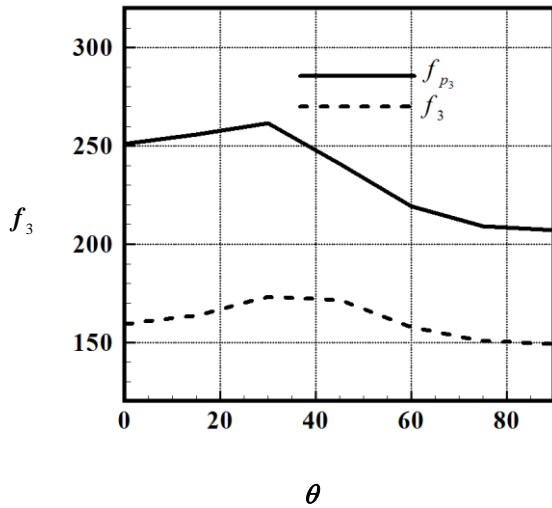
شکل ۹ - تغییرات فرکانسهای اول و دوم برای M_0 با $\frac{L}{C} = 1$

این روند کاهشی با نرخ کاهنده برای موقعیت های متفاوت L_0, C_0 و همچنین برای نسبت های منطقی دیگر ورق نیز مشاهده می شود.

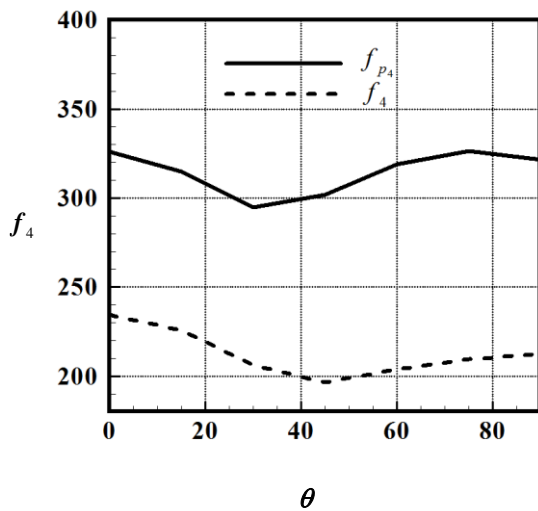
مطابق این پژوهش و پژوهش های پیشین، هرچه زاویه لایه های کامپوزیت به سر آزاد متمایل باشند (در اینجا یعنی زاویه نزدیک صفر باشد) فرکانس اول ورق چندلایه بالاتر خواهد بود. در اینجا اثر جرم اضافه شده بر تک تک فرکانسها بررسی می شود. پنج لایه مورد بررسی با ترتیب لایه چینی

همانطور که شکل ۱۳ نشان می‌دهد زاویه بهینه برای پایدار بودن ورقی که فرکانس سوم آن مهم می‌باشد حدود ۳۵ درجه است.

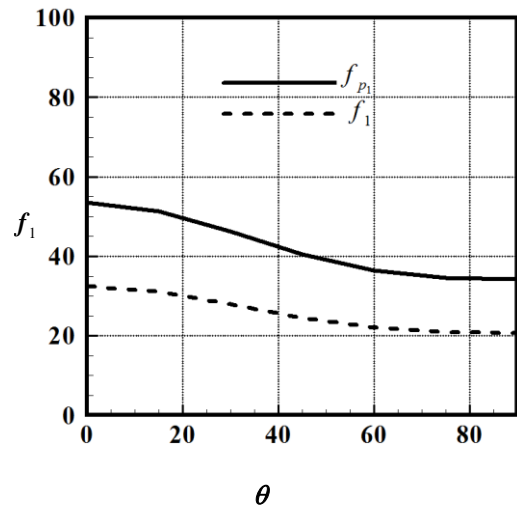
شکل ۱۴ تغییرات فرکانس چهارم ورق را در دو حالت برای لایه‌چینی‌های متفاوت نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که اثر زاویه لایه‌چینی برای ورق در حالت با جرم و بدون جرم متفاوت است. به عنوان مثال در حالت ورق بدون جرم اضافه شده، فرکانس چهارم در دو زاویه صفر و ۷۵ درجه حدود ۳۲۶ هرتز است در حالی که برای ورق با جرم این فرکانس در زاویه صفر، برابر ۲۳۴ هرتز و در زاویه ۷۵ درجه ۲۰۹ هرتز است.



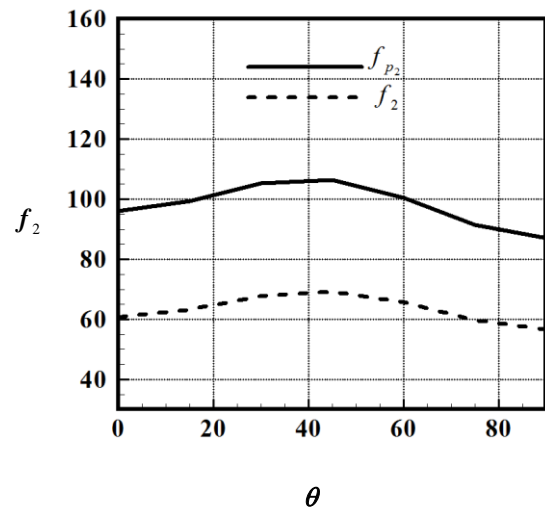
شکل ۱۳ - اثر زاویه لایه چینی بر فرکانس سوم



شکل ۱۴ - اثر زاویه لایه چینی بر فرکانس چهارم



شکل ۱۱ - اثر زاویه لایه چینی بر فرکانس اول



شکل ۱۲ - اثر زاویه لایه چینی بر فرکانس دوم

آنالیز ارتعاشات اجباری - فلاتر

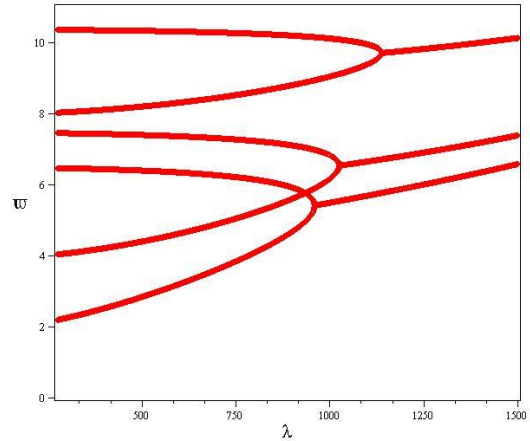
در این مرحله نتایج حاصل از حل ارتعاشات اجباری را صحه‌گذاری می‌کنیم. در این مثال ورق کامپوزیتی از پنج لایه با آرایش $[0,90,0,90,0]$ و دارای شرایط تکیه‌گاه ساده می‌باشد [۱۶]. مشخصات ورق به شرح ذیل می‌باشد؛

$$E_L/E_T=40, G_{LT}/E_T=0/6, G_{TT}/E_T=0/5, \nu_{LT}=0/25$$

در این مقاله فرکانس طبیعی بی‌بعد $\bar{\omega}$ و فشار آیرودینامیکی بحرانی بی‌بعد λ طبق مرجع [۱۶] تعریف می‌-

آیرو دینامیکی فلاتر برای زاویه الیاف از صفر تا ۱۵ درجه روند کاهشی، از ۱۵ تا ۴۵ درجه روند افزایشی و از ۴۵ تا ۷۵ درجه دوباره روند کاهشی را دارد. تغییرات فرکانس فلاتر به مانند فشار آیرو دینامیکی فلاتر روند یکنواختی ندارد بطوریکه برای زاویه الیاف از صفر تا ۱۵ درجه روند افزایشی و از ۱۵ تا ۳۰ درجه روند کاهشی و از ۳۰ تا ۴۵ درجه افزایشی و سپس کاهشی است.

گردد. نتایج حل برای ورق با مشخصات مذکور در شکل ۱۵ نشان داده شده است. مقایسه فشار آیرو دینامیکی بحرانی بی بعد و فرکانس در جدول ۶ نشان می دهد نتایج حاصل از حل برای صحنه گذاری فلاتر بر روی ورق کامپوزیت قابل قبول است.



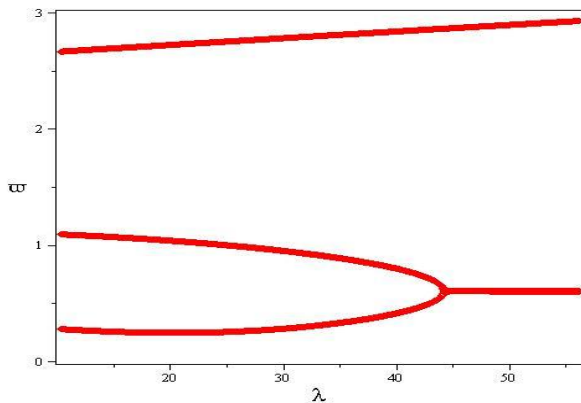
شکل ۱۵- فرکانس بی بعد بر حسب فشار آیرو دینامیکی بحرانی

بی بعد فلاتر

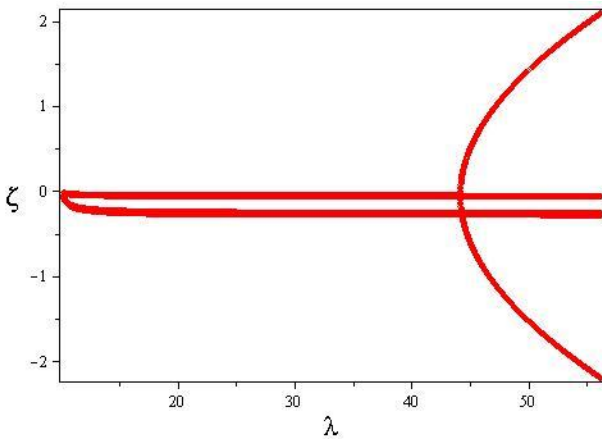
جدول ۶- مقایسه فشار آیرو دینامیکی بحرانی بی بعد و فرکانس بی بعد

λ		$\bar{\omega}$	
مطالعه حاضر	مرجع [16]	مطالعه حاضر	مرجع [16]
۹۵۰٫۱	۹۱۹	۵٫۴۲۹	۵٫۴۰۶
۱۰۲۵	۹۹۸	۶٫۵۴۸	۶٫۵۵۷
۱۱۳۵	۱۰۸۹	۹٫۷۱۴	۹٫۷۴۱

(الف)



(ب)



شکل ۱۶- الف) فرکانس بی بعد فلاتر بر حسب فشار آیرو دینامیکی بی بعد، ب) دمپینگ بر حسب فشار آیرو دینامیکی بی بعد

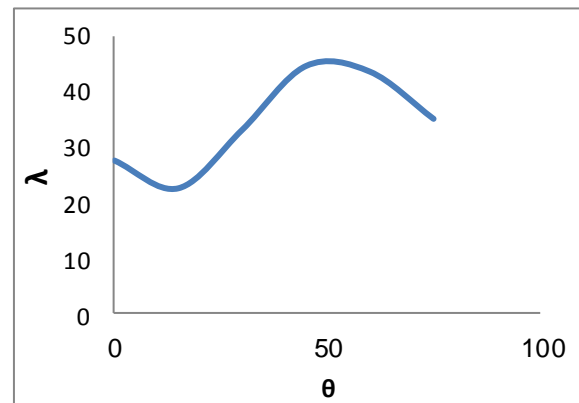
در مرحله بعد به آنالیز ورق یک سر گیردار که در انتهای آزاد آن جرم گسترده نصب گردیده است، پرداخته می شود. در این بخش اثر لایه چینی کامپوزیت بر فشار آیرو دینامیکی فلاتر بررسی شده است. در این بخش ورق از پنج لایه کامپوزیت به صورت $[0,90,0,90,0]$ در نظر گرفته شده است که به ازای مقادیر متفاوت برای θ (صفر تا ۷۵ درجه) پارامتر فشار آیرو دینامیکی بی بعد فلاتر و فرکانس فلاتر آنالیز شده است. شکل ۱۶ تغییرات فرکانس بی بعد و دمپینگ را بر حسب سرعت جریان برای زاویه ۶۰ درجه نشان می دهد. در شکل ۱۷ تغییرات فشار آیرو دینامیکی بی بعد و فرکانس فلاتر بر حسب تغییرات زاویه الیاف کامپوزیت نشان داده شده است. فشار

- برای ورق با جرم اضافه شده روی آن بهترین زاویه لایه‌چینی به منظور داشتن حداکثر فرکانس برای فرکانس اول صفر درجه، فرکانس دوم ۴۵ درجه، فرکانس سوم ۳۵ درجه و فرکانس چهارم نیز همان صفر درجه است.
- در مرحله بعد به بررسی اثر زاویه الیاف کامپوزیت بر فلاتر پرداخته شد. فشار آیرودینامیکی فلاتر برای زاویه الیاف از صفر تا ۱۵ درجه روند کاهشی، از ۱۵ تا ۴۵ درجه روند افزایشی و از ۴۵ تا ۷۵ درجه دوباره روند کاهشی را دارد. تغییرات فرکانس فلاتر به مانند فشار آیرودینامیکی فلاتر روند یکنواختی ندارد بطوریکه برای زاویه الیاف از صفر تا ۱۵ درجه روند افزایشی و از ۱۵ تا ۳۰ درجه روند کاهشی و از ۳۰ تا ۴۵ افزایشی و سپس کاهشی است.

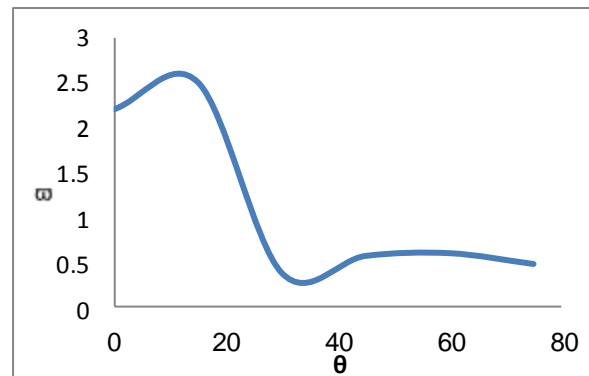
منابع و مراجع

- [1] A. Alibeigloo, M. Shakeri, and M. Kari, "Free vibration analysis of antisymmetric laminated rectangular plates with distributed patch mass using third-order shear deformation theory", Ocean Engineering, vol. 35, pp. 183-190, 2008.
- [2] S. Farhadi and S. Hosseini-Hashemi, "Effect of a Bonded Patch on Aeroelastic Behavior of Cantilevered Plates", Journal of Applied Mathematics, vol. 2010, 2010.
- [3] D. Gorman, "Free vibration analysis of cantilever plates by the method of superposition", Journal of Sound and Vibration, vol. 49, pp. 453-467, 1976.
- [4] C. G. Boay, "Frequency analysis of rectangular isotropic plates carrying a concentrated mass", Computers & structures, vol. 56, pp. 39-48, 1995.
- [5] O. Kopmaz and S. Telli, "Free vibrations of a rectangular plate carrying a distributed mass", Journal of sound and vibration, vol. 251, pp. 39-57, 2002.
- [6] W. Wong, "The effects of distributed mass loading on plate vibration behavior", Journal of Sound and Vibration, vol. 252, pp. 577-583, 2002.
- [7] R. A. Alashti and R. Alibakhshi, "Free Vibration of Simply Supported Rectangular

(الف)



(ب)



شکل ۱۷ - الف) فشار آیرودینامیکی بی‌بعد فلاتر بر حسب زاویه،
ب) فرکانس بی‌بعد فلاتر بر حسب زاویه

نتیجه‌گیری

در این پژوهش اثر اضافه کردن جرم یک‌بعدی بر فرکانس‌های طبیعی ورق یک‌سر گیردار بررسی شده است. بطور خلاصه موارد زیر را می‌توان به عنوان نتیجه‌گیری برشمرد.

- با افزایش فاصله جرم اضافه شده از سر گیردار، فرکانس اول و دوم کاهش یافته و فرکانس‌های سوم و چهارم رفتار کاهشی، افزایشی و سپس کاهشی دارند.
- با اضافه کردن طول جرم اضافه شده، فرکانس‌های اول و سوم چندان تغییری ندارند در حالی که فرکانس دوم و چهارم کاهش می‌یابند.
- اضافه کردن اندازه جرم باعث کاهش هر چهار فرکانس می‌شود در حالی که نرخ این کاهش نیز کاهش یافته است.

- with free edges*", Composite structures, vol. 7, pp. 191-204, 1987.
- [13] L. In and L. Jung-Jin, "*Vibration analysis of composite wing with tip mass using finite elements*", Computers & structures, vol. 47, pp. 495-510, 1993.
- [14] Y. Narita and A. Leissa, "*Frequencies and mode shapes of cantilevered laminated composite plates*", Journal of sound and vibration, vol. 154, pp. 161-172, 1992.
- [15] M. Aydogdu and S. Filiz, "*Vibration analysis of symmetric laminated composite plates with attached mass*", Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 32, No. 2, pp. 136-145, 2016.
- [16] Singha, M. K. and Ganapathi, M., "*parametric study on supersonic flutter behavior of laminated composite skew flat panels*", Composite Structures, Vol 69, No.9, PP.55-63, 2005.
- Composite Plates with Patch Mass*", Journal of Mechanical Research and Application, vol. 4, pp. 45-51, 2012
- [8] R. Alibakhshi, "*The effect of anisotropy on free vibration of rectangular composite plates with patch mass*", International Journal of Engineering, vol. 25, pp. 223-232, 2012.
- [9] R. Alibakhshi and R. A. Alashti, "*Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Carrying Rotating Circular Mass*", International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology, vol. 7, pp. 1-9, 2014.
- [10] E. Dowell and W. Ye, "*Limit cycle oscillation of a fluttering cantilever plate*", AIAA journal, vol. 29, pp. 1929-1936, 1991.
- [11] R. M. Christensen, *Mechanics of composite materials*: Courier Corporation, 2012.
- [12] K. Sivakumaran, "*Natural frequencies of symmetrically laminated rectangular plates*