

## تحلیل فاصله خطای هدایت تناسبی برای سیستم کنترل دوجمله‌ای مرتبه بالا در حضور نویز و شتاب هدف

جلالی نائینی، سید حمید<sup>۱\*</sup>، عربیان آرانی، علی<sup>۲</sup>

۱- استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، پل نصر، تهران

۲- دانشجوی دکترای مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، پل نصر، تهران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۹/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۵/۲۵)

### چکیده

در این مقاله، تحلیل فاصله خطای ناوبری تناسبی برای سیستم هدایت و کنترل با تابع تبدیل دوجمله‌ای و از مرتبه بالا در حضور نویز جستجوگر با استفاده از معادلات خطی بی‌بعد شده، به روش مستقیم و الحاقی ارائه شده است. در این تحلیل، تأثیر ضریب ناوبری و رسته سیستم تا مرتبه ۳۰ به ازای انحراف سمت اولیه، اهداف با مانور و نویز جستجوگر بررسی شده است. حل عددی در حالت خطای سمت اولیه و هدف با مانور ثابت، خطی و سهمی، رفتاری شبیه رفتار مجانبی نشان می‌دهد. به‌علاوه، خطای نهایی ناشی از نویز جستجوگر به ازای سیستم‌های کنترل با مراتب بالاتر، رفتاری شبیه رفتار مجانبی نشان می‌دهد. اثبات ریاضی مقادیر حدی نیز ارائه شده است. با توجه به بررسی حاضر و به ازای شرایط مفروض، مرتبه ۸ الی ۱۰ برای تحلیل فاصله خطای سیستم کنترل دوجمله‌ای پیشنهاد می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ناوبری تناسبی، تحلیل فاصله خطای بی‌بعد، سیستم مرتبه بالا

## Miss Distance Analysis of Proportional Navigation for High-Order Binomial Control Systems in Presence of Noise and Target Maneuvers

### Abstract

In this paper, the miss distance analysis of proportional navigation for high-order binomial guidance and control system is presented in presence of seeker noise using normalized adjoint method. In this analysis, the effects of effective navigation ratio and system order up to 30 are studied due to heading error, target maneuvers, and seeker noise. Numerical solutions for the cases of initial heading error, target with constant, linear, and parabolic maneuvers show a quasi-asymptotic behavior with respect to system order. In addition, the quasi-asymptotic behavior occurs for higher system order due to seeker noise. The values for the infinity's order of system are obtained numerically and analytically. Based on the analysis and its assumptions, an order of 8 to 10 is suggested for miss distance analysis of a binomial guidance and control system.

**Keywords:** Proportional Navigation, Normalized Miss Distance Analysis, High-Order System

## مقدمه

هدایت تناسبی و استراتژی‌های آن، یکی از پرکاربردترین قوانین هدایت پایانی در موشک‌های رهگیر است. تحلیل فاصله خطای نهایی، یا به اختصار «فاصله خطا» یکی از مهمترین تحلیل‌های سیستم هدایت است؛ چون در آن تأثیر هر عاملی بر خطای نهایی موشک تعیین می‌شود. در تحلیل سیستمی فاصله خطا، عوامل متعددی مانند خطای سمت اولیه، مانور هدف، اشباع شتاب، اثر رادوم، نوع و مرتبه سیستم هدایت و کنترل، ناکمینه فاز بودن سیستم‌های با بالک کنترلی واقع در دم موشک، نویز ردیابی و جستجوگر، اشباع زاویه عملگر و اشباع سرعت زاویه‌ای عملگر مؤثر است [۱-۳].

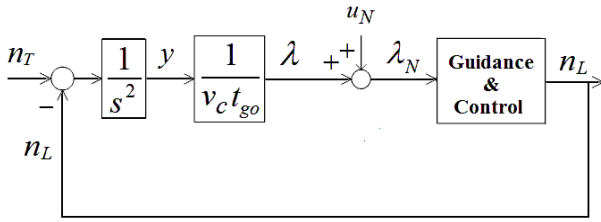
تحلیل فاصله خطا در منابع مختلف، عمدتاً با شبیه‌سازی عددی، روش الحاقی، روش تحلیل کوواریانس و شبیه‌سازی مونت کارلو انجام شده است [۴-۶]. روش‌های تحلیل فاصله خطا را می‌توان به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم کرد. روش الحاقی تکنیکی رایج برای تحلیل عملکرد هدایت سیستم‌های خطی متغیر با زمان است [۷-۹] که به دلیل سادگی، دقت و بار محاسباتی بسیار کم، در مراحل طراحی مفهومی و اولیه موشک‌های رهگیر به عنوان ابزاری محوری استفاده می‌شود [۱۰]. به علاوه، بی‌بعدسازی معادلات حاکم و حل عددی آن‌ها می‌تواند با یکبار تولید نتایج، برای تمام مقادیر پارامترهای بی‌بعد قابل استفاده باشد و اهمیتی نزدیک به حل تحلیلی برای مساله دارد [۱۱]. این موضوع در بی‌بعدسازی معادلات الحاقی نیز صادق است [۱۲].

در منابع تحلیل فاصله خطای هدایت تناسبی، تابع تبدیل هدایت و کنترل مجموعاً با یک تابع تبدیل دوجمله‌ای مرتبه یک تا پنج مدل می‌شود [۱۳]. علت انتخاب تابع دوجمله‌ای این است که تنها پارامتر ثابت زمانی در آن باشد تا تأثیر ثابت زمانی و مرتبه در رفتار سیستم به راحتی قابل استخراج باشد. به عبارت دقیق‌تر، ابتدا تابع تبدیل هدایت و کنترل را تابع تبدیل مرتبه اول در نظر می‌گیرند تا تأثیر پارامتر ثابت زمانی در رفتار سیستم و به ویژه فاصله خطا بررسی شود. اما پس از آن، موضوع مطالعه شده در منابع، این است که اگر مرتبه سیستم افزایش یابد، اما ثابت زمانی معادل سیستم هدایت و کنترل، ثابت در نظر گرفته شود، اثر افزایش مرتبه سیستم در عملکرد سیستم چگونه است [۱۱، ۱۳]. با افزایش مرتبه تابع تبدیل هدایت و کنترل، مشاهده می‌شود که در مجموع فاصله خطا افزایش می‌یابد. تحلیل فاصله خطای سیستم هدایت و

کنترل تا مرتبه پنج در منابع آمده است و از نمودار منتج در مرجع [۱۳] ممکن است این‌طور استنباط شود که با افزایش مرتبه تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل، فاصله خطا به‌طور مجانبی رفتار می‌کند و مرتبه پنجم، تقریب مناسبی از حد مجانبی خواهد بود. از طرفی دیگر با توجه به تحلیل کل سیستم هدایت و کنترل، ممکن است به مساله این‌طور نگاه شود که با مدل‌سازی اجزاء، مدل مناسب مدل مرتبه پنجم است. در این که مدل مرتبه پنجم چگونه انتخاب شده است و آیا مرتبه بالاتر تقریب بهتری می‌دهد، در منابع تصریحی نشده است.

در مرجع [۱۳] اشاره شده است که حداقل مرتبه سیستم برای مطالعه کاربردی خطای سیستم هدایت موشک به صورت مرتبه پنج است که یک ثابت زمانی برای جستجوگر، یک ثابت زمانی برای فیلتر نویز و سه ثابت زمانی برای سیستم کنترل و دینامیک موشک است. لازم به ذکر است که در مدل اصلاحی مطابق مرجع [۱۱]، تابع تبدیل مرتبه پنجم شامل دو تابع تبدیل مرتبه اول برای جستجوگر و فیلتر نویز و یک تابع تبدیل مرتبه سوم برای سیستم کنترل پروازی با یک جفت ریشه مختلط است. البته در مدل اخیر به علت این‌که دو پارامتر جدید به مساله اضافه می‌کند، تحلیل مساله را به‌ویژه تحلیل بی‌بعد فاصله خطا را دشوارتر می‌کند. البته در مرجع [۱۱] آمده است که مدل‌سازی مساله باید با توجه به تابع تبدیل سیستم واقعی باشد که این موضوع نیز بدیهی است؛ اما سوال حاضر را مرتفع نمی‌کند. به علاوه بررسی افزایش مرتبه تابع تبدیل هدایت و کنترل در فاصله خطا در حضور نویز جستجوگر نیز مهم است. این بررسی‌ها تا مرتبه پنجم در منابع موجود است. اما سوال این است که رفتار سیستم به ازای مرتبه بالاتر از پنج چگونه می‌شود؟ سوال دومی که تحقیق حاضر به بررسی آن می‌پردازد این است که آیا رفتار سیستم به حد مجانبی می‌رسد؟

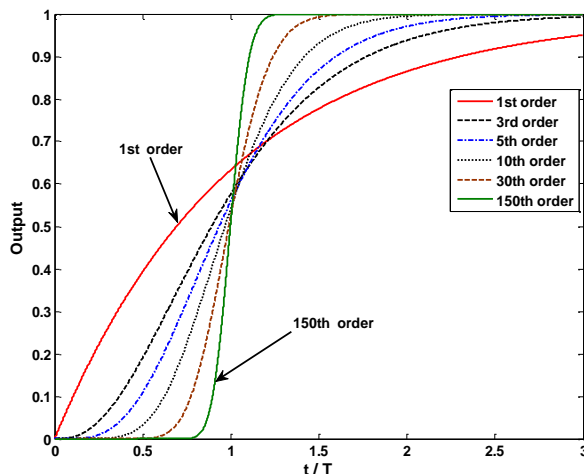
در تحقیق حاضر، تحلیل فاصله خطای هدایت تناسبی به ازای تابع تبدیل هدایت و کنترل از نوع دوجمله‌ای با مرتبه بالا انجام شده است و با حل عددی، رفتاری شبیه رفتار مجانبی مشاهده شده و مقادیر آن استخراج شده است. براساس نتایج حاصل آمده، افزایش مرتبه سیستم هدایت و کنترل حداقل تا مرتبه ۸ الی ۱۰ بر حسب مقدار ضریب ناوبری مؤثر توصیه می‌شود. البته تحلیل حاضر به ازای مدل خطی، بدون اعمال شتاب اشباع و اثر محل صفر تابع تبدیل هدایت و کنترل است.



شکل ۱ - نمودار بلوکی مساله خطی شده هدایت

مرتبه تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل است. در این بررسی، ثابت زمانی‌های اجزاء سیستم هدایت و کنترل برابر هدایت و کنترل از نرخ چرخش خط‌دید به شتاب جانبی، تشکیل یک تابع تبدیل دوجمله‌ای از مرتبه  $n$  می‌دهد که در منابع به منظور مطالعه پارامتری اثر ثابت زمانی و مرتبه سیستم به کار می‌رود [۱۱].

شکل ۲، اثر مرتبه تابع تبدیل  $1 / (1 + Ts / n)^n$  در پاسخ به ورودی پله به ازای مقادیر مختلف مرتبه سیستم (از مرتبه ۱ تا ۱۵۰) را نمایش می‌دهد. همان‌طور که از این شکل ملاحظه می‌شود، با افزایش مرتبه تابع تبدیل، پاسخ سیستم سریع‌تر به حالت ماندگار می‌رسد. همچنین با افزایش  $n$  به سمت بی‌نهایت، پاسخ به سمت پاسخ پله‌ای میل می‌کند. اگر مرتبه تابع تبدیل سیستم به سمت بی‌نهایت میل کند، به جای تابع تبدیل دوجمله‌ای برای سیستم هدایت و کنترل در رابطه (۲) می‌توان رابطه  $e^{-Ts}$  را جایگزین نمود (رابطه (۵۳) در پیوست الف) و با استفاده از روش مستقیم، فاصله خطا را محاسبه نمود.



شکل ۲ - پاسخ تابع تبدیل  $1 / (1 + Ts / n)^n$  به ورودی پله واحد به ازای مقادیر مختلف مرتبه سیستم از مرتبه ۱ تا مرتبه ۱۵۰

## مدل‌سازی خطی هدایت تناسبی

در شکل ۱، نمودار بلوکی متداول در مراجع برای مساله خطی شده هدایت تناسبی نمایش داده شده است که در آن  $s$  متغیر حوزه لاپلاس است. در خطی‌سازی فرض می‌شود که زاویه خط‌دید ( $\lambda$ ) کوچک باقی می‌ماند و نسبت به خط‌دید اولیه سنجیده می‌شود. شتاب موشک ( $n_L$ ) و شتاب هدف ( $n_T$ ) در خطی‌سازی تنها در راستای عمود بر خط دید اولیه فرض می‌شود. در این شکل،  $y$  تصویر فاصله هدف از موشک در راستای عمود بر خط دید اولیه،  $v_c$  سرعت نزدیک‌شدن موشک به هدف (که ثابت فرض شده) و  $t_{go} = t_f - t$  زمان باقی‌مانده تا اصابت (یا کمترین فاصله) است که زمان نهایی  $t_f$  معلوم فرض می‌شود. همچنین،  $u_N$  نویز اندازه‌گیری زاویه خط دید بوده و به صورت رابطه (۱) لحاظ می‌شود [۱۱]:

$$u_N = \frac{u_{GL}}{v_c t_{go}} + u_{FN} + \frac{v_c t_{go}}{R_A} u_{RN} + \left( \frac{v_c t_{go}}{R_A} \right)^2 u_{RNA} \quad (1)$$

که در آن،  $u_{GL}$  ورودی مدل نویز تابش (بر حسب متر)،  $u_{FN}$  ورودی نویز مستقل از فاصله (بر حسب رادیان)،  $u_{RN}$  ورودی مدل نویز وابسته به فاصله برای سیستم نیمه‌فعال (بر حسب رادیان) و  $u_{RNA}$  ورودی نویز وابسته به فاصله برای سیستم فعال (بر حسب رادیان) است. این ورودی‌ها به صورت نویز سفید فرض شده و چگالی طیفی توان آن‌ها با  $\Phi$  و همان اندیس ورودی متناظر نمایش داده می‌شود. لازم به ذکر است که واحد  $\Phi_{GL}$  مجذور متر بر هرتز و واحد چگالی نویز بقیه برابر مجذور رادیان بر هرتز است. چگالی طیفی نویزهای وابسته به فاصله به ازای یک فاصله مرجع  $R_A$  داده می‌شود.

تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل شامل دینامیک جستجوگر، فیلتر نویز و سیستم کنترل و دینامیک موشک می‌شود که در این‌جا مجموعاً با تابع تبدیل رابطه (۲) مدل می‌شود ( $n \geq 2$ ).

$$\frac{n_L}{\lambda_N} = \frac{s}{(1 + T_N s)} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{N' v_c}{(1 + T_j s)} \quad (2)$$

که در آن،  $N'$  ضریب ناوبری مؤثر،  $T_N$  ثابت زمانی فیلتر نویز،  $T_j$  نمایانگر ثابت‌های زمانی مابقی اجزاء سیستم و  $n$

### روش مستقیم تحلیل فاصله خطای بی‌بعد

در این روش، معادلات حالت سیستم اصلی بر اساس نمودار بلوکی شکل ۱ نوشته و بی‌بعد شده و با حل عددی، فاصله خطا محاسبه می‌شود. البته همان‌طور که قبلاً اشاره شد، بار محاسباتی این روش نسبت به روش الحاقی بسیار بیشتر است. حال با استفاده از نمودار بلوکی شکل ۱ و تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل رابطه (۲) با فرض  $T_j = T_a$  معادلات حالت استخراج می‌شود ( $n \geq 2$ ):

$$\dot{y} = \nu \quad (3)$$

$$\dot{\nu} = n_T - n_L \quad (4)$$

$$\dot{z}_s = (\lambda_N - z_s) / T_N \quad (5)$$

$$\dot{z}_1 = (y_2 - z_1) / T_a \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{for } j = 2 : 1 : n - 1 \\ \dot{z}_j = (z_{j-1} - z_j) / T_a \\ \text{end} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$n_L = z_{n-1} \quad (\text{خروجی}) \quad (8)$$

که در آن، متغیر حالت  $z_s$ ، نرخ چرخش خط دید پس از عبور از فیلتر مرتبه اول با ثابت زمانی  $T_N$  است و

$$y_2 = N' \nu_c (\lambda_N - z_s) / T_N \quad (9)$$

$$\lambda_N = u_N + y / \nu_c t_{go} \quad (10)$$

با توجه به نحوه بی‌بعدسازی در مرجع [۱۴] و با استفاده از تغییر متغیرهای زیر:

$$\hat{n}_T = \frac{T n_T}{V}, \quad \hat{n}_L = \frac{T n_L}{V}, \quad (11)$$

$$\hat{y} = \frac{y}{TV}, \quad \hat{\nu} = \frac{\nu}{V}, \quad \tau_f = \frac{t_f}{T} \quad (12)$$

$$\hat{z}_s = \frac{\nu_c}{V} z_s, \quad \hat{z}_j = \frac{T}{V} z_j, \quad \hat{u}_N = \frac{\nu_c}{V} u_N \quad (13)$$

معادلات بی‌بعد روش مستقیم حاصل می‌شود:

$$\hat{y}' = \hat{\nu} \quad (14)$$

$$\hat{\nu}' = \hat{n}_T - \hat{n}_L \quad (15)$$

$$\hat{z}'_s = T(\hat{\lambda}_N - \hat{z}_s) / T_N \quad (16)$$

$$\hat{z}'_1 = T(\hat{y}_2 - \hat{z}_1) / T_a \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{for } j = 2 : 1 : n - 1 \\ \hat{z}'_j = T(\hat{z}_{j-1} - \hat{z}_j) / T_a \\ \text{end} \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\hat{n}_L = \hat{z}_{n-1} \quad (\text{خروجی}) \quad (19)$$

که در آن،  $(\quad)'$  نمایانگر مشتق نسبت به متغیر زمان بی‌بعد  $\tau$  است و

$$\hat{y}_2 = TN'(\hat{\lambda}_N - \hat{z}_s) / T_N \quad (20)$$

$$\hat{\lambda}_N = \hat{u}_N + \hat{y} / (\tau_f - \tau) \quad (21)$$

$$T = n T_a \quad (22)$$

در روابط مذکور،  $V$  پارامتر بی‌بعدسازی با دیمانسیون مشابه سرعت است. در صورت تحلیل مساله به ازای انحراف سمت اولیه،  $V = |\nu_0|$  و به ازای هدف با مانور ثابت،  $V = T |n_T|$  لحاظ می‌شود. برای هدف با شتاب خطی یا اصطلاحاً شیب ( $m = 1$ )، شتاب سهمی ( $m = 2$ ) و شتاب سینوسی به ازای  $t \geq 0$  به ترتیب می‌توان نوشت [۱۵]:

$$n_T = A_T (t / t_f)^m \Rightarrow \hat{n}_T = (\tau / \tau_f)^m \text{sgn}(A_T) \quad (23)$$

$$n_T = A_T \sin(\omega t) \Rightarrow \hat{n}_T = \text{sgn}(A_T) \sin(\hat{\omega} \tau) \quad (24)$$

که در آن،  $A_T$  ثابت و با دیمانسیون مشابه شتاب،  $\omega$  سرعت زاویه‌ای مانور سینوسی و  $\hat{\omega} = \omega T$  است.

با حل عددی روابط (۱۹-۱۴) فاصله خطای بی‌بعد به ازای خطای سمت اولیه و به ازای هدف با مانور ثابت، خطی، سهمی و سینوسی برای سیستم مرتبه  $n$  حاصل می‌شود. به طور نمونه در شکل‌های ۳ تا ۵، خطای بی‌بعد به ازای سیستم با مرتبه ۲، ۵ و ۸ به ترتیب ناشی از انحراف سمت، هدف با مانور ثابت و سینوسی به ازای  $N' = 4$  ترسیم شده است که در آن  $V_M$  سرعت موشک بر حسب متر بر ثانیه و HE خطای سمت اولیه موشک بر حسب رادیان است. به منظور صحت‌گذاری انطباق حل عددی در روش مستقیم (گره‌ها در نمودارها) با روش الحاقی (خطوط پیوسته در نمودارها) در شکل‌های ۳ تا ۵، نشان داده شده است. به علاوه، در حالت خطای سمت اولیه، نتایج عددی به ازای  $n=5$  با نتایج مرجع [۱۱] مطابقت دارد.

### روش الحاقی برای تحلیل فاصله خطا ناشی از نویز

با اعمال قواعد روش الحاقی به نمودار بلوکی شکل ۱ به ازای تابع تبدیل سیستم هدایت و کنترل رابطه (۲)، مدل الحاقی شکل ۶ حاصل می‌شود که معادلات رسته یک آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (25)$$

$$\dot{x}_3 = y_1 / v_c t \quad (26)$$

$$\dot{x}_4 = y_1 \quad (27)$$

$$\dot{z}_1 = -(x_2 + z_1) / T_a \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{for } j = 2 : 1 : n - 1 \\ \dot{z}_j = (z_{j-1} - z_j) / T_a \\ \text{end} \end{array} \right. \quad (29)$$

$$\dot{x}_{FN} = y_1^2 \quad (30)$$

$$\dot{x}_{RN} = (y_1 v_c t / R_A)^2 \quad (31)$$

$$\dot{x}_{RNA} = y_1^2 (v_c t / R_A)^4 \quad (32)$$

$$\dot{x}_{GL} = (y_1 / v_c t)^2 \quad (33)$$

که در آن:

$$y_1 = (N' v_c z_{in} - x_4) / T_N \quad (34)$$

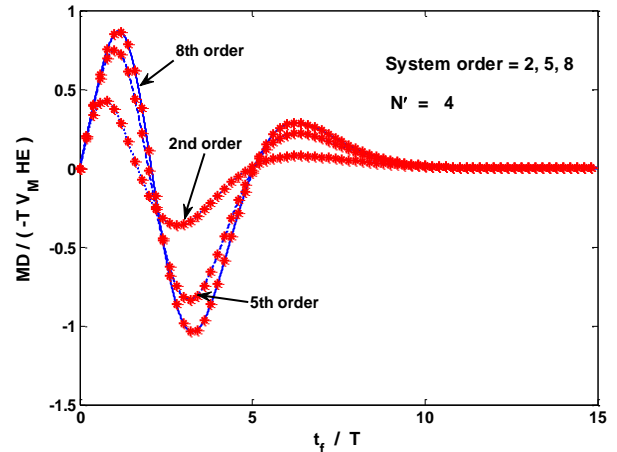
و  $x_{FN}$ ،  $x_{RN}$  و  $x_{RNA}$  (بر حسب  $m^2/s$ ) و  $x_{GL}$  (بر حسب  $1/s$ ) متغیرهای حالت بعد از بلوک‌های انتگرال‌گیر در مدل الحاقی مربوط به نویزهای متناظر در شکل ۶ است. البته در حل عددی، مقادیر اولیه متغیرهای حالت، به جز  $x_3(0) = 1$ ، برابر صفر لحاظ می‌شود. با توجه به شکل ۶، انحراف استاندارد فاصله خطای نهایی ناشی از نویز جستجوگر ( $\sigma$ ) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_j = \sqrt{\Phi_j x_j(t_f)} \quad j = GL, FN, RA, RNA \quad (35)$$

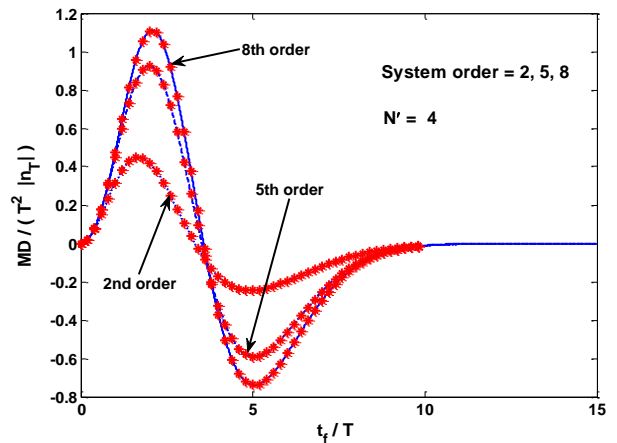
با استفاده از تغییر متغیرهای روابط (۳۸-۳۶)

$$\hat{x}_2 = \frac{x_2}{T}, \quad \hat{x}_3 = x_3, \quad \hat{x}_4 = \frac{x_4}{T v_c} \quad (36)$$

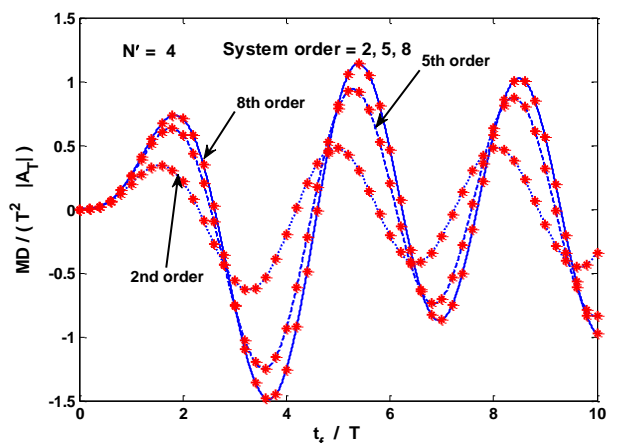
$$\hat{z}_{(j)} = \frac{z_{(j)}}{T}, \quad \hat{x}_{GL} = T x_{GL}, \quad \hat{x}_{FN} = \frac{x_{FN}}{T v_c^2} \quad (37)$$



شکل ۳ - فاصله خطای بی‌بعد ناشی از انحراف سمت اولیه بر حسب زمان نهایی بی‌بعد به ازای سیستم هدایت و کنترل با مرتبه ۲، ۵ و ۸ (خطوط پیوسته: روش الحاقی، گره‌ها: روش مستقیم)



شکل ۴ - فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور ثابت هدف (خطوط پیوسته: روش الحاقی، گره‌ها: روش مستقیم)



شکل ۵ - فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور سینوسی هدف (خطوط پیوسته: روش الحاقی، گره‌ها: روش مستقیم)

$$K_{GL}(\tau_f) = \frac{\sigma_{GL}}{\sqrt{\Phi_{GL}/T}} = \sqrt{\hat{x}_{GL}(\tau_f)} \quad (49)$$

$$K_{FN}(\tau_f) = \frac{\sigma_{FN}}{v_c \sqrt{T\Phi_{FN}}} = \sqrt{\hat{x}_{FN}(\tau_f)} \quad (50)$$

$$K_{RN}(\tau_f) = \frac{R_A \sigma_{RN}}{\Phi_{RN}^{0.5} T^{1.5} v_c^2} = \sqrt{\hat{x}_{RN}(\tau_f)} \quad (51)$$

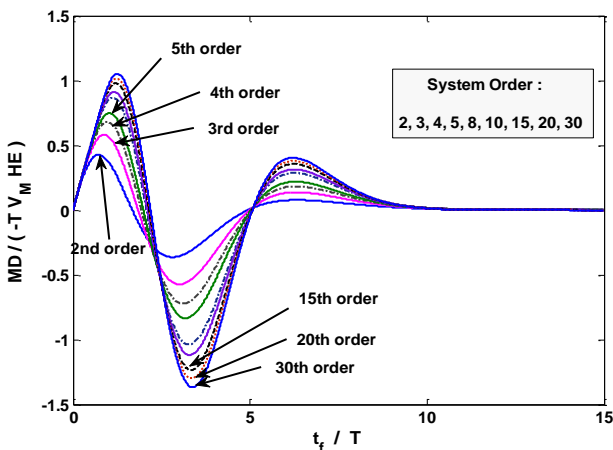
$$K_{RNA}(\tau_f) = \frac{R_A^2 \sigma_{RNA}}{\Phi_{RNA}^{0.5} v_c^3 T^{2.5}} = \sqrt{\hat{x}_{RNA}(\tau_f)} \quad (52)$$

که در آن،  $\tau_f = t_f / T$ . لازم به ذکر است که مقادیر ضرایب بی‌بعد مذکور مطابق روابط (۴۹-۵۲) در زمان بی‌نهایت محاسبه می‌شود و به مقادیر پایا میل می‌کند.

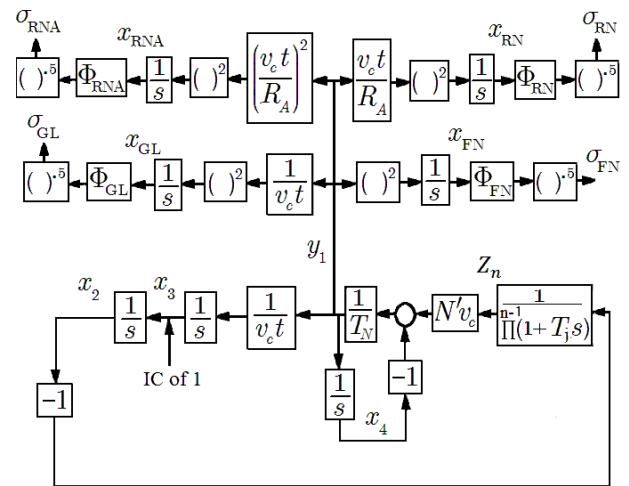
### بحث و نتایج حل عددی

در این جا حل عددی مساله تحت قانون هدایت تناسبی با استفاده از معادلات الحاقی بی‌بعد به منظور مطالعه تأثیر مرتبه‌های بالا (حداقل تا مرتبه ۳۰) برای سیستم هدایت و کنترل انجام شده است. همان‌طور که اشاره شد، در منابع مشاهده شده، مدل ساده دوجمله‌ای سیستم هدایت و کنترل تا مرتبه پنج بررسی شده است.

در ابتدا فاصله خطای بی‌بعد ناشی از انحراف سمت اولیه (بدون مانور هدف) به ازای سیستم‌های هدایت و کنترل با مرتبه‌های مختلف بررسی شده است. همان‌طور که از شکل ۷ به ازای  $N' = 4$  ملاحظه می‌شود، با افزایش مرتبه سیستم، نمودارهای فاصله خطا به یکدیگر بسیار نزدیک می‌شود.



شکل ۷- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از انحراف سمت اولیه برای سیستم تا مرتبه ۳۰ ( $N' = 4$ )



شکل ۶- مدل الحاقی نمودار بلوکی شکل ۱ با تابع تبدیل (۲)

$$\hat{x}_{RN} = \frac{R_A^2}{T^3 v_c^4} x_{RN}, \quad \hat{x}_{RNA} = \frac{R_A^4}{T^5 v_c^6} x_{RNA} \quad (38)$$

معادلات الحاقی به صورت زیر بی‌بعد می‌شود:

$$\hat{x}'_2 = \hat{x}_3 \quad (39)$$

$$\hat{x}'_3 = \hat{y}_1 / \tau \quad (40)$$

$$\hat{x}'_4 = \hat{y}_1 \quad (41)$$

$$\hat{z}'_1 = -\frac{T}{T_a} (\hat{x}_2 + \hat{z}_1) \quad (42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{for } j = 2 : 1 : n - 1 \\ \hat{z}'_j = \frac{T}{T_a} (\hat{z}_{j-1} - \hat{z}_j) \\ \text{end} \end{array} \right. \quad (43)$$

$$\hat{x}'_{FN} = \hat{y}_1^2 \quad (44)$$

$$\hat{x}'_{RN} = \hat{y}_1^2 \tau^2 \quad (45)$$

$$\hat{x}'_{RNA} = \hat{y}_1^2 \tau^4 \quad (46)$$

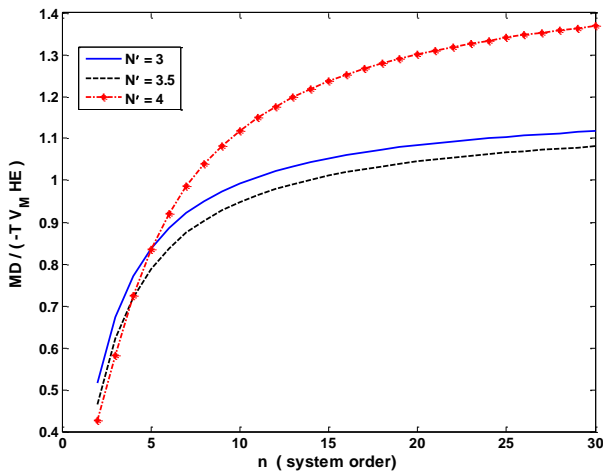
$$\hat{x}'_{GL} = \hat{y}_1^2 / \tau^2 \quad (47)$$

که در آن،

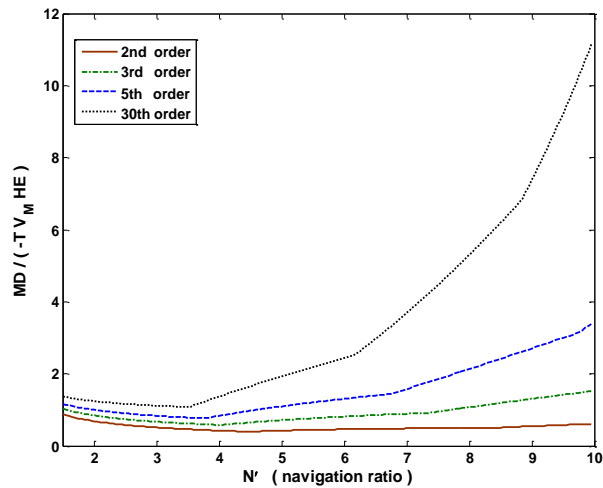
$$\hat{y}_1 = T(N' \hat{z}_n - \hat{x}_4) / T_N \quad (48)$$

و مشتق نسبت به  $\tau = t / T$  با ( )' نشان داده شده است.

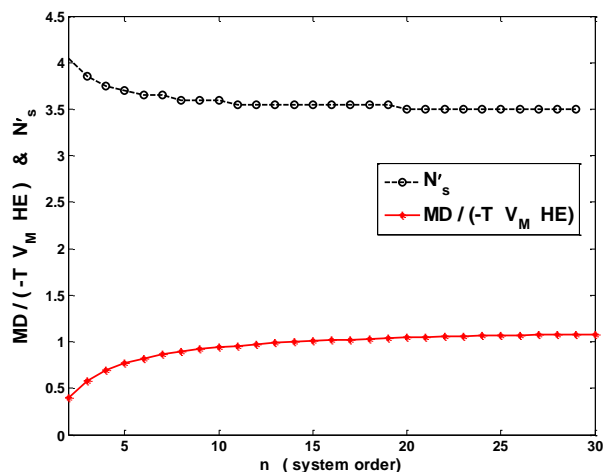
در نتیجه، ریشه میانگین مجذور خطای اصابت ناشی از نویزهای مذکور با حل معادلات الحاقی بی‌بعد محاسبه شده و ضرایب بی‌بعد  $K$  از روابط (۴۹-۵۲) حاصل می‌شود [۱۶].



شکل ۸- مقادیر حداکثر فاصله خطای بی بعد بر حسب مرتبه سیستم ناشی از خطای سمت اولیه



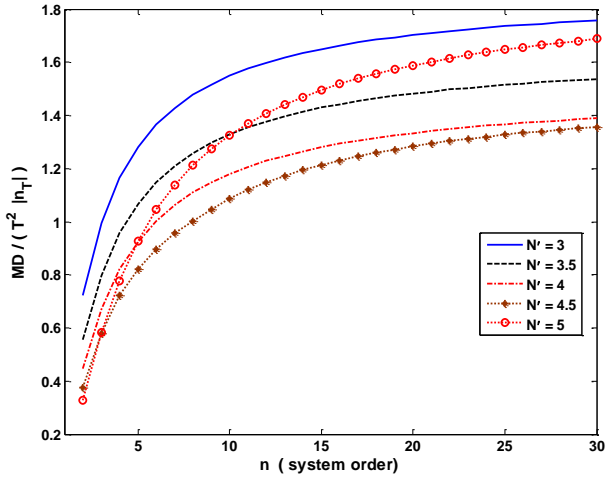
شکل ۹- مقادیر حداکثر فاصله خطای بی بعد بر حسب ضریب ناوبری مؤثر ناشی از خطای سمت اولیه



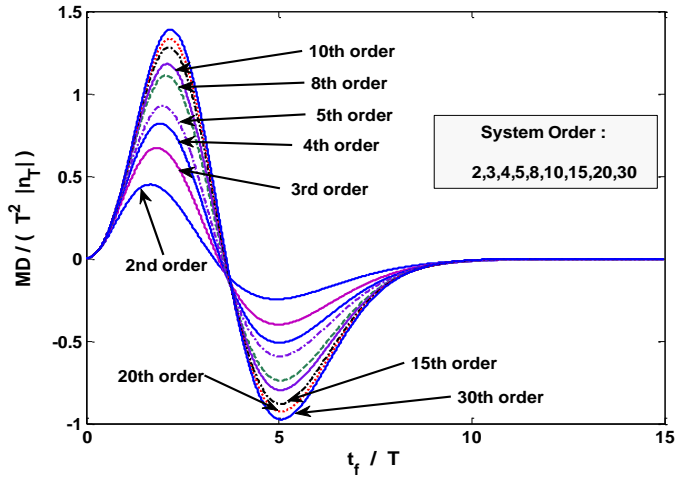
شکل ۱۰- مقادیر ضریب ناوبری اکسترمم (و فاصله خطای بی بعد متناظر) بر حسب مرتبه سیستم ناشی از خطای سمت اولیه

برای مطالعه دقیق تر، در شکل ۸، مقادیر حداکثر فاصله خطای بی بعد بر حسب مرتبه سیستم به ازای ضرایب ناوبری مؤثر مختلف ترسیم شده است. همان طور که از شکل ۸ ملاحظه می شود، به نظر می آید که با افزایش مرتبه سیستم، مقدار فاصله خطا به حد مجانبی می رسد. با توجه به این شکل، با افزایش مرتبه سیستم، اختلاف نتایج تا مرتبه پنج زیاد است؛ اما این اختلاف از مرتبه پنج تا ده کمتر می شود و از مرتبه ده تا پانزده بسیار کم و بیش از مرتبه پانزده، به حالت حدی نزدیک می شود. به طور نمونه در شکل ۸ و به ازای  $N' = 3$ ، اختلاف مقادیر فاصله خطای بی بعد از مرتبه ۲ تا ۵ به اندازه  $0.32$  و از مرتبه ۵ تا ۱۰ به اندازه  $0.15$  و از مرتبه ۱۰ تا ۱۵ به اندازه  $0.06$  و از مرتبه ۱۵ تا ۲۰ به اندازه  $0.03$  و از مرتبه ۲۰ تا ۲۵ به اندازه  $0.02$  است.

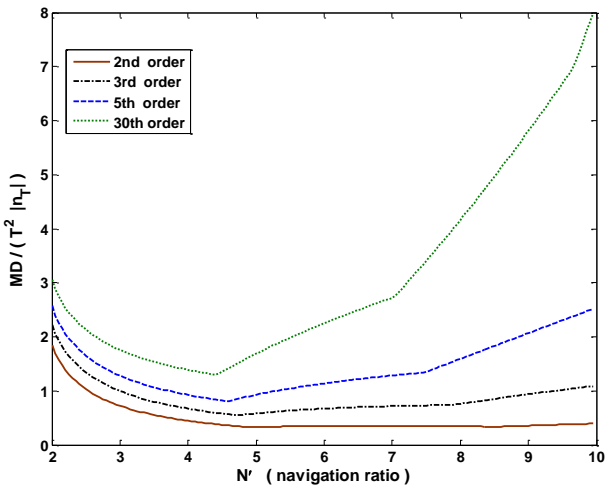
نکته جالبی که از شکل ۸ مشاهده می شود این است که رفتار فاصله خطا به ازای  $N' = 4$ ، متفاوت از دو مقدار دیگر ضرایب ناوبری شده است. با توجه به این موضوع، فاصله خطای بی بعد بر حسب ضریب ناوبری در شکل ۹ ترسیم شده است. همان طور که از این شکل ملاحظه می شود، نمودار فاصله خطا با افزایش  $N'$  نزولی نیست و نقطه حداقلی به ازای ضریب ناوبری معینی دارد که این ضریب ناوبری با  $N'_s$  نمایش داده می شود. این نکته در منابع اشاره نشده و حتی به اشتباه ذکر شده است که با فرض مدل هدایت و کنترل دوجمله ای و شرایط مذکور، افزایش ضریب ناوبری سبب کاهش فاصله خطا می شود. به منظور مطالعه دقیق تر، مقادیری از ضریب ناوبری که به ازای آن فاصله خطا حداقل می شود ( $N'_s$ )، بر حسب مرتبه سیستم هدایت و کنترل در شکل ۱۰ ترسیم شده است. همان طور که از شکل ۱۰ مشاهده می شود با افزایش مرتبه سیستم، رفتار نزولی دارد. در شکل ۱۰، مقادیر فاصله خطا متناظر با ضریب ناوبری  $N'_s$  نیز ترسیم شده است. این شکل به ازای مرتبه ۱۰ تا ۳۰ مقدار تقریباً ثابت  $N'_s = 3.5$  را نشان می دهد. در شکل ۱۱ نتایج حل عددی فاصله خطای بی بعد نسبت به زمان بی بعد ناشی از مانور ثابت هدف به ازای  $N' = 4$  برای سیستم های هدایت و کنترل با مرتبه های مختلف نمایش داده شده است. به منظور بررسی دقیق تر مشابه حالت قبل، مقادیر حداکثر فاصله خطای بی بعد بر حسب مرتبه سیستم به ازای ضرایب ناوبری مختلف در شکل ۱۲ ترسیم شده است. همان طور که در این شکل ملاحظه می شود اختلاف



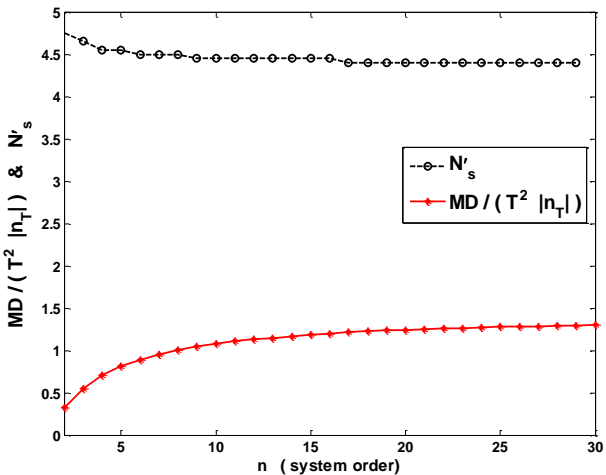
شکل ۱۲- مقادیر حداکثر فاصله خطای بی‌بعد بر حسب مرتبه سیستم ناشی از مانور ثابت هدف



شکل ۱۱- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور ثابت هدف برای سیستم تا مرتبه ۳۰ ( $N' = 4$ )



شکل ۱۳- مقادیر حداکثر فاصله خطای بی‌بعد بر حسب ضریب ناوبری مؤثر ناشی از مانور ثابت هدف

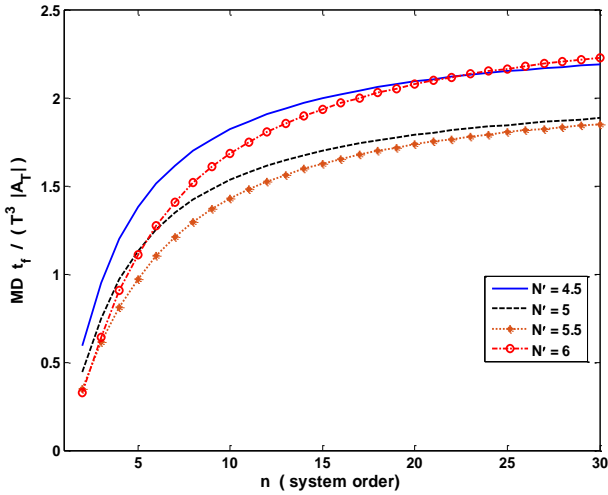


شکل ۱۴- مقادیر ضریب ناوبری اکسترمم (و فاصله خطای بی‌بعد متناظر) بر حسب مرتبه سیستم ناشی از مانور ثابت هدف

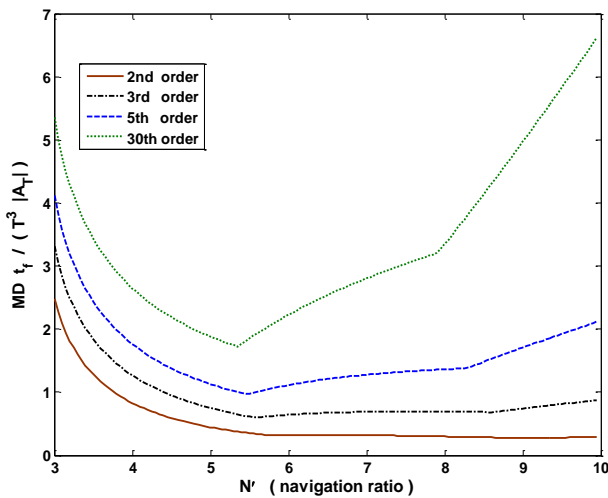
نتایج فاصله خطا تا مرتبه پنج زیاد است؛ اما از مرتبه پنج تا ده کمتر می‌شود و از مرتبه ۱۰ تا ۱۵ این تغییرات بسیار کم و بیش از مرتبه ۲۰ تغییرات حداکثر خطای ناشی از مانور ثابت هدف بسته به مقدار ضریب ناوبری نسبتاً به حالت حدی نزدیک می‌شود. به عنوان مثال برای  $N' = 3$ ، اختلاف فاصله خطا از مرتبه ۲ تا ۵ به اندازه ۰/۵۵، از مرتبه ۵ تا ۱۰ به اندازه ۰/۲۷، از مرتبه ۱۰ تا ۱۵ به اندازه ۰/۱، از مرتبه ۱۵ تا ۲۰ به اندازه ۰/۰۵، از مرتبه ۲۰ تا ۲۵ به اندازه ۰/۰۴ و از مرتبه ۲۵ تا ۳۰ به اندازه ۰/۰۲ است. با توجه به شکل ۱۲ با افزایش ضریب ناوبری تا ۴/۵، خطای ناشی از هدف با مانور ثابت کاهش می‌یابد؛ اما به ازای ضریب ناوبری ۵ و بزرگتر از آن، رفتار فاصله خطا این گونه نیست و افزایش می‌یابد. به منظور مطالعه دقیق‌تر، مقادیر حداکثر فاصله خطا نسبت به ضریب ناوبری در شکل ۱۳ بر حسب ضریب ناوبری مؤثر ترسیم شده است. مشابه حالت خطای سمت اولیه، مقادیر ضریب ناوبری که در آن حداکثر فاصله خطا کمینه شده است، در شکل ۱۳ و به صورت مجزا در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود که رفتاری مشابه شکل‌های ۹ و ۱۰ دارد.

حال تحلیل افزایش مرتبه سیستم در مساله به ازای هدف با مانور خطی و با مانور سهمی صورت می‌پذیرد. ابتدا در شکل ۱۵، نتایج حل عددی خطای بی‌بعد ناشی از مانور خطی هدف نسبت به زمان بی‌بعد به ازای  $N' = 4$  و سیستم هدایت و کنترل با مرتبه‌های مختلف نشان داده شده است. مشابه دو حالت قبل، مقادیر حداکثر خطای بی‌بعد ناشی از مانور خطی هدف بر حسب مرتبه سیستم در شکل ۱۶ و بر حسب ضریب

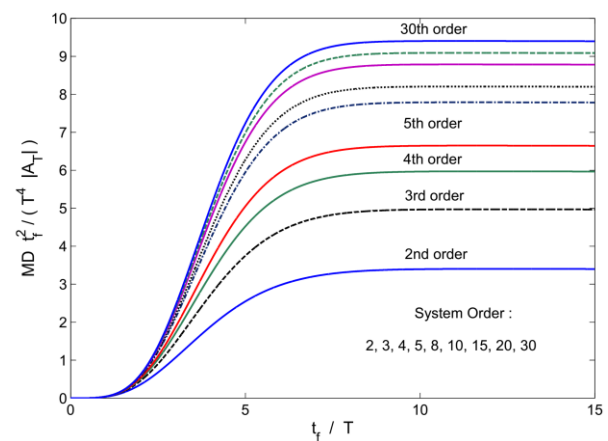




شکل ۱۶- مقادیر حداکثر فاصله خطای بی بعد بر حسب مرتبه سیستم ناشی از مانور خطی هدف



شکل ۱۷- مقادیر حداکثر فاصله خطای بی بعد بر حسب ضریب ناوبری مؤثر ناشی از مانور خطی هدف



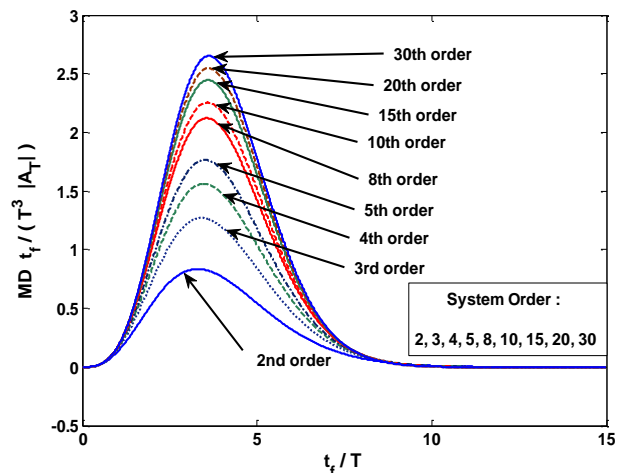
شکل ۱۸- فاصله خطای بی بعد ناشی از مانور سهمی هدف برای سیستم تا مرتبه ۳۰ ( $N' = 4$ )

ناوبری مؤثر در شکل ۱۷ ترسیم شده است که رفتاری مشابه دو حالت قبل مشاهده می شود.

در شکل ۱۸ نتایج حل عددی خطای بی بعد ناشی از مانور سهمی هدف نسبت به زمان بی بعد به ازای  $N' = 4$  و سیستم هدایت و کنترل با مرتبه های مختلف نمایش داده شده است. در حالت  $N' = 4$  برخلاف سه حالت قبل (خطای سمت اولیه، مانور ثابت و مانور خطی) به ازای  $t_f/T > 10 \sim 15$  فاصله خطا به صفر نمی رسد و در عمل به حد مجانبی می رسد. همان طور که در این شکل مشاهده می شود با افزایش مرتبه سیستم فاصله خطا افزایش می یابد. البته در صورتی که ضریب ناوبری مؤثر برابر ۵ شود، نمودارهای شکل ۱۸ به صورت صعودی- نزولی می شود. مشابه حالت های قبل، مقادیر حداکثر فاصله خطا بر حسب مرتبه سیستم در شکل ۱۹ و بر حسب ضریب ناوبری مؤثر در شکل ۲۰ ترسیم شده است که البته رفتار فاصله خطا بر حسب مرتبه سیستم و ضریب ناوبری مؤثر در دو شکل اخیر، رفتاری مشابه سه حالت خطای سمت اولیه، مانور ثابت و مانور خطی دارد.

در شکل ۲۱ نتایج حل عددی خطای بی بعد ناشی از مانور سینوسی هدف نسبت به زمان بی بعد به ازای  $\hat{\omega} = 2$  و  $N' = 4$  ملاحظه می شود. با توجه به این شکل، با افزایش مرتبه سیستم خطای ناشی از مانور هدف افزایش می یابد و در مرتبه های بالا، به ازای شرایط مفروض، رفتاری مشابه حالت حدی نشان می دهد.

در جدول ۱ تقریب حد مجانبی برای حداکثر فاصله خطای بی بعد به ازای سیستم کنترل مرتبه ۵۰۰ و ضرایب ناوبری



شکل ۱۵- فاصله خطای بی بعد ناشی از مانور خطی هدف برای سیستم تا مرتبه ۳۰ ( $N' = 4$ )

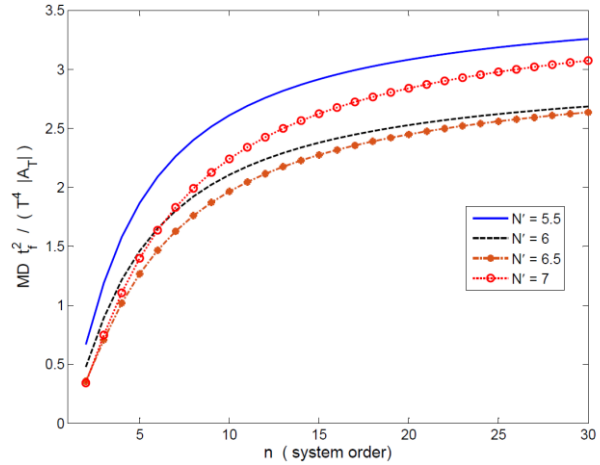
جدول ۱- مقادیر حداکثر فاصله خطای بی‌بعد در حالت خطای سمت اولیه و هدف با مانور به ازای سیستم مرتبه ۵۰۰

فاصله خطای بی‌بعد	ضریب ناوبری مؤثر				
	۲	۳	۵	۷	۹
$\hat{MD}_{max}^{HE}$	۱/۲۹۴	۱/۱۸۳	۱/۳۷۷	۴/۳۵۳	۸/۶۳۰
$\hat{MD}_{max}^{step\ M.}$	۳/۱۶۲	۱/۸۶۵	۱/۳۱۱	۳/۲۰۶	۷/۰۹۹
$\hat{MD}_{max}^{ramp\ M.}$	۴۱/۰۹۲	۵/۶۱۷	۲/۰۷۴	۲/۲۴۴	۶/۱۰۲
$\hat{MD}_{max}^{para\ M.}$	۲۶/۷۹	۶۷/۳۸	۴/۵۴	۲/۲۷	۵/۳۱

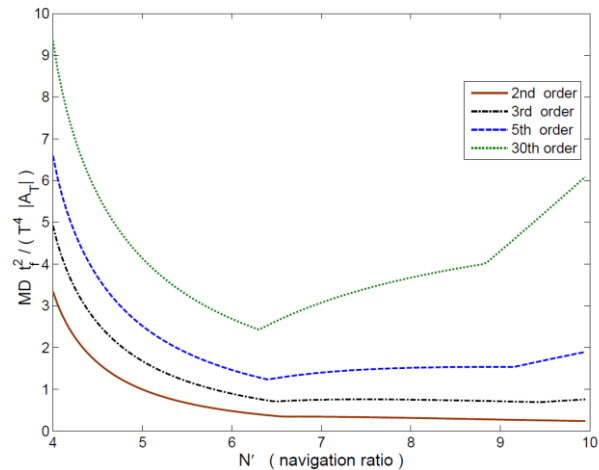
جدول ۲- مقادیر حداکثر فاصله خطای بی‌بعد به ازای سیستم با مرتبه‌های مختلف ( $N' = 4$ )

مرتبه	فاصله خطای بی‌بعد			
	$\hat{MD}_{max}^{HE}$	$\hat{MD}_{max}^{step\ M.}$	$\hat{MD}_{max}^{ramp\ M.}$	$\hat{MD}_{max}^{para\ M.}$
۲	۰/۴۲۷۳	۰/۴۴۹۱	۰/۸۳۴۷	۳/۴۱۴
۵	۰/۷۴۹۰	۰/۹۳۵۸	۱/۷۶۶۱	۶/۶۵۸
۸	۰/۸۶۸۱	۱/۱۱۰۳	۲/۱۲۲۰	۷/۷۹۸
۱۰	۰/۹۱۳۳	۱/۱۸۰۰	۲/۲۵۵۴	۸/۲۱۳
۱۵	۰/۹۷۹۲	۱/۲۸۰۲	۲/۴۴۶۰	۸/۷۹۵
۳۰	۱/۰۵۳۰	۱/۳۸۹۶	۲/۶۵۲۴	۹/۴۱۲
۵۰	۱/۰۸۵۳	۱/۴۳۶۲	۲/۷۳۹۷	۹/۶۶۹
۱۰۰	۱/۱۱۰۵	۱/۴۷۲۳	۲/۸۰۶۹	۹/۸۶۵
۵۰۰	۱/۱۳۱۰	۱/۵۰۱۹	۲/۸۶۱۹	۱۰/۰۲۴
۱۰۰۰	۱/۱۳۳۵	۱/۵۰۵۷	۲/۸۶۸۹	۱۰/۰۴۴
۱۵۰۰	۱/۱۳۴۴	۱/۵۰۶۹	۲/۸۷۱۲	۱۰/۰۵۱

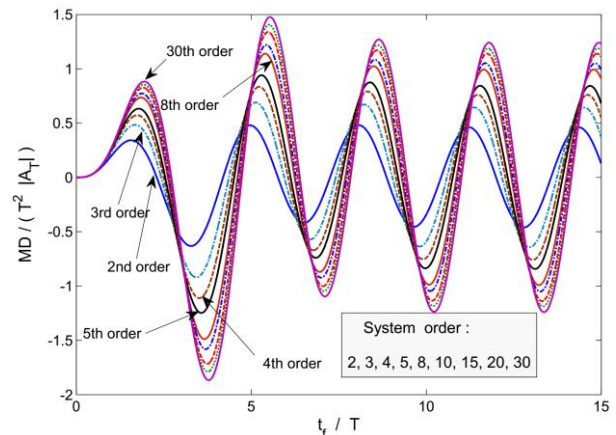
مختلف ذکر شده است. در این جدول، فاصله خطای بی‌بعد حداکثر به ترتیب از بالا به پایین، ناشی از انحراف سمت اولیه، مانور ثابت، خطی و مانور سهمی هدف مشاهده می‌شود. مقایسه اعداد هر ردیف مانند نمودارهای قبیل، نشان می‌دهد با افزایش ضریب ناوبری همواره فاصله خطا کاهش نمی‌یابد بلکه پس از عبور از ضریب ناوبری مشخصی، با افزایش  $N'$  خطا نیز افزایش می‌یابد. در جدول ۲ نیز فاصله خطای بی‌بعد حداکثر به ترتیب از چپ به راست، ناشی از انحراف سمت اولیه، مانور ثابت، خطی و مانور سهمی هدف به ازای سیستم مرتبه ۲ تا ۱۵۰۰ و ضریب ناوبری ۴ درج شده است. با مقایسه اعداد هر



شکل ۱۹- مقادیر حداکثر فاصله خطای بی‌بعد بر حسب مرتبه سیستم ناشی از مانور سهمی هدف به ازای مقادیر مختلف ضرایب ناوبری مؤثر



شکل ۲۰- مقادیر حداکثر فاصله خطای بی‌بعد بر حسب ضریب ناوبری مؤثر ناشی از مانور سهمی هدف

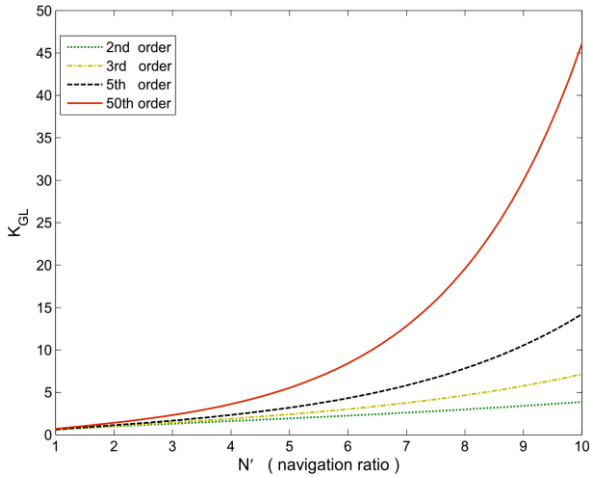


شکل ۲۱- فاصله خطای بی‌بعد ناشی از مانور سینوسی هدف بر حسب زمان نهایی بی‌بعد به ازای سیستم کنترل تا مرتبه ۳۰ ( $N' = 4, \hat{\omega} = 2$ )

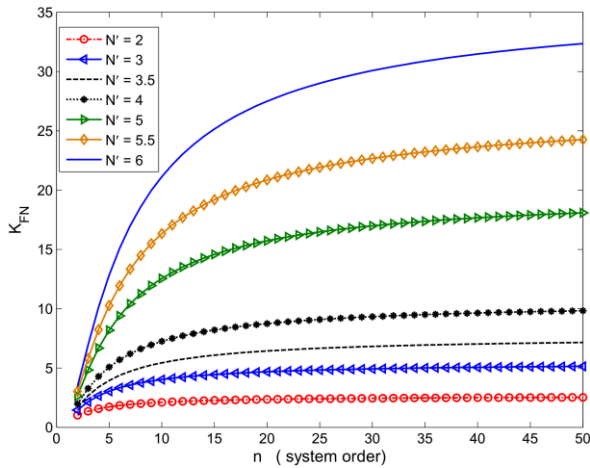
ستون مشاهده می‌شود با افزایش مرتبه سیستم، خطای بی‌بعد ناشی از عوامل مختلف خطا به مقدار حد مجانبی نزدیک می‌شود. البته مقادیر حدی استخراج شده در پیوست الف با مقادیر حدی به روش عددی مذکور مطابقت دارد.

### تحلیل فاصله خطا در حضور نویز جستجوگر

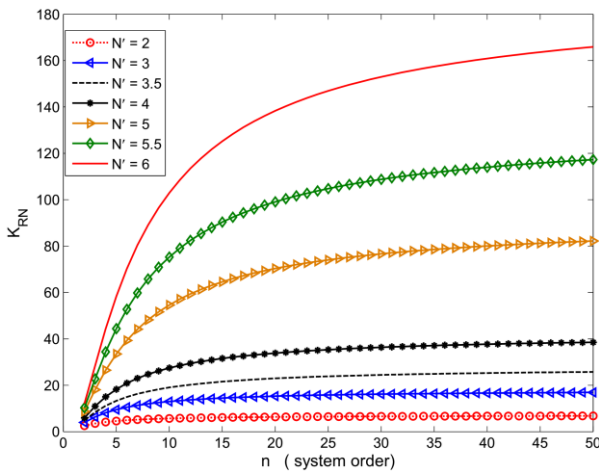
در ابتدا تحلیل فاصله خطا در حضور نویز جستجوگر به ازای سیستم‌های هدایت و کنترل تا مرتبه ۵۰ انجام شده است. در شکل‌های ۲۲ تا ۲۶ به ترتیب نتایج حل عددی ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز تابش  $(K_{GL})$ ، ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز مستقل از فاصله  $(K_{FN})$ ، ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز وابسته به فاصله سیستم نیمه‌فعال  $(K_{RN})$  و ضریب بی‌بعد خطای ناشی از نویز وابسته به فاصله سیستم فعال  $(K_{RNA})$  نسبت به مرتبه سیستم و ضریب ناوبری ملاحظه می‌شود. با توجه به شکل‌های مذکور، مقدار  $K$  با افزایش مرتبه سیستم افزایش می‌یابد. به علاوه، به نظر می‌رسد با افزایش مرتبه سیستم، مقادیر  $K$  به مقدار حدی می‌رسد. البته با توجه به خطای عددی موجود در حل مساله، نمی‌توان به طور یقین ادعای حد مجانبی برای مقادیر  $K$  نمود. اما در کاربرد می‌توان فرض کرد که رفتار سیستم به حد مجانبی می‌رسد. این مقدار حدی وابسته به ضریب ناوبری مؤثر است. در خصوص انتخاب مرتبه مناسب برای سیستم، به نظر می‌رسد، انتخاب مرتبه پنجم خطای زیادی ایجاد می‌کند؛ به ویژه به ازای مقادیر ناوبری بزرگتر از ۴ یا ۵.



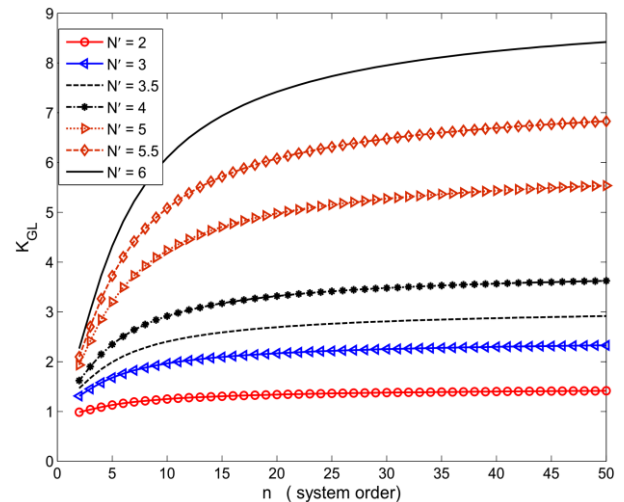
شکل ۲۲ - ضریب بی‌بعد فاصله خطا ناشی از نویز تابش بر حسب ضریب ناوبری به ازای مرتبه‌های مختلف سیستم هدایت و کنترل



شکل ۲۳ - ضریب بی‌بعد فاصله خطا ناشی از نویز مستقل از فاصله بر حسب مرتبه سیستم به ازای ضرایب ناوبری مختلف



شکل ۲۴ - ضریب بی‌بعد فاصله خطا ناشی از نویز وابسته به فاصله سیستم نیمه فعال بر حسب مرتبه سیستم



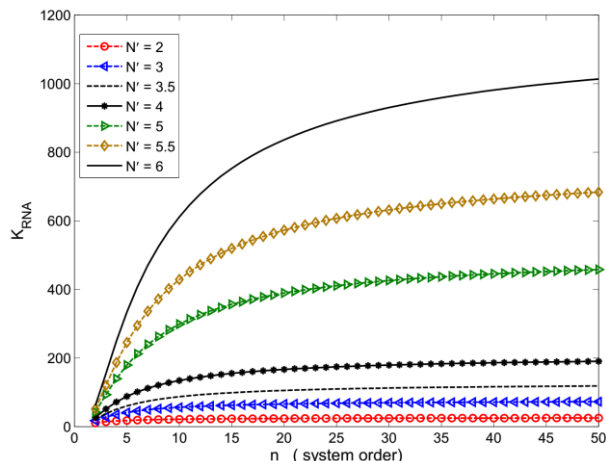
شکل ۲۵ - ضریب بی‌بعد فاصله خطا ناشی از نویز تابش بر حسب مرتبه سیستم به ازای ضرایب ناوبری مختلف

جدول ۳- ضرایب بی‌بعد فاصله خطا به ازای سیستم با مرتبه‌های مختلف ( $N' = 3$ )

مرتبه	ضرایب بی‌بعد			
	$K_{GL}$	$K_{FN}$	$K_{RN}$	$K_{RNA}$
۲	۱/۳۱۲	۱/۴۵۳	۳/۹۵	۱۷/۳۲
۵	۱/۶۷۹	۳/۰۳۹	۹/۴۷	۴۱/۳۰
۸	۱/۸۸	۳/۴۷۴	۱۱/۹۸	۵۱/۹۹
۱۰	۱/۹۶۵	۴/۰۲۹	۱۲/۹۸	۵۶/۲۳
۱۵	۲/۰۹۵	۴/۴۴۹	۱۴/۴۷	۶۲/۵۱
۳۰	۲/۲۵۲	۴/۹۲۸	۱۶/۱۶	۶۹/۶۱
۵۰	۲/۳۲۹	۵/۱۴	۱۶/۹۰	۷۲/۷۱
۱۰۰	۲/۳۹۸	۵/۳۱۱	۱۷/۴۹	۷۵/۱۴
۵۰۰	۲/۴۷۶	۵/۴۶۳	۱۷/۹۸	۷۷/۱۶
۱۰۰۰	۲/۴۹۲	۵/۴۸۶	۱۸/۰۴	۷۷/۴۱
۱۵۰۰	۲/۴۹۷	۵/۴۹۲	۱۸/۰۵۵۶	۷۷/۴۷۲
۲۰۰۰	۲/۵۰۱	۵/۴۹۶	۱۸/۰۶۶۴	۷۷/۵۱۵
۲۵۰۰	۲/۵۰۴	۵/۴۹۹	۱۸/۰۷۲۹	۷۷/۵۴۱
۳۵۰۰	۲/۵۰۸	۵/۵۰۳	۱۸/۰۸۰۴	۷۷/۵۷۱

جدول ۴- ضرایب بی‌بعد فاصله خطا به ازای سیستم با مرتبه‌های مختلف ( $N' = 6$ )

مرتبه	ضرایب بی‌بعد			
	$K_{GL}$	$K_{FN}$	$K_{RN}$	$K_{RNA}$
۲	۲/۲۶۲	۳/۴۴	۱۲/۱	۶۱
۵	۴/۳۲۵	۱۲/۸۳	۵۸/۳	۳۳۳
۸	۵/۵۶۳	۱۸/۵۹	۸۹/۰	۵۲۴
۱۰	۶/۰۹۹	۲۱/۱۳	۱۰۲/۹	۶۱۱
۱۵	۶/۹۳۸	۲۵/۱۵	۱۲۵/۲	۷۵۲
۳۰	۷/۹۵۳	۳۰/۰۷	۱۵۳	۹۳۰
۵۰	۸/۴۲۱	۳۲/۳۴	۱۶۵/۹	۱۰۱۳
۱۰۰	۸/۸۰۷	۳۴/۱۸	۱۷۶/۴	۱۰۸۱
۵۰۰	۹/۱۵۶	۳۵/۷۴	۱۸۵/۳	۱۱۳۹
۱۰۰۰	۹/۲۰۸	۳۵/۹۵	۱۸۶/۴	۱۱۴۶
۱۵۰۰	۹/۲۲۱	۳۵/۹۹	۱۸۶/۷	۱۱۴۸/۰
۲۰۰۰	۹/۲۳۱	۳۶/۰۳	۱۸۶/۹	۱۱۴۹/۳
۲۵۰۰	۹/۲۳۷	۳۶/۰۵	۱۸۷/۰	۱۱۵۰/۰
۳۵۰۰	۹/۲۴۵	۳۶/۰۷	۱۸۷/۱	۱۱۵۰/۹



شکل ۲۶- ضریب بی‌بعد فاصله خطا ناشی از نویز وابسته به فاصله سیستم فعال بر حسب مرتبه سیستم

به منظور تخمین دقیق‌تر خطای نهایی، به ازای شرایط مفروض، مرتبه سیستم بین ۸ تا ۱۰ (بر حسب مقدار ضریب ناوبری مؤثر) توصیه می‌شود. برای بررسی دقیق‌تر حد مجانبی، مقادیر فاصله خطا به ازای سیستم با چند مرتبه بسیار بالا محاسبه شده است و نتایج در جداول ۳ و ۴ به ازای دو ضریب ناوبری مؤثر ۳ و ۶ ذکر شده است. البته مرتبه‌های از سیستم که به ازای آن ضرایب بی‌بعد به حد مجانبی می‌رسد، بر حسب نوع نویز متفاوت است. چنانچه از دو جدول مذکور مشاهده می‌شود، حد مجانبی به ازای مرتبه بالاتر از ۱۰۰۰ روی می‌دهد.

در ادامه، از روش مونت کارلو به منظور صحت‌گذاری نتایج حل روش الحاقی استفاده می‌شود. در روش مونت کارلو، حل عددی معادلات (۳-۸) با گام انتگرال‌گیری زمانی  $10^{-4}$  با ۲۰۰۰ بار تکرار برای مرتبه‌های  $n=5, 15, 20, 27$  انجام شده است. نتایج حل عددی روش الحاقی (با خطوط توپر و خط‌چین) به همراه حل مونت کارلو (با علائم ستاره و دایره) در شکل ۲۷ ملاحظه می‌شود که نمایانگر تطابق نتایج است.

لازم به ذکر است که نتایج مطالعه حاضر برای تابع تبدیل دوجمله‌ای بدون محدودیت اشباع شتاب و با مدل نویز مطابق رابطه (۱) حاصل شده است. در صورتی که فرضیات مذکور تغییر یابد، ممکن است پیشنهاد مرتبه سیستم بین ۸ تا ۱۰ نیاز به تصحیح داشته باشد. اعمال اشباع شتاب سبب غیرخطی شدن و عدم استفاده از مدل الحاقی می‌شود که با توجه به مطالعه سیستم در حالت با بعد با روش مونت کارلو، خود نیاز به بررسی جامعی دارد (به پیوست ب رجوع شود). اما اصلاح مدل نویز توسط یک فیلتر شکل‌دهنده (به صورت تابع تبدیل)

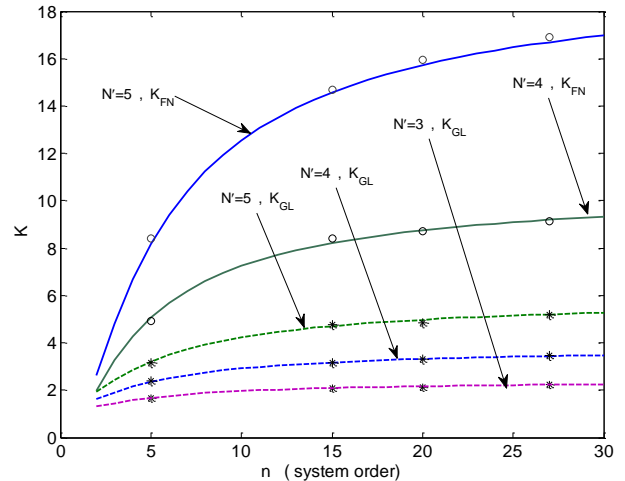
ناشی از نویز تابش، ثابت زمانی کل سیستم در مخرج کسر قرار می‌گیرد (فاصله خطا متناسب با عکس جذر ثابت زمانی معادل سیستم است)، در این لحظات ( $T \approx 0$ ) مقدار ثابت زمانی فیلتر ( $T_G$ ) اثر غالب پیدا می‌کند. بر حسب میزان بزرگتر از یک بودن این نسبت، امکان کاهش مرتبه سیستم وجود دارد، هر چند اعمال مرتبه پیشنهادی (۸ تا ۱۰) نتیجه دقیق‌تری دارد. لازم به ذکر است که به طور معمول، پدیده مذکور صرفاً در لحظاتی اتفاق می‌افتد و نه عملاً در یک بازه زمانی.

با توجه به این که در سه نویز دیگر (به جز نویز تابش) فاصله خطا متناسب با ثابت زمانی معادل سیستم (با توانی مثبت) است، تأثیر اعمال ثابت زمانی فیلتر شکل‌دهنده برای آن نویز در مطالعه حاضر قابل اغماض است.

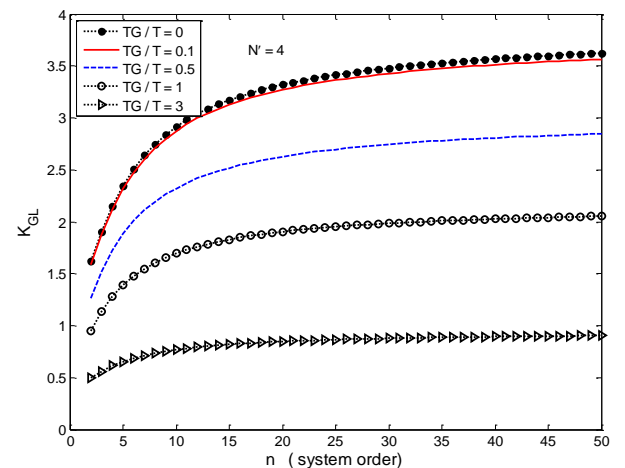
### نتیجه‌گیری

در این تحقیق، تحلیل بی‌بعد خطای نهایی قانون هدایت تناسبی برای سیستم هدایت و کنترل با تابع تبدیل دوجمله‌ای به ازای مرتبه‌های بالا بررسی شده است. برای این منظور، معادلات تک بعدی حاکم بر مساله به دو روش مستقیم و الحاقی به ازای انحراف سمت اولیه و مانورهای مختلف هدف (ثابت، خطی، سهمی و سینوسی) حل عددی شده است. نمودارهای حداکثر خطای اصابت ناشی از انحراف سمت و مانور ثابت هدف، نشان می‌دهد که عمدتاً نرخ تغییرات حداکثر خطا تا مرتبه پنج زیاد است؛ اما از مرتبه پنج تا ده تغییرات کمتر می‌شود و از مرتبه ده تا پانزده بسیار کم و از مرتبه پانزده به بالا، تقریباً قابل نظر کردن است. البته این مقدار برای هدف با مانور سهموی بالاتر از مرتبه ۳۰ خواهد بود. تحلیل مساله در حضور نویزهای جستجوگر نتایج مشابهی اما در مرتبه‌های بالاتر دارد. با توجه به نتایج حاصل، حداقل مرتبه ۸ تا ۱۰ (بر حسب مقدار ضریب ناوبری مؤثر) برای سیستم هدایت و کنترل دوجمله‌ای، به ویژه برای تحلیل شرایط بدترین حالت (بیشترین فاصله خطا)، پیشنهاد می‌شود.

با توجه به نتایج حل عددی، به نظر می‌رسد خطای نهایی به حد مجانبی می‌رسد، اما با توجه به خطای حل عددی و همچنین عدم اثبات ریاضی نمی‌توان یقیناً ادعای حد مجانبی داشت. البته مقادیر دقیق حدی به روش ریاضی استخراج شده است. همچنین نحوه «مدلسازی المان تأخیر زمانی خالص در مدل الحاقی» تشریح شده است. لازم به ذکر است که نتایج این تحقیق با فرض سیستم هدایت و کنترل دوجمله‌ای بدون شتاب

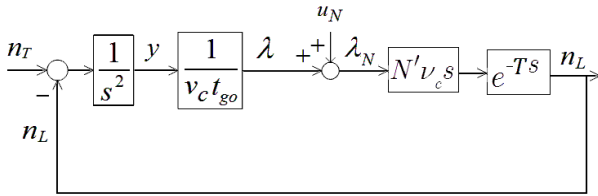


شکل ۲۷- انطباق روش الحاقی و مونت کارلو در خطای ناشی از نویز

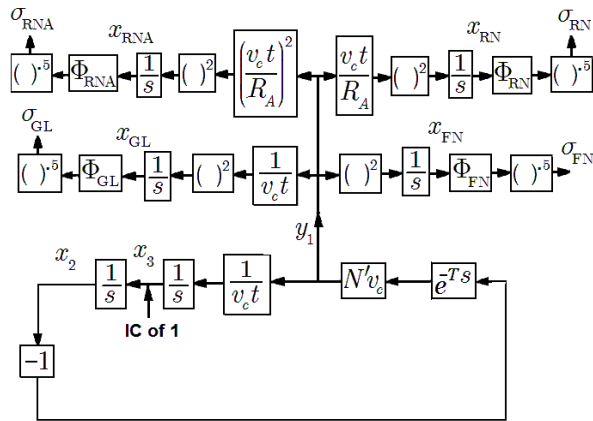


شکل ۲۸- ضریب بی‌بعد فاصله خطا ناشی از نویز تابش بر حسب مرتبه سیستم به ازای ثابت زمانی‌های مختلف فیلتر شکل‌دهنده

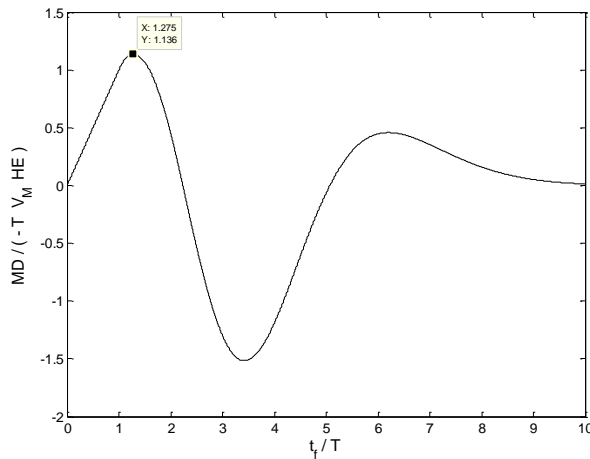
سیستم را از حالت خطی خارج نمی‌کند لذا همچنان استفاده از روش الحاقی با معادلات بی‌بعد میسر است. برای این منظور، تأثیر مدل نویز تابش با افزودن یک فیلتر پایین‌گذر مرتبه اول با ثابت زمانی  $T_G$  مطابق مرجع [۱] در شکل ۲۸ بررسی شده است. همان‌طور که از این شکل ملاحظه می‌شود، در صورتی که ثابت زمانی معادل سیستم هدایت و کنترل بیش از ده برابر ثابت زمانی فیلتر مذکور باشد، تأثیری در ضریب  $K_{GL}$  ندارد. با کوچک‌تر شدن این نسبت، به ویژه بزرگتر از یک شدن آن، ضریب  $K_{GL}$  کاهش یافته و با افزایش مرتبه سیستم، سریع‌تر به حد مجانبی می‌رسد. به طور نمونه این موضوع موقعی اتفاق می‌افتد که در اثر شیب منفی رادوم، ثابت زمانی کل سیستم نزدیک صفر شود. با توجه به این که در محاسبه فاصله خطای



شکل ۲۹ - نمودار بلوکی مساله هدایت در حالت حدی



شکل ۳۰ - مدل الحاقی شکل ۲۹ در حالت حدی در حضور نویز



شکل ۳۱ - فاصله خطای بی‌بعد در حالت حدی ناشی از خطای سمت اولیه با استفاده از روش الحاقی ( $N' = 4$ )

ناشی از مانور ثابت هدف در شکل ۳۲ و ناشی از چهار نویز مورد بررسی در شکل‌های ۳۳ و ۳۴ ملاحظه می‌شود.

لازم به ذکر است که سیستم کنترل شامل شتاب‌سنج (مدل مرتبه دوم)، ژيروسکوپ نرخی (مدل مرتبه دوم)، عملگر (مدل مرتبه دوم)، انتگرال‌گیر (مدل مرتبه اول)، جبران‌ساز (مدل مرتبه اول) و دینامیک وسیله پروازی (مدل مرتبه چهارم) مجموعاً برابر مرتبه ۱۲ می‌شود. مرتبه سیستم جستجوگر شامل

اشباع و در حالت خطی شده است و ممکن است در حالت غیرخطی، نتایج متفاوت شده و مرتبه دیگری برای سیستم هدایت و کنترل پیشنهاد شود.

یکی از دستاوردهای فرعی این تحقیق، علی‌رغم اظهارات منابع متعدد، این است که نشان داده شده است در حالت اعمال خطای سمت اولیه یا هدف با مانور ثابت، خطی و سهموی با افزایش ضریب نوابری مؤثر به ازای سیستم هدایت و کنترل دوجمله‌ای، خطای نهایی همیشه کاهش نمی‌یابد؛ بلکه نمودار خطای نهایی بر حسب ضریب نوابری مؤثر، نقطه کمینه‌ای دارد. همچنین رفتار این نقطه کمینه بر حسب مرتبه سیستم استخراج شده است. البته با افزایش ضریب نوابری مؤثر، ضرایب بی‌بعد خطای ناشی از نویز افزایش می‌یابد.

### پیوست الف: اثبات ریاضی مقادیر حدی فاصله خطا

در حالت حدی برای یک تابع دوجمله‌ای مرتبه  $n$  رابطه (۵۳) برقرار است [۱۷]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{T}{n} s\right)^n} = e^{-Ts} \quad (53)$$

با توجه به رابطه فوق اگر مرتبه تابع تبدیل سیستم به سمت بی‌نهایت میل کند، به جای تابع تبدیل دوجمله‌ای برای سیستم هدایت و کنترل از رابطه (۲)، می‌توان رابطه  $e^{-Ts}$  را جایگزین نمود و با استفاده از روش مستقیم، فاصله خطا را محاسبه نمود. در این حالت حدی، شکل ۱ به صورت شکل ۲۹ تبدیل می‌شود. با توجه به این که در ساختن مدل الحاقی برای تابع تبدیلی به صورت حاصل ضرب توابع تبدیل مرتبه اول مطابق رابطه (۵۴)، کافی است ورودی و خروجی آن معکوس شود، لذا در حالت حدی با توجه به رابطه (۵۳) می‌توان بلوک  $e^{-Ts}$  را جایگزین کرده و ورودی و خروجی آن را در ساختن مدل الحاقی معین یا اتفاقی مطابق شکل ۳۰ معکوس نمود.

$$F(s) = \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1 + T_j s)} \quad (54)$$

در ادامه با بی‌بعدسازی معادلات مدل الحاقی و حل عددی آن، نمودارهای بی‌بعد فاصله خطا، ناشی از خطای سمت در شکل ۳۱،



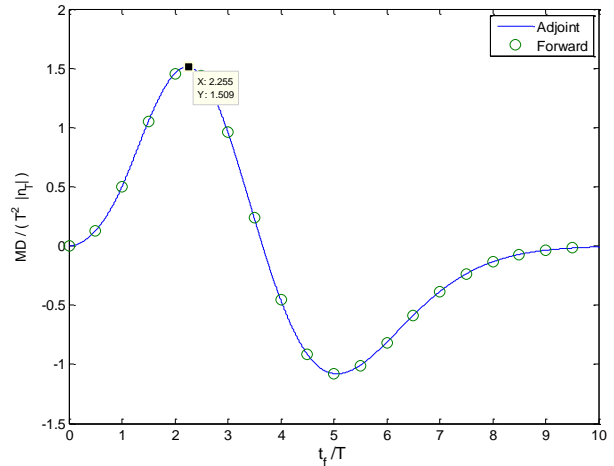
دینامیک (مدل مرتبه دوم)، ژيروسکوپ نرخی (مدل مرتبه دوم)، عملگر (مدل مرتبه دوم) و جبران‌ساز (مدل مرتبه اول) مجموعاً برابر ۷ می‌شود. با در نظر گرفتن فیلتر پایین‌گذر مرتبه اول برای تقلیل اثر نویز، مرتبه سیستم هدایت و کنترل، مجموعاً ۲۰ می‌شود. به علاوه، المان تأخیر زمانی خالص که در اجزاء سیستم هدایت و کنترل وجود دارد، از لحاظ ریاضی دارای مرتبه بی‌نهایت است.

### پیوست ب: اثر شتاب اشباع در فاصله خطا ناشی از نویز جستجوگر وسیله پروازی

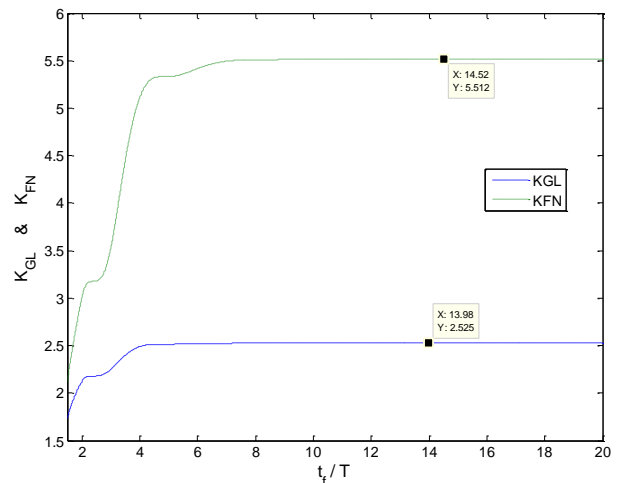
در تحقیق حاضر، تحلیل نسبتاً جامعی در حالت خطی و بدون اشباع شتاب صورت پذیرفت. اشباع شتاب سبب غیرخطی شدن و عدم استفاده از مدل الحاقی می‌شود. در حالت اشباع، از نظر ریاضی از سوپروپوزیشن نمی‌توان استفاده کرد. لذا در حالت غیرخطی، فاصله خطای ناشی از خطای سمت اولیه، مانور هدف و نویز جستجوگر را نمی‌توان جداگانه محاسبه نموده و سپس نتایج را ترکیب کرد. به علاوه، عدم استفاده از مدل الحاقی و استفاده از روش مونت کارلو سبب افزایش حداقل ۵۰۰ برابری بار محاسباتی به ازای یک نقطه (با فرض ۵۰۰ بار اجرا) می‌شود. به علاوه، تحلیل فاصله خطا در حالت با بعد، تنها به ازای شرایط اولیه معین و پارامترهای مشخص، قابل انجام است. لذا به ازای یک یا چند مقدار اولیه نمی‌توان نتیجه‌گیری کلی نمود. بنابراین، تأثیر اشباع شتاب برای سیستم با مرتبه بالا، خود نیاز به بررسی جامعی دارد. در اینجا تنها به دو نمودار به جهت تبیین موضوع و طرح پیشنهاد ادامه کار اکتفا می‌شود.

با افزایش مرتبه سیستم با توجه به شکل ۳۵ و با شرایط مفروض، ضریب بی‌بعد فاصله خطا ناشی از نویز تابش افزایش می‌یابد. به نظر می‌آید افزایش مرتبه مدل سیستم به ازای شتاب اشباع پایین (مثلاً 10g) معقول است اما به ازای شتاب اشباع 50g نتایج تطابق بهتری (با حالت بدون شتاب اشباع) دارد. با توجه به شکل ۳۶ ضریب بی‌بعد فاصله خطا ناشی از نویز تابش با افزایش مقدار شتاب اشباع، رفتاری نزولی-صعودی و شبه‌پایا دارد. نتایج مونت کارلو در این دو شکل به ازای ۵۰۰ اجرا حاصل شده است.

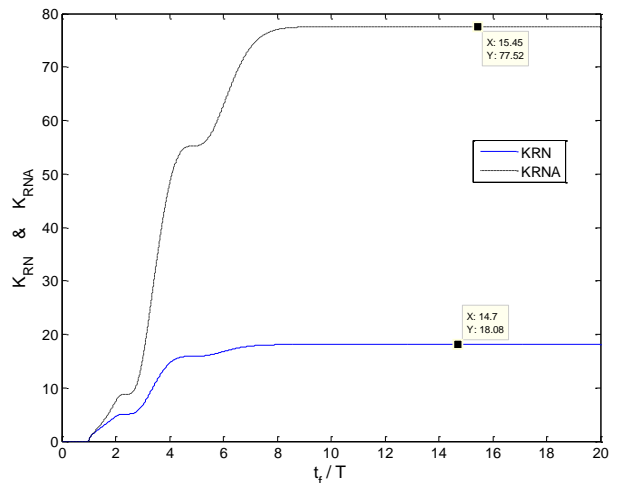
با توجه به دلایل اشاره شده، صحت و سقم رفتار مذکور (به ازای مقادیر مختلف ضرایب ناوبری مؤثر هدایت تناسبی، ثابت‌های زمانی سیستم هدایت و کنترل، سرعت نزدیک شدن و...) نیاز به مطالعه‌ای جامع دارد.



شکل ۳۲ - فاصله خطای بی‌بعد در حالت حدی ناشی از مانور ثابت هدف با استفاده از روش الحاقی و روش مستقیم ( $N' = 4$ )



شکل ۳۳ - ضریب بی‌بعد فاصله خطا در حالت حدی ناشی از نویز تابش و مستقل از فاصله بر حسب زمان نهایی بی‌بعد ( $N' = 3$ )



شکل ۳۴ - ضریب بی‌بعد فاصله خطا در حالت حدی ناشی از نویز وابسته به فاصله بر حسب زمان نهایی بی‌بعد ( $N' = 3$ )

Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 27. No. 2, 2004.

- [6] Wenshan Su, Weilin Wang, Lei Chen, "Precision Analysis of Exoatmospheric Endgame Guidance based on Unscented Transformation," IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference, Yantai, China, Aug. 2014, pp. 1362-1367.
- [7] Neslin, F.W., and Zarchan, P., "A New Look at Classical versus Modern Homing Missile Guidance," AIAA Journal of Guidance and Control, Vol. 4, No. 1, 1981, pp. 78-85.
- [8] Alpert, J., "Miss Distance Analysis for Command Guided Missiles," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 11. No. 6, 1988, pp. 481-487.
- [9] S.N. Balakrishnan, A. Tsourdos, B.A. White, *Advances in Missile Guidance, Control, and Estimation*, Taylor&Francis Group, 2013.
- [10] Bucco, D., Zarchan, P., Weiss, M., "On Some Issues Concerning the Adjoint Simulation of Guidance Systems", AIAA, Guidance, Navigation and Control Conference, 2012.
- [11] Zarchan, P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*, Sixth ed., Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 239, AIAA, 2012.
- [12] Alpert, J., "Normalized Analysis of Interceptor Missiles Using the 4-State Optimal Guidance System" Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 26. No. 6, 2003, pp. 838-845.
- [13] Neslin, F.W., and Zarchan, P., "Miss Distance Dynamics in Homing Missiles," AIAA Guidance and Control Conference Proceedings, Aug. 1984, pp. 84-98.
- [14] Jalali-Naini, S.H., "Normalized Miss Distance Analysis of Single-Lag Optimal Guidance Law with Radome Effect, Saturation and Fifth-Order Control System," Scientia Iranica, Transaction B, Vol. 21, No 5, Oct. 2014, pp. 1683-1692.

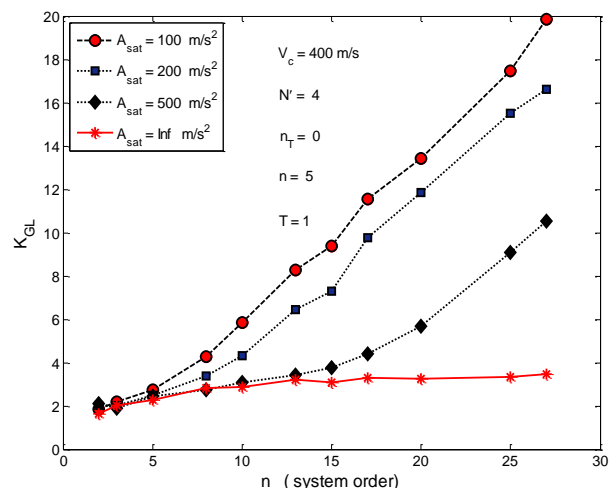
[۱۵] جلالی نائینی س.ح.، "تحلیل فاصله خطای بی‌بعد ناشی از

سیستم کنترل ناکمینه فاز در حضور اثر رادوم و اهداف با مانور" نشریه علمی-پژوهشی مهندسی هوانوردی، سال پانزدهم، شماره اول، بهار و تابستان ۱۳۹۲، صفحات ۵۴-۴۱.

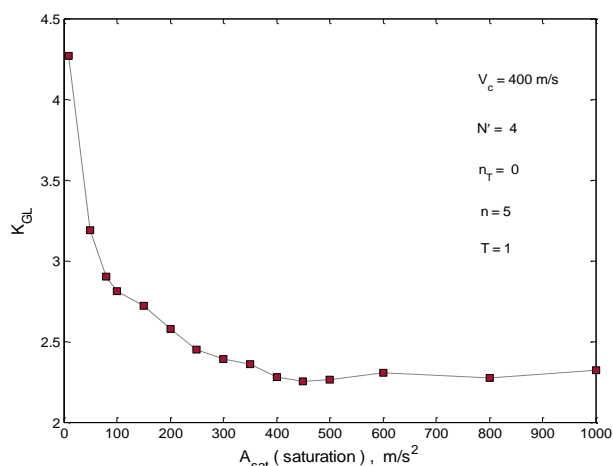
[۱۶] جلالی نائینی س.ح.، "تحلیل فاصله خطای ناشی از نویز در

ناوبری تناسبی با بازخورد شتاب برای سیستم مرتبه دوم با استفاده از روش الحاقی بی‌بعد" نشریه علمی-پژوهشی مهندسی هوانوردی، سال پانزدهم، شماره دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۲، صفحات ۷۱-۵۷.

- [17] Roffel, B., and Betlem, B., *Process Dynamics and Control: Modeling for Control and Prediction*, Wiley, 2006.



شکل ۳۵- ضریب بی‌بعد فاصله خطا ناشی از نویز تابش بر حسب مرتبه سیستم هدایت و کنترل به ازای مقادیر مختلف شتاب اشباع



شکل ۳۶- ضریب بی‌بعد فاصله خطا ناشی از نویز تابش بر حسب شتاب اشباع برای سیستم هدایت و کنترل مرتبه پنجم

## منابع و مراجع

- [1] Shneydor, N.A., *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics, and Control*, Horwood Series in Engineering Science, 1998.
- [2] Fleeman, E.L., *Tactical Missile Design*, AIAA Education Series, 2001.
- [3] Spencer, A., and Moore W., "Design Trade-offs for Homing Missiles," AIAA SDIO Annual Interceptor Technology Conference, AIAA-92-2755, USA, 1992.
- [4] Miwa, S., "Radome Effect on the Miss Distance of a Radar Homing Missile," Electronics and Communications in Japan, Part 1, Vol. 81, No. 7, 1998.
- [5] Hablani, H.B., and Pearson, D.W., "Miss Distance Error Analysis of Exoatmospheric Interceptors,"