

ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده طولی با شرایط مرزی مختلف به روش‌های تحلیلی و تجربی

باقری، مرتضی

استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه هوایی شهید ستاری

چکیده

در این تحقیق ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده طولی (استرینگر) به دو روش تحلیلی و تجربی با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در حل تحلیلی از روش ریتز استفاده شده و تقویت‌کننده‌ها به صورت المان‌های مجزا در نظر گرفته شده‌اند. همچنین در روش تجربی آزمایش مودال انجام شده است. شرایط مرزی مختلف شامل چند نوع مختلف تکیه‌گاه ساده، چند نوع مختلف تکیه‌گاه گیردار و تکیه‌گاه آزاد می‌باشد. برخی نتایج تحلیلی فرکانس‌های طبیعی با مقادیر تجربی و تحلیلی موجود در مراجع دیگر و همچنین با کار تجربی انجام شده در این تحقیق، مقایسه شده است که مطابقت بسیار خوبی بین نتایج تحلیلی و تجربی مشاهده شده است. به علاوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی، فرکانس پایه و شکل مودهای طبیعی به ازای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: پوسته استوانه‌ای، تقویت‌کننده طولی، ارتعاش آزاد، فرکانس طبیعی، کار تجربی

Free Vibration Analysis of Longitudinally Stiffened Cylindrical Shells with Different Types of Boundary Conditions Using Analytical and Experimental Methods

Abstract

In this research, the free vibration analysis of cylindrical shells with longitudinal stiffeners, i.e. stringer with two methods of analytical and experimental for different boundary condition is investigated. Ritz method is applied in analytical solution while stiffeners treated as discrete elements. Also, in experimental method the modal testing is performed. Different types of simply supported, different types of clamped and also free boundary conditions are considered. Some analytical results for natural frequencies are compared with other's experimental and analytical results, and hence with experimental results of this research, which showed good agreement. Furthermore, variations of natural frequencies, fundamental frequency and natural mode shapes for different types of boundary conditions are considered.

Keywords: Cylindrical Shell, Longitudinal Stiffener, Free Vibration, Natural Frequency, Experimental Work.

مقدمه

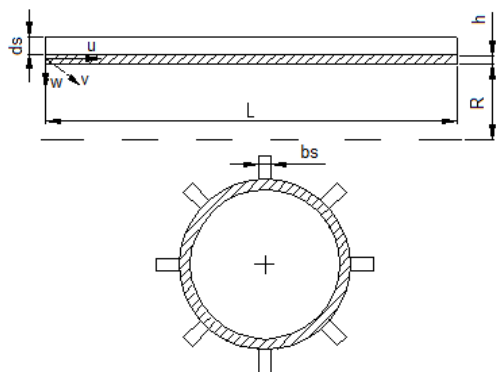
دچار ارتعاش، کمانش و خستگی شود. فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی، از موارد مهم و قابل توجه در طراحی این نوع سازه‌ها است. یکی از راه‌های افزایش نسبت استحکام به وزن، در چنین سازه‌هایی، تقویت پوسته با تقویت‌کننده طولی به شکل تیر می‌باشد.

شناخت خواص دینامیکی سازه‌های پوسته‌ای از مسائل مورد توجه طراحان می‌باشد، زیرا چنین سازه‌هایی کاربردهای زیادی از جمله در بدنه هواپیماها و موشک‌ها دارند. در اکثر این موارد پوسته تحت بارهای دینامیکی قرار دارد و ممکن است

در این مقاله، ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده طولی برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف توسعه داده شده است. با روشی که در این مقاله به کار برده شده است به راحتی می‌توان شرایط تکیه‌گاهی مختلف شامل چند نوع تکیه‌گاه ساده، چند نوع تکیه‌گاه گیردار و تکیه‌گاه آزاد را برای پوسته در نظر گرفت. برخی نتایج به دست آمده با کار تجربی انجام شده در همین تحقیق و همچنین با نتایج تحلیلی و تجربی مراجع دیگر مورد مقایسه قرار گرفته و اعتبار سنجی شده است. به علاوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی، فرکانس پایه و شکل موده‌های طبیعی به ازای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. همچنین شکل موده‌های طبیعی به دست آمده با روش‌های تجربی و تحلیلی برای شرایط مرزی مختلف رسم شده است.

روابط تئوری

هدف بدست آوردن معادلات حرکت برای یک پوسته استوانه‌ای نازک مطابق شکل ۱، با ضخامت یکنواخت h ، شعاع R ، طول L ، دانسیته جرمی ρ ، مدول الاستیسیته E ، نسبت پواسون ν و مدول برشی $G = E/2(1+\nu)$ می‌باشد.



شکل ۱- پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده طولی

این پوسته با تعداد S استرینگر که به فواصل یکسان از همدیگر قرار گرفته‌اند، تقویت شده است. استرینگر z ام دارای عرض ثابت bs_j و ارتفاع ثابت ds_j می‌باشد. هر کدام از تقویت‌کننده‌ها می‌توانند دارای جنس‌های مختلف و حتی متفاوت با پوسته باشند. نسبت پواسون، مدول برشی، مدول الاستیسیته و دانسیته جرمی استرینگر z ام به ترتیب با پارامترهای $\rho s_j, Es_j, Gs_j, \nu s_j$ مشخص شده‌اند.

سندرز [۱]، معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای نازک را ارائه نمود. ایگل و سیوال [۲]، اثر تقویت‌کننده‌ها بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده با استرینگر (تقویت‌کننده طولی) و رینگ (تقویت‌کننده محیطی)، با شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار دادند. تقویت‌کننده‌ها به صورت المان‌های مجزا در نظر گرفته شده و از روش انرژی و اصل همپلتون برای بدست آوردن معادلات حرکت استفاده شده است. راینهارت و ونگ [۳]، ارتعاشات آزاد پوسته تقویت‌شده با استرینگر با تکیه‌گاه ساده را از روش لاگرانژ مورد بررسی قرار دادند. استرینگرها به صورت المان‌های مجزا مدل شدند. مصطفی و علی [۴]، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده با رینگ و استرینگر و با تکیه‌گاه ساده را با کاربرد روش ریلی ریتز و استفاده از مدلسازی گسسته انجام دادند. همچنین زاهو و لی [۵]، آنالیز ارتعاشی پوسته استوانه‌ای چند لایه‌ای دوار با تکیه‌گاه ساده و تقویت‌کننده‌های طولی و محیطی را با استفاده از روش انرژی انجام دادند. اثر تقویت‌کننده‌ها به دو نوع متوسط‌گیری و روش المان مجزا مدلسازی شدند. جعفری و باقری [۶]، ارتعاشات آزاد پوسته‌های تقویت‌شده طولی را برای اولین بار با خارج از مرکزی غیریکنواخت مورد بررسی قرار دادند و مشاهده نمودند که با توزیع غیر-یکنواخت ارتفاع استرینگرها می‌توان به مقادیر فرکانس‌های طبیعی بالاتری در مقایسه با حالت ارتفاع ثابت دست یافت. صادقی فر و همکاران [۷]، بهینه‌سازی پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های محیطی و طولی را انجام دادند. آن‌ها برای تحلیل از روش ریتز استفاده کرده و شکل‌های مختلف مقطع تقویت‌کننده‌ها را مورد بررسی قرار دادند. ژیانگ و همکاران [۸]، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای به استفاده از روش موجک انجام دادند. آن‌ها توابع جابجایی را بر اساس سری فوریه در نظر گرفتند. هیون و مون [۹]، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای را با استفاده از روش ریلی ریتز و بر اساس تئوری-های مختلف پوسته بررسی نمودند. نقاش و همکاران [۱۰]، ارتعاشات آزاد پوسته با شکل دلخواه و با ضخامت متغیر که با استرینگرهایی تقویت شده است را به روش نوار محدود تحلیل نمودند. آن‌ها از چندجمله‌ای لاگرانژ برای توابع جابجایی استفاده نمودند و تقویت‌کننده‌ها را به صورت المان‌های مجزا در نظر گرفتند.

انرژی پوسته

روابط هندسی موجود بین تغییر مکان‌های مرکز سطح استرینگر z ام (us_j, vs_j, ws_j) با تغییر مکان‌های متناظر سطح میانی پوسته (u, v, w) در رابطه (۵) آمده است:

$$\begin{aligned} us_j &= u + es_j \frac{\partial w}{\partial x} \\ vs_j &= v \left(1 + \frac{es_j}{R} \right) + \frac{es_j}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ ws_j &= w \end{aligned} \quad (5)$$

خارج از مرکزی هر استرینگر به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شود:

$$es_j = \pm \frac{h + ds_j}{2} \quad (6)$$

که علامت مثبت و منفی به ترتیب برای استرینگر بیرونی و داخلی به کار می‌رود.

با جایگذاری روابط (۵) و (۶) در معادلات انرژی تقویت‌کننده (معادلات ۳ و ۴) می‌توان انرژی تقویت‌کننده‌ها را برحسب مولفه‌های تغییر مکان سطح میانی پوسته نوشت و تابع انرژی کل سیستم به صورت رابطه (۷) تشکیل داد:

$$F = U + T + \sum_{j=1}^S (Us_j + Ts_j) \quad (7)$$

توابع (۸) را می‌توان برای جدا سازی متغیرهای فضایی x, θ و متغیر زمانی t به کار برد:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= u(x) \sin n\theta e^{i\omega t} \\ v(x, \theta, t) &= v(x) \cos n\theta e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (8)$$

در این روابط n شماره مود محیطی و ω فرکانس ارتعاشات می‌باشد.

شرایط مرزی

برای پوسته استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده چهار نوع شرط مرزی را می‌توان به صورت روابط (۹) بیان نمود:

$$\begin{aligned} S_1: \bar{w} = \bar{v} = 0; & \quad S_2: \bar{w} = 0; \\ S_3: \bar{w} = \bar{u} = 0; & \quad S_4: \bar{w} = \bar{v} = \bar{u} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

همچنین چهار نوع تکیه‌گاه گیردار نیز می‌توان به صورت روابط (۱۰) در نظر گرفت:

بر اساس تئوری پوسته نازک سندرز [۱]، انرژی کرنشی، خمشی و کششی پوسته بدون در نظر گرفتن تقویت‌کننده‌ها را می‌توان به صورت رابطه (۱) نوشت:

$$\begin{aligned} U_s &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)^2 \right] \right. \\ &+ \frac{2\nu}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \left. \right\} \\ &+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{R^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{2\nu}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\left. + \frac{2(1-\nu)}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{3}{4} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{4R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] R d\theta dx \end{aligned} \quad (1)$$

با صرف نظر کردن از اینرسی چرخشی به‌خاطر نازک بودن پوسته، انرژی جنبشی پوسته بدون در نظر گرفتن تقویت‌کننده بر طبق رابطه (۲) می‌باشد:

$$T = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \rho h \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} R d\theta dx \quad (2)$$

انرژی استرینگر

برای انرژی کرنشی استرینگر z ام با در نظر گرفتن اثرات کشش، خمش دو محوری و پیچش رابطه (۳) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} Us_j &= \frac{Es_j}{2} \int_0^L \left[As_j \left(\frac{\partial us_j}{\partial x} \right)^2 + Iys_j \left(\frac{\partial^2 ws_j}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\ &\left. + Izs_j \left(\frac{\partial^2 vs_j}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx + \frac{Gs_j}{2R^2} \int_0^L Js_j \left(\frac{\partial^2 ws_j}{\partial x \partial \theta} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (3)$$

همچنین انرژی جنبشی استرینگر z ام با در نظر گرفتن اینرسی‌های انتقالی در سه جهت و اینرسی دورانی حول دو محور، عبارتست از:

$$\begin{aligned} Ts_j &= \frac{1}{2} \rho s_j \int_0^L \left\{ As_j \left[\left(\frac{\partial us_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial vs_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial ws_j}{\partial t} \right)^2 \right] \right. \\ &\left. + (Iys_j + Izs_j) \left(\frac{\partial^2 ws_j}{\partial t \partial x} \right)^2 \right\} dx \end{aligned} \quad (4)$$

$$\left[[K] + \sum_{j=1}^S [Ks_j] - \Omega^2 \left([M] + \sum_{j=1}^S [Ms_j] \right) \right] \{C\} = \{0\} \quad (13)$$

در رابطه (۱۳) $[M]$ و $[K]$ ماتریس جرم و ماتریس سختی پوسته، $[Ms_j]$ و $[Ks_j]$ ماتریس جرم و ماتریس سختی استرینگر j ام می‌باشند. همچنین بردار $\{C\} = \{p_1, \dots, p_{NS}, q_1, \dots, q_{NS}, r_1, \dots, r_{NS}\}^T$ ستونی ضرایب ریتز و $\Omega^2 = (1-v^2)\rho R^2 \omega^2 / E$ پارامتر فرکانسی بدون بعد می‌باشد.

جدول ۱- توان‌های مختلف P به ازای شرایط مرزی مختلف

شرایط	S1	S2	S3	S4	C1	C2	C3	C4	F
مرزی									
P_u	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
P_v	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰
P_w	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۰

نتایج تحلیل

معادله فرکانسی برای دو مدل پوسته تقویت‌شده طولی با شرایط مرزی مختلف شامل تکیه‌گاه آزاد، چند نوع مختلف تکیه‌گاه ساده و چند نوع تکیه‌گاه مختلف گیردار حل شده است. مشخصات پوسته‌های تقویت‌شده در جدول ۲ آمده است. جدول ۳، مقایسه بین نتایج تحلیل با نتایج تجربی و تحلیلی موجود در مراجع دیگر را برای مدل M1 نشان می‌دهد که مطابقت خیلی خوبی مشاهده می‌شود. بنابراین می‌توان از دقت روش تحلیلی به کار برده شده اطمینان حاصل نمود. همچنین با افزایش تعداد جملات تابع ریتز، همگرایی بهتر نتایج قابل مشاهده است. نتایج تحلیلی موجود جدول ۳ نشان می‌دهد که در نظر گرفتن تعداد شش جمله برای تابع ریتز کافی می‌باشد. در ادامه مدل M2 به دو روش تحلیلی و تجربی، با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفت و اثر شرایط مرزی بر روی تغییرات فرکانس‌های طبیعی و فرکانس پایه ارائه گردید. در روش تجربی آزمایش مودال بر روی مدل با شرایط مرزی آزاد انجام گرفت.

$$\begin{aligned} C_1: \bar{w} = \bar{v} = \frac{d\bar{w}}{dx} = 0; \quad C_2: \bar{w} = \frac{d\bar{w}}{dx} = 0; \\ C_3: \bar{w} = \bar{u} = \frac{d\bar{w}}{dx} = 0; \quad C_4: \bar{w} = \bar{v} = \bar{u} = \frac{d\bar{w}}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

توابع ریتز

توابع تغییر مکان ریتز طوری باید باشند که شرایط مرزی فوق را ارضا نمایند. در حالت کلی این توابع را می‌توان به صورت چند جمله‌ای‌های خاصی به شکل روابط (۱۱) در نظر گرفت:

$$\bar{u} = \left(\sum_{i=1}^{NS} p_i \bar{x}^{i-1} \right) (\bar{x}) P_u^0 (1-\bar{x}) P_u^1 = \sum_{i=1}^{NS} p_i \bar{u}_i \quad (11-1)$$

$$\bar{v} = \left(\sum_{i=1}^{NS} q_i \bar{x}^{i-1} \right) (\bar{x}) P_v^0 (1-\bar{x}) P_v^1 = \sum_{i=1}^{NS} q_i \bar{v}_i \quad (11-2)$$

$$\bar{w} = \left(\sum_{i=1}^{NS} r_i \bar{x}^{i-1} \right) (\bar{x}) P_w^0 (1-\bar{x}) P_w^1 = \sum_{i=1}^{NS} r_i \bar{w}_i \quad (11-3)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{h}; \quad \bar{v} = \frac{v}{h}; \quad \bar{w} = \frac{w}{R}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L} \quad (11-4)$$

توان‌های مختلف P ، در جدول ۱ آمده است. اندیس‌های P ، شامل ۰ و ۱ نشان‌دهنده دو انتهای پوسته در $\bar{x} = 0$ و $\bar{x} = 1$ می‌باشند. این شکل از توابع ریتز به راحتی قابل مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری هستند و ترکیبات مختلفی از شرایط مرزی به راحتی قابل بررسی می‌باشند. همچنین با افزایش تعداد جملات سری (NS)، همگرایی تغییر مکان‌های تقریبی بیشتر خواهد شد.

معادلات حرکت

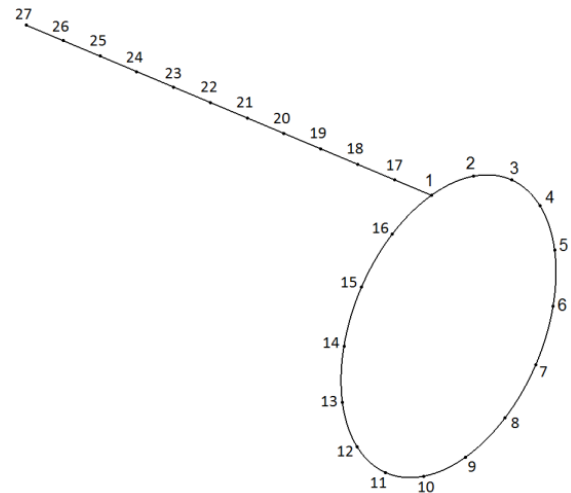
با استفاده از روش ریتز (مینیمم کردن تابع انرژی نسبت به ضرایب توابع ریتز)، معادلات حرکت بدست می‌آیند. با حل این معادلات، فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی به‌دست خواهند آمد.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_i} = 0 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, NS \quad (12)$$

با جایگذاری روابط (۸) تا (۱۱) در رابطه (۷) و جایگذاری آن در رابطه (۱۲)، ماتریس مشخصه سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

جدول ۲- ابعاد هندسی و خواص مکانیکی دو مدل پوسته تقویت-
شده طولی

خصوصیات	ابعاد و مقادیر	
	مدل M1	مدل M2
S تعداد استرینگرها	۴	۸
R شعاع (m)	۰/۱۹۴۵	۰/۰۸۲۵
h ضخامت (m)	۰/۰۰۰۴۶۴	۰/۰۰۲۵
L طول (m)	۰/۹۸۶۸	۰/۳۴۷۵
ds ارتفاع استرینگرها (m)	۰/۰۱۰۱	۰/۰۰۷۳
bs عرض استرینگرها (m)	۰/۰۰۱۰۴	۰/۰۰۲
E مدول الاستیسیته (Gpa)	۲۰۰	۲۰۰
ρ (Kg/m ³) دانسیته	۷۷۷۰	۷۸۲۳
V نسبت پواسون	۰/۳	۰/۲۹
نوع تقویت	داخلی	خارجی



شکل ۲- نقاط تحریک در آزمایش مودال

جدول ۳- همگرایی و مقایسه فرکانس‌های طبیعی با مراجع دیگر برای پوسته تقویت‌شده مدل M1 با تکیه‌گاه ساده S1-S1

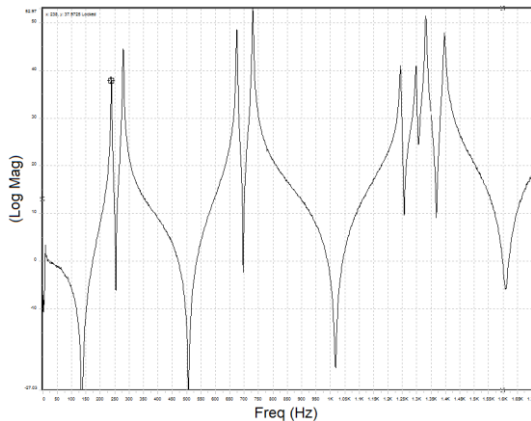
شماره مود	نتایج تحلیل - فرکانسهای طبیعی (هرتز)				مقادیر تجربی [۳]	درصد خطا %	مقادیر تحلیلی [۴]	خطا %
	تعداد جملات - NS - توابع ریتز							
	m	n	۳	۴				
۱	۱	۸۰۵/۶۸۶۷	۷۶۴/۰۰۲۲	۷۶۳/۸۸۶۷	۷۶۳/۸۸۶۷	---	۷۷۸	-۱/۸
	۲	۳۴۸/۸۲۸۷	۳۱۲/۴۸۶۰	۳۱۲/۴۱۰۵	۳۱۲/۴۱۰۵	---	۳۱۷	-۱/۵
	۳	۱۸۲/۶۹۱۲	۱۵۶/۳۵۶۷	۱۵۶/۳۱۴۳	۱۵۶/۳۱۴۳	۱۵۶	۰/۲	-۱/۷
	۴	۱۱۸/۵۱۰۸	۹۹/۰۷۳۳	۹۹/۰۴۹۶	۹۹/۰۴۹۶	۱۰۰	-۰/۹۵	-۰/۶
	۵	۱۰۱/۵۴۵۸	۸۸/۷۲۲۱	۸۸/۷۱۰۷	۸۸/۷۱۰۷	۸۹	-۰/۳۲	-۳/۱
	۶	۱۱۳/۴۱۲۹	۱۰۵/۸۶۸۲	۱۰۵/۸۶۳۳	۱۰۵/۸۶۳۳	۱۰۴	۱/۸	-۰/۱
	۷	۱۴۱/۹۶۵۵	۱۳۷/۲۷۶۰	۱۳۷/۲۷۳۸	۱۳۷/۲۷۳۸	۱۳۷	۰/۲	-۳/۴
	۸	۱۸۰/۴۹۴۷	۱۷۷/۱۰۳۹	۱۷۷/۱۰۲۸	۱۷۷/۱۰۲۸	۱۷۴	۱/۸	-۰/۵

ضربات چکش در جهت شعاعی وارد شده است. شکل ۲ موقعیت این نقاط را نشان می‌دهد. برای ثبت شتاب‌های خروجی از شتاب‌سنج پیزوالکتریک استفاده شده که در نقطه شماره ۱ با موم به مدل وصل شده است. ایجاد شرایط مرزی دوسرآزاد از طریق آویزان کردن با طناب کشی انجام شده است (شکل ۳). برای بررسی اثر جرم شتاب‌سنج از دو نوع شتاب‌سنج با جرم‌های ۱۶ و ۳۲ گرم استفاده شده است و با توجه به جرم زیاد نمونه آزمایش (۲/۷ kg) اختلاف بسیار ناچیزی در نتایج مشاهده گردید. برای تحلیل اطلاعات توابع پاسخ فرکانسی (FRF^۱) به دست آمده از آزمایش مودال، از نرم افزار STAR Modal

برای ساخت نمونه ابتدا پوسته تقویت نشده از طریق ماشین‌کاری لوله ضخیم فولادی تهیه شد و سپس استرینگرها با استفاده از چسب قطره‌ای قوی به پوسته متصل شدند. در صورت ساخت یکپارچه استرینگرها با پوسته، به خاطر ایجاد فیلت ابزارکار در محل اتصال تقویت‌کننده‌ها به پوسته، مقدار سختی و جرم تغییر کرده و خطای آزمایش بیشتر می‌شد.

برای جلوگیری از حذف برخی از مودها و همچنین به دست آوردن شکل مودهای مختلف محیطی و طولی دقیق، نمونه تحت آزمایش در جهت محیطی به ۱۶ نقطه و در جهت طولی به ۱۲ نقطه تقسیم شده و در ۲۷ نقطه

وجود خطای کم، بین نتایج تحلیلی و تجربی جدول ۴ و همچنین مطابقت خوب نتایج تحلیلی با مرجع دیگر در جدول ۳، از صحت و دقت نتایج روش تحلیلی می‌توان اطمینان حاصل نمود و نتایج را برای حالت‌های دیگر از جمله شرایط مرزی مختلف توسعه داد.



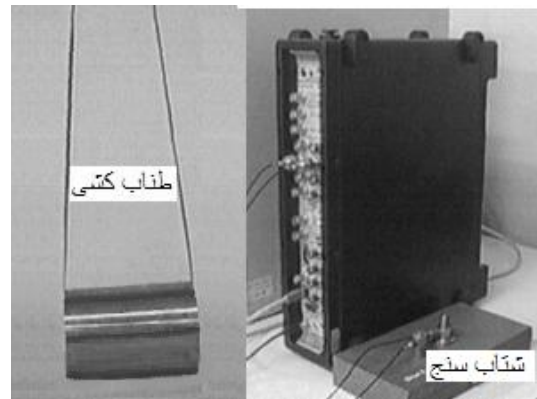
شکل ۴- تابع پاسخ فرکانسی مربوط به نقطه شماره ۱

جدول ۴- مقایسه فرکانس‌های طبیعی برای پوسته تقویت‌شده مدل M2 با شرط مرزی دو سر آزاد

شماره مود	آزمایش مودال	نتایج تحلیلی	خطا %	میرایی مودال %	
m	n (هرتز)	(هرتز)			
	۱	۰			
۱	۲	۲۳۹	-۷/۵	۰/۲۶	
	۳	۶۷۴	-۸	۰/۰۸	
	۴	۱۲۴۴	-۴	۰/۱۱	
		۱۳۳۲		۰/۱۵	
	۵	۱۹۲۶	۱۹۲۷	۰/۰۵	۱/۹۹
۲	۱	۶	۳۳	۵/۷	
	۲	۲۷۹	۲۶۶	-۵/۰	۰/۳۴
	۳	۷۳۰	۶۸۸	-۵/۷	۰/۱۰
	۴	۱۲۹۸	۱۲۶۶	-۲/۴	۰/۱۱
		۱۳۹۶			۰/۱۸
	۵	۲۰۹۶	۲۰۰۲	-۴/۷	۱/۱۸

در شکل ۵ چند مود خمشی به دست آمده از آزمایش مودال نشان داده شده است. شکل موده‌های طولی اول و دوم پوسته دوسر آزاد به صورت خط مستقیم و خط شیب‌دار با یک گره در وسط می‌باشد و مود سوم آن شبیه مود اول تیر دوسر آزاد دارای دو گره بوده و به همین ترتیب شکل موده‌های چهارم به بعد پوسته شبیه شکل

استفاده شده است. پارامترهای خروجی از این نرم‌افزار شامل فرکانس‌های طبیعی، میرایی و شکل موده‌های طبیعی می‌باشد. شکل ۴، تابع پاسخ فرکانسی مربوط به نقطه شماره ۱، نقطه راه اندازی^۲، را نشان می‌دهد.

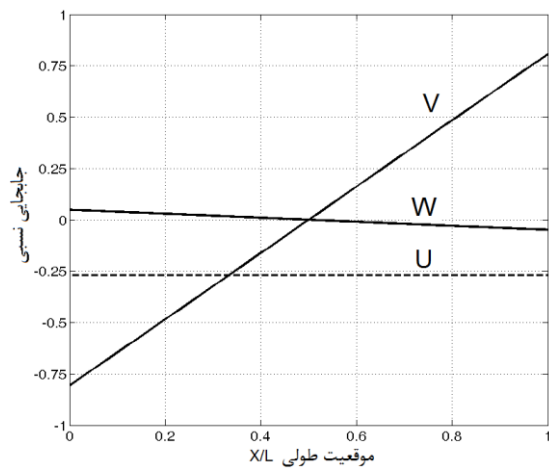


شکل ۳- تجهیزات مورد استفاده در آزمایش مودال و شبیه‌سازی شرط مرزی دوسر آزاد

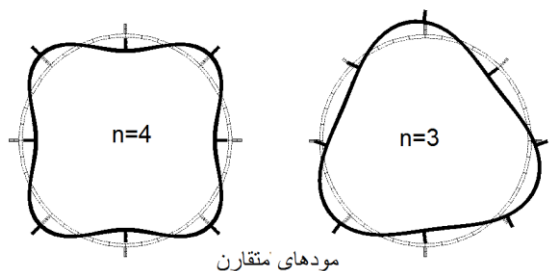
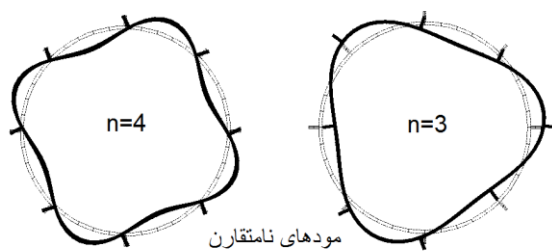
برای برازش منحنی‌ها از روش چندجمله‌ای استفاده شده است و با توجه به نزدیک بودن قله‌های فرکانسی به همدیگر، از روش چند مود با رزولوشن طیف فرکانسی یک هرتز استفاده شده است. همچنین مقایسه بین نتایج آزمایش مودال و نتایج تحلیلی و مقادیر میرایی حاصل از آزمایش را می‌توان در جدول ۴ مشاهده نمود. در برخی از مودها مقدار میرایی از حد معمول سازه‌های فلزی بزرگتر به دست آمده‌اند که علت آن کیفیت نامطلوب تابع پاسخ فرکانسی در این مودها می‌باشد (مود $n=1$ و مود $n=5$ که ضربات چکش قادر به تحریک کافی سازه نبود). به علاوه در جدول ۵، مقایسه ماتریس MAC^2 برای حل تحلیلی و کار تجربی برای تکیه‌گاه آزاد ارائه شده است که به صورت خلاصه و یک‌جا آمده است. بالای قطر اصلی مربوط به حل تحلیلی و زیر قطر اصلی مربوط به کار تجربی می‌باشد. علت اختلاف دو روش در برخی از سطرها این است در حل تحلیلی مودها در هر سه جهت حل می‌شوند ولی در کار تجربی به علت محدودیت سنسور فقط یک جهت ارتعاشات ثبت گردید و این مساله باعث اختلاف در نتایج MAC دو روش شده است.

همچنین تشخیص و عدم توانای تشخیص موده‌های نامتقارن در کار تجربی و حل تحلیلی نیز باعث بروز اختلاف در المان‌های این ماتریس شده است. با توجه به

یابد. در مود دیگر تمامی استرینگرها در نقاط غیرگره‌ای قرار می‌گیرند و انرژی جنبشی و جرم مودال افزایش می‌یابد. با توجه به این‌که در $m=1,2$ برای شرط مرزی دو سرآزاد، تقویت‌کننده‌ها نقشی در انرژی کرنشی ندارند، وجود تقویت‌کننده‌ها در این مود باعث کاهش فرکانس طبیعی نسبت به مود دیگر می‌شود. این حالت برای n های دیگر کوچکتر از ۸ وجود ندارد. به عبارت ساده‌تر، برای n های دیگر تعداد تقویت‌کننده‌های واقع در نقاط گره‌ای برای دو مود متقارن و نامتقارن یکسان می‌باشد و به همین خاطر مقدار عددی فرکانس دو مود یکسان می‌شود. در حل تحلیلی بخاطر انتخاب نوع توابع ریتز در جهت محیطی به صورت متقارن، فقط یکی از این دو مود مشاهده می‌شود.



شکل ۶- مود ارتعاشی پوسته با تکیه‌گاه آزاد $n=1$ و $m=2$



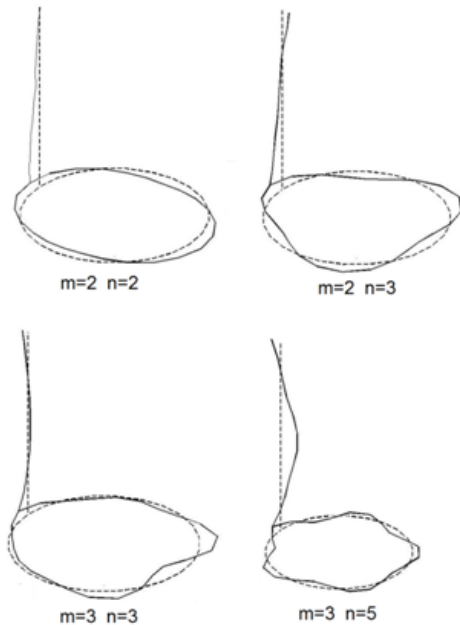
شکل ۷- مودهای متقارن و نامتقارن محیطی

مودهای دوم به بعد تیر دوسرآزاد می‌باشد. مود $n=1$ و $m=2$ تکیه‌گاه آزاد، مود جسم صلب می‌باشد (شکل ۶)، اما با این تفاوت که یک خط گره‌ای در وسط پوسته ایجاد می‌شود و پوسته همانند پوسته با یک تکیه‌گاه ساده از نوع S1 که در وسط قرار گرفته است ارتعاش می‌کند.

جدول ۵- ماتریس MAC برای حل تحلیلی و کار تجربی

(بالای قطر اصلی حل تحلیلی - زیر قطر اصلی کار تجربی)

۱	۰/۱۳	۰/۸۸	۰/۱۱	۰/۳۴	۰/۱۲	۰/۴۷	۰/۱۷	۰/۵۱	۰/۱۵
۰/۱۷	۱	۰/۱۷	۰/۶۹	۰/۰۱	۰/۴۷	۰/۰۴	۰/۲۳	۰/۰۵	۰/۰۱
۰/۴۹	۰/۰۶	۱	۰/۱۷	۰/۲۲	۰/۱۸	۰/۴۴	۰/۲۲	۰/۴۸	۰/۱۶
۰/۱۷	۱	۰/۰۴	۱	۰/۱۱	۰/۷۹	۰/۱۶	۰/۵۴	۰/۱۶	۰/۰۴
۰/۴۷	۰/۰۹	۱	۰/۰۷	۱	۰/۱۹	۰/۸۱	۰/۲۷	۰/۹۲	۰/۲۱
۰/۲۳	۰/۸۲	۰	۰/۸۹	۰/۰۱	۱	۰/۲۴	۰/۷۵	۰/۲۳	۰/۱۸
۰/۱۵	۰/۰۱	۰/۲۵	۰/۰۱	۰/۳۴	۰	۱	۰/۳۳	۰/۸۴	۰/۲۳
۰/۲۸	۰/۸۲	۰/۰۳	۰/۷۵	۰/۰۵	۰/۷۶	۰/۱۱	۱	۰/۳۱	۰/۶۴
۰/۴۰	۰/۲۳	۰/۷۳	۰/۲۰	۰/۸۱	۰/۰۸	۰/۲۰	۰/۱۵	۱	۰/۲۱
۰/۰۶	۰/۸۳	۰/۱۷	۰/۸۱	۰/۲۲	۰/۶۶	۰/۰۳	۰/۶۳	۰/۳۹	۱



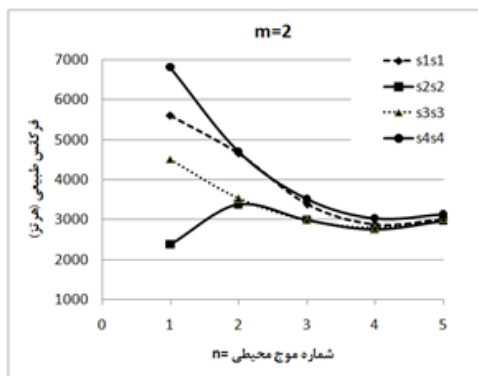
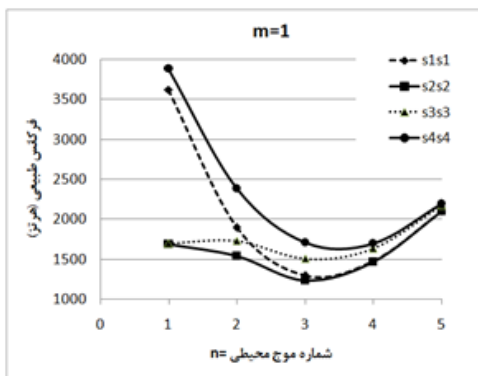
شکل ۵- مودهای خمشی به دست آمده از آزمایش مودال

نکته جالب توجه اینکه برای مود محیطی $n=4$ ، نتایج تجربی وجود دو مود را نشان می‌دهد (شکل ۷). یکی از این دو مود، مربوط به مود متقارن و دیگری مود نامتقارن می‌باشد. در یکی از مودها تمامی استرینگرها بر روی نقاط گره‌ای قرار می‌گیرند و در نتیجه جرم مودال کاهش می‌-

حل تحلیلی و ارضا شدن قیدهای هندسی می‌باشد. همچنین در تکیه‌گاه‌های نوع گیردار صفر بودن شیب جابجایی شعاعی ($\partial W / \partial x = 0$) در دو انتهای پوسته کاملاً مشهود می‌باشد.

جدول ۷- مقایسه نتایج فرکانس‌های طبیعی برای پوسته تقویت‌شده مدل M2 با ۴ نوع مختلف تکیه‌گاه گیردار

شماره مود		فرکانس‌های طبیعی به روش تحلیلی (هرتز)			
m	n	C1-C1	C2-C2	C3-C3	C4-C4
۱	۱	۳۶۷۲	۲۲۳۷	۲۳۱۱	۳۹۷۸
	۲	۲۰۳۱	۱۹۱۲	۲۲۶۰	۲۵۶۶
	۳	۱۴۹۸	۱۴۹۷	۱۸۷۴	۱۹۲۵
	۴	۱۶۵۲	۱۶۴۸	۱۸۷۱	۱۸۷۹
	۵	۲۲۲۳	۲۲۱۸	۲۳۲۲	۲۳۲۴
۲	۱	۵۶۰۹	۲۹۷۵	۴۹۴۴	۶۹۴۵
	۲	۴۸۸۹	۴۲۱۴	۴۲۲۸	۴۹۶۱
	۳	۳۷۱۴	۳۵۹۸	۳۶۷۲	۳۸۹۵
	۴	۳۲۶۸	۳۲۵۶	۳۴۰۰	۳۴۶۵
	۵	۳۳۸۵	۳۳۸۶	۳۵۱۹	۳۵۳۹



شکل ۸- تغییرات فرکانس‌های طبیعی پوسته تقویت‌شده مدل M2 با ۴ نوع مختلف تکیه‌گاه ساده

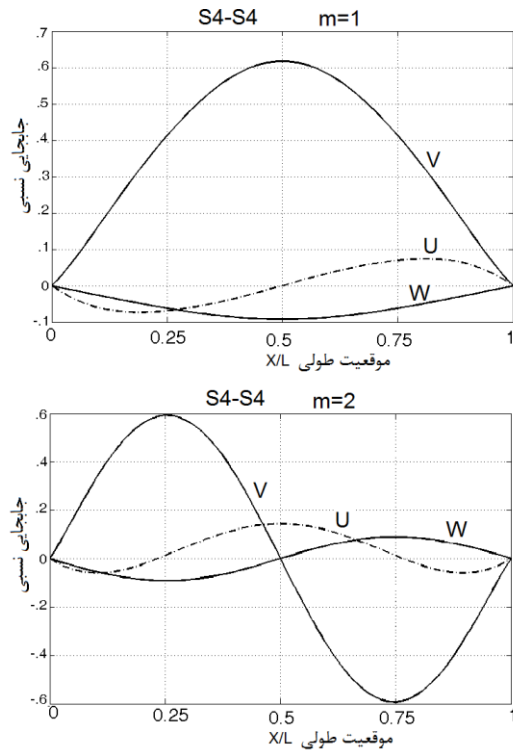
در ادامه روش تحلیلی برای شرایط مرزی مختلف توسعه داده شد و نتایج تغییرات فرکانس‌های طبیعی، فرکانس پایه و شکل مودها به ازای شرایط مرزی مختلف ارائه گردید.

جداول ۶ و ۷ مقایسه نتایج فرکانس‌های طبیعی به روش تحلیلی برای پوسته تقویت‌شده مدل M2 با ۴ نوع مختلف تکیه‌گاه ساده و ۴ نوع مختلف تکیه‌گاه گیردار را (مطابق معادلات ۹ و ۱۰) نشان می‌دهند. همچنین چگونگی تغییرات فرکانس‌های طبیعی بر حسب تعداد موج محیطی در مودهای خمشی $m=1, 2$ و برای شرایط مرزی پیش گفته در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده‌اند. با توجه به دقت نتایج روش تحلیلی به دست آمده در این تحقیق در مقایسه با کار تجربی و نتایج مراجع دیگر که در جداول ۳ و ۴ ارائه گردید و عدم وجود نتایج فرکانس-های طبیعی برای شرایط مرزی مختلف، نتایج ارائه شده در جداول ۶ و ۷ مرجع خوبی برای محققان برای شرایط مرزی مختلف می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد.

جدول ۶- مقایسه نتایج فرکانس‌های طبیعی برای پوسته تقویت‌شده مدل M2 با ۴ نوع مختلف تکیه‌گاه ساده

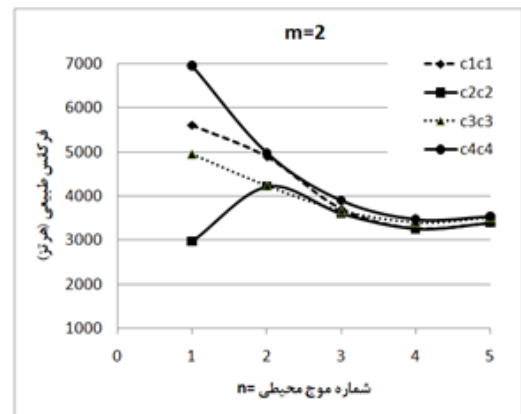
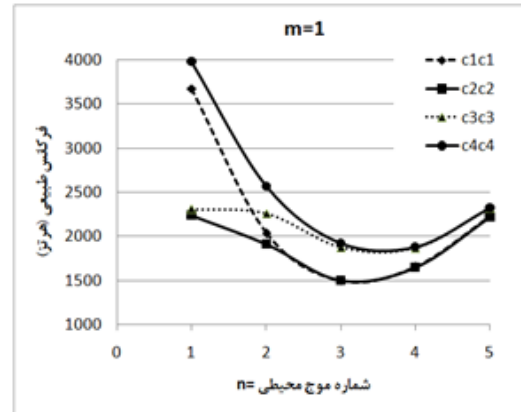
شماره مود		فرکانس‌های طبیعی به روش تحلیلی (هرتز)			
m	n	S1-S1	S2-S2	S3-S3	S4-S4
۱	۱	۳۶۱۹	۱۶۸۷	۱۷۰۱	۳۸۸۷
	۲	۱۸۹۴	۱۵۴۱	۱۷۳۰	۲۳۸۴
	۳	۱۲۹۴	۱۲۳۷	۱۵۰۷	۱۷۱۰
	۴	۱۴۷۵	۱۴۶۷	۱۶۳۶	۱۶۹۷
	۵	۲۰۹۹	۲۰۹۸	۲۱۷۷	۲۱۹۶
۲	۱	۵۶۰۹	۲۳۸۱	۴۵۰۸	۶۸۱۲
	۲	۴۶۵۴	۳۳۸۲	۳۵۲۵	۴۷۰۰
	۳	۳۳۷۹	۲۹۸۶	۲۹۸۷	۳۵۱۰
	۴	۲۸۷۷	۲۷۵۵	۲۸۰۴	۳۰۲۹
	۵	۳۰۰۹	۲۹۷۲	۳۰۳۴	۳۱۲۸

در شکل‌های ۱۰ الی ۱۳ شکل مودهای طبیعی پوسته در راستای طولی به ازای چند نوع مختلف تکیه‌گاه-های پیش گفته نشان داده شده‌اند. همان‌طور که در این شکل‌ها می‌توان مشاهده نمود در تمامی آن‌ها مقدار جابجایی W در دو انتهای پوسته برابر صفر می‌باشد اما مقادیر U و V متناسب با نوع تکیه‌گاه صفر و یا غیرصفر می‌باشند (مطابق معادلات ۹ و ۱۰) که نشان دهنده صحت

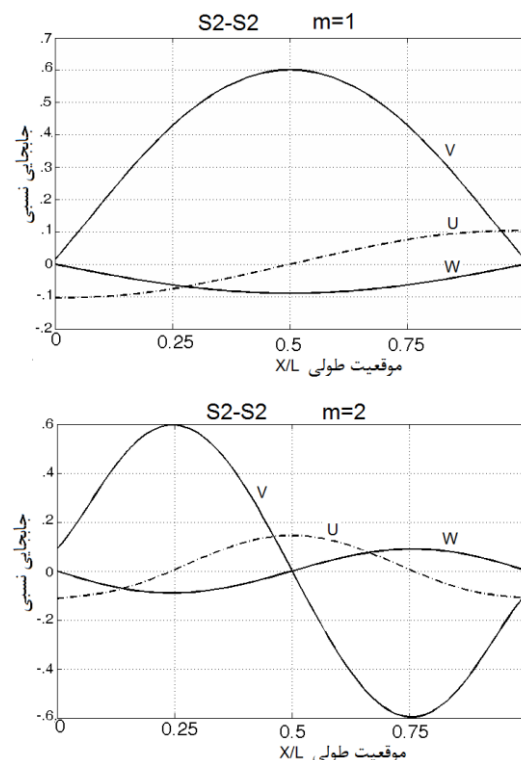


شکل ۱۱- مودهای ارتعاشی تکیه‌گاه ساده از نوع S4-S4

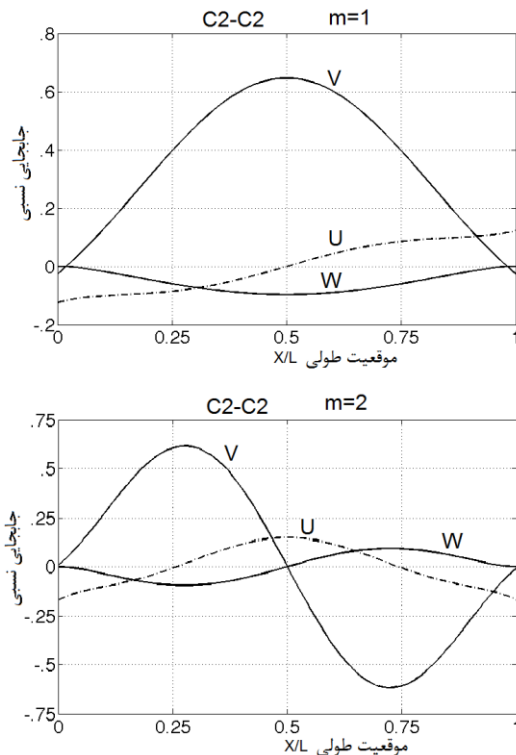
همانطور که در این شکل‌ها و جداول می‌توان مشاهده نمود کمترین فرکانس پایه مربوط به تکیه‌گاه‌های S2-S2 و C2-C2 می‌باشند و تکیه‌گاه‌های S4-S4 و همچنین C4-C4 بیشترین فرکانس پایه را دارا می‌باشند. همچنین در تکیه‌گاه‌های نوع S2 و C2 فرکانس پایه در $n=3$ رخ می‌دهد اما در تکیه‌گاه‌های نوع S4 و C4 فرکانس پایه در $n=4$ ایجاد می‌شود و به عبارتی فرکانس پایه تغییر مود می‌دهد. به علاوه تکیه‌گاه‌های نوع S2 و C2 همواره کمترین فرکانس‌های طبیعی را دارند و تکیه‌گاه‌های نوع S4 و C4 بیشترین فرکانس‌های طبیعی را به ازای موج-های محیطی و طولی مختلف نتیجه می‌دهند اما در n - های پایین این اختلاف‌ها بیشتر هستند و در n های بالا اختلاف بین نتایج تکیه‌گاه‌های مختلف کاهش می‌یابند. با توجه به معادلات (۹) و (۱۰) این نتایج قابل توجیه فیزیکی می‌باشند. تکیه‌گاه‌های نوع S2 و C2 دارای کمترین قید و در نتیجه دارای پایین‌ترین فرکانس‌های طبیعی و پایین‌ترین فرکانس پایه می‌باشند. از طرفی دیگر تکیه‌گاه‌های نوع S4 و C4 دارای بیشترین قید و در نتیجه دارای بیشترین فرکانس‌های طبیعی و بیشترین فرکانس پایه می‌باشند. باید به این نکته توجه شود که پایین‌ترین و بیشترین فرکانس پایه که گفته شد به صورت



شکل ۹- تغییرات فرکانس‌های طبیعی پوسته تقویت‌شده مدل M2 با ۴ نوع مختلف تکیه‌گاه گیردار



شکل ۱۰- مودهای ارتعاشی تکیه‌گاه ساده از نوع S2-S2



شکل ۱۲- مودهای ارتعاشی تکیه‌گاه گیردار از نوع C2-C2

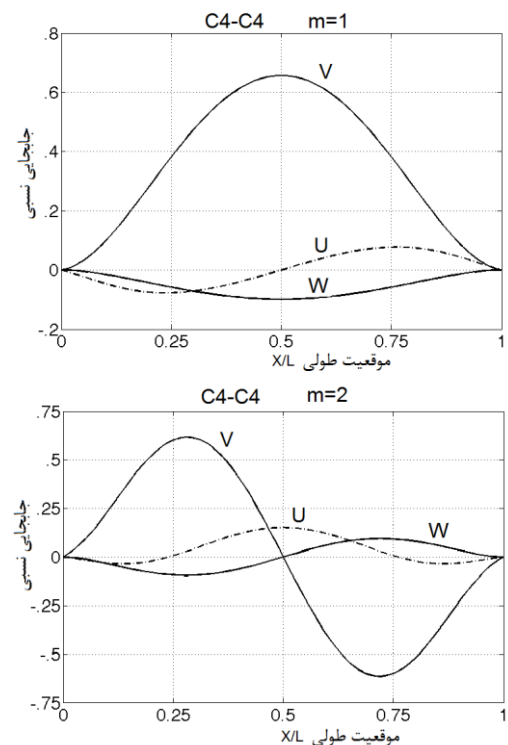
نتیجه‌گیری

در این تحقیق ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده طولی به روش تحلیلی و کار تجربی به ازای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفت. در روش تحلیلی از تئوری سندرز و برای حل معادلات از روش ریتز استفاده گردید و تقویت‌کننده‌ها به صورت المان‌های مجزا در نظر گرفته شدند. در کار تجربی بر روی پوسته تقویت‌شده آزمایش مودال با شرایط مرزی آزاد انجام گردید. در روش تحلیلی به ازای ۴ نوع مختلف تکیه‌گاه ساده و ۴ نوع مختلف تکیه‌گاه گیردار نتایج تغییرات فرکانس‌های طبیعی، فرکانس پایه و شکل مودهای طبیعی ارائه شد. در نتایج جداول و نمودارها مشاهده گردید که تکیه‌گاه‌های ساده نوع S4 و گیردار C4 دارای بیشترین مقادیر فرکانس‌های طبیعی و بالاترین مقدار فرکانس پایه و تکیه‌گاه‌های ساده نوع S2 و گیردار C2 دارای کمترین مقادیر فرکانس‌های طبیعی و پایین‌ترین مقدار فرکانس پایه هستند. علت این مساله به ترتیب، به خاطر وجود بیشترین قید هندسی و کمترین قید هندسی در این نوع تکیه‌گاه‌ها می‌باشد. البته این نتیجه را نمی‌توان برای تکیه‌گاه آزاد که دارای هیچ قیدی نمی‌باشد تعمیم داد زیرا شکل مود و

نسبی می‌باشد و در بین تکیه‌گاه‌های هم‌نوع خودش صدق می‌کند و برای تکیه‌گاه آزاد که دارای هیچ قیدی نمی‌باشد نمی‌توان به این صورت نتیجه را تعمیم داد. علت این مساله این است که شکل مودهای شرایط مرزی آزاد کاملاً با تکیه‌گاه ساده متفاوت است و مود $m=3$ تکیه‌گاه آزاد شباهت نسبی با مود $m=1$ تکیه‌گاه ساده از نوع S1 دارد، ضمن این‌که نقاط گره‌ای آن‌ها نیز با هم متفاوت است که در شکل‌های ۴ و ۸ این موضوع قابل مشاهده است. به علت تفاوت محل نقاط گره‌ای تکیه‌گاه آزاد با تکیه‌گاه ساده، فرکانس‌های طبیعی به ازای $m=3$ تکیه‌گاه آزاد بیشتر از $m=1$ تکیه‌گاه ساده می‌باشد (جدول ۸).

جدول ۸- مقایسه نتایج فرکانس‌های طبیعی برای پوسته تقویت‌شده مدل M2 با تکیه‌گاه آزاد و تکیه‌گاه ساده S1

تکیه‌گاه ساده		تکیه‌گاه آزاد	
N	m	فرکانس طبیعی	فرکانس طبیعی
۱		۳۶۱۹	۶۰۸۴
۲		۱۸۹۴	۳۷۸۵
۳	۱	۱۲۹۴	۲۵۲۷
۴		۱۴۷۵	۲۲۲۹
۵		۲۰۹۹	۲۵۸۵



شکل ۱۳- مودهای ارتعاشی تکیه‌گاه گیردار از نوع C4-C4

- [4] Mustafa, B. A. J. and Ali, R., "An Energy Method for Free Vibration Analysis of Stiffened Circular Cylindrical Shells", *Computer & Structures*, Vol. 32, No. 2, 1989, pp. 335-363.
- [5] Zhao, X. and Liew, K. M. and Ng, T. Y., "Vibration of Rotating Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells with Stringer and Ring Stiffeners", *Int. J. of Solids and Str.*, Vol. 39, 2002, pp. 529-545.
- [۶] جعفری، ع. باقری، م. "ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه تقویت شده طولی با خراج از مرکزی غیریکنواخت" مجله فنی و مهندس مدرس، شماره هفدهم، ۱۳۸۳، صفحات ۵۳-۶۴.
- [7] Sadeghifar, M., Bagheri, M. and Jafari, A.A., "Multiobjective optimization of orthogonally stiffened cylindrical shells for minimum weight and maximum axial buckling load", *Thin-Walled Structures*, Vol. 48, .12, .2010, pp. 979-988.
- [8] Xiang, X., Guoyong, Jin. And Zhigang, Liu, "Free vibration analysis of cylindrical shells using the Haar wavelet method", *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 77, 2013, pp. 47-56.
- [9] Hyun, W. L., Moon, K. K., "Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh-Ritz method and comparison of different shell theories", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 353, 29, 2015, pp. 344-377.
- [10] Naghsh, A., Saadatpour, M.M. and Azhari, M., "Free vibration analysis of stringer stiffened general shells of revolution using a meridional finite strip method", *Thin-Walled Structures*, Vol. 94, 2015, pp. 651-662.

محل نقاط گره‌ای آن متفاوت می‌باشد. همچنین رسم شکل مودها در راستای طولی و محیطی برای شرایط مرزی نشان‌دهنده صحت حل می‌باشد. با توجه به مقایسه نتایج این تحقیق با نتایج تحلیلی و تجربی مراجع دیگر و همچنین با مقایسه آن با کار تجربی انجام شده در این تحقیق و مطابقت خوب آن‌ها با همدیگر و همچنین با توجه به عدم وجود نتایج ارتعاشی برای شرایط مرزی مختلف، نتایج به‌دست‌آمده در این تحقیق مرجع خوبی برای محققان در این زمینه می‌تواند باشد.

پی‌نوشت‌ها:

- ۱ Frequency Response Function
- ۲ Driving Point
- ۳ Modal Assurance Criterion

مراجع

- [1] Sanders, J. L., "An Improved First-approximation Theory for Thin Shells" NASA TR R-24, Nat. Aeronautics and Space Admin., Washington, D.C. 1959.
- [2] Egle, D. M. and Sewall, J. L., "Analysis of Free Vibration of Orthogonally Stiffened Cylindrical Shells with Stiffeners Treated as Discrete Elements", *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 3, 1968, pp. 518-526.
- [3] Rinehart, S. A. and Wang, J. T. S., "Vibration of Simply Supported Cylindrical Shells with Longitudinal Stiffeners", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 24, No. 2, 1972, pp. 151-163.