

تحلیل فاصله خطای ناشی از نویز در ناوبری تناسبی با بازخورد شتاب برای سیستم مرتبه دوم با استفاده از روش الحاقی بی بعد

جلالی نائینی، سید حمید*

استادیار گروه مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، پل نصر، تهران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۱/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۸/۲۸)

چکیده

در این مقاله، تحلیل فاصله خطای استراتژی بهبودیافته ناوبری تناسبی با بازخورد شتاب جانبی، برای سیستم هدایت و کنترل مرتبه دوم در حضور اثر رادوم و نویز جستجوگر با استفاده از معادلات بی بعد شده روش الحاقی ارائه شده است. در این تحلیل، از مدل خطی شده استفاده شده و شیب خطای رادوم ثابت فرض شده است. با استفاده از نمودارهای بی بعد حاصل، روابط تقریبی فاصله خطا ناشی از نویز جستجوگر و اثر رادوم برای سیستم هدایت و کنترل مرتبه دوم با دو قطب حقیقی مجزا به دست می آید. نمودارهای بی بعد و روابط تقریبی حاصل برای تحلیل و طراحی اولیه سیستم هدایت، مفید خواهد بود. به علاوه، با استفاده از روابط تقریبی حاصل می توان بهره ها و ثابت زمانی سیستم هدایت را به طور متغیر طراحی نمود که سبب بهبود عملکرد و پایداری سیستم هدایت و کنترل در ارتفاع پایین و بالا می شود.

واژه های کلیدی: فاصله خطا، ناوبری تناسبی، نویز جستجوگر، اثر رادوم، روش الحاقی

مقدمه

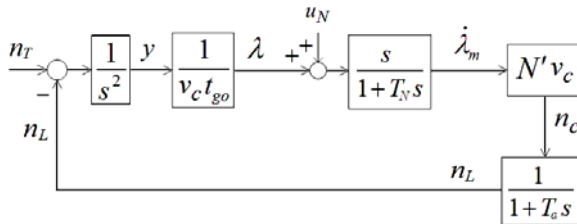
هدایت ناوبری تناسبی (یا به اختصار هدایت تناسبی) و استراتژی‌های بهبودیافته آن، کاربرد زیادی در هدایت پایانی موشک‌های رهگیر دارد [۳-۱]. در مراجع متعددی به تحلیل فاصله خطا در اصابت (یا به اختصار فاصله خطا) برای هدایت تناسبی ناشی از عوامل مختلف و با فرضیات ساده‌شونده پرداخته شده است [۸-۴]؛ اما تحلیل کاملی برای هریک از این استراتژی‌های هدایت تناسبی در دسترس نمی‌باشد. به علاوه، به خاطر محدودیت‌های حل تحلیلی، روابط حاصل از آن نیز بسیار ابتدایی است و با اعمال ضرایب تصحیح، حداکثر می‌تواند برای طراحی اولیه استفاده شود. لذا تحلیل دقیق مسئله با حل عددی انجام می‌شود. در این خصوص، روابط تقریبی فاصله خطا ناشی از نویز برای هدایت تناسبی در مرجع [۹] موجود است، البته در آن، اثر رادوم و بازخورد شتاب جانبی لحاظ نشده است. عوامل متعددی در فاصله خطای اصابت دخیل هستند که طراحی هدایت تناسبی با یک (یا دو پارامتر) برای ارضای فاصله خطای مطلوب را برای ارتفاعات بالا و پایین دشوار یا ناممکن می‌کند [۱۱، ۱۰]. با استفاده از تغییر این پارامترها، شرایط بهتر می‌شود؛ اما هنوز ارضای شرایط طراحی دشوار است. جبران اثر رادوم می‌تواند، عملکرد هدایت تناسبی را تا حد زیادی بهبود بخشد. همچنین استفاده از استراتژی‌های بهبودیافته هدایت تناسبی می‌تواند سبب بهبود عملکرد یا افزایش پوشش ارتفاع شود. در این خصوص می‌توان به قوانین هدایت تناسبی شبه کلاسیک و نئوکلاسیک [۱۲] اشاره نمود. همچنین با بازخورد شتاب جانبی (و نرخ آن) در هدایت تناسبی می‌توان دو پارامتر طراحی دیگر به معادلات مسئله افزود که سبب بهبود طراحی می‌شود. استراتژی اخیر برای هدایت تناسبی را می‌توان در دسته هدایت تناسبی نئوکلاسیک طبقه‌بندی نمود.

روش الحاقی یکی از ابزارهای قدرتمند در تحلیل فاصله خطا برای مدل خطی است [۱۳]. این روش برای تحلیل مسائل با ورودی‌های اتفاقی، ابزار بسیار مناسبی است. البته استفاده از روش الحاقی تنها برای مسائل بسیار ساده، منجر به حل تحلیلی می‌شود. معادلات کلی حل تحلیلی مسئله به روش الحاقی در مرجع [۱۴] آورده شده است. این روش برای سیستم هدایت و کنترل ایده‌آل و مرتبه اول، منجر به حل تحلیلی برای

فاصله خطای هدایت تناسبی می‌شود؛ اما حل تحلیلی این معادلات برای سیستم‌های با مرتبه بالاتر به طور معمول منجر به حل انتگرال‌های لاپلاس معکوس توابع تبدیل متعالی می‌شود که حل عمومی ندارد. برای سیستم‌های مرتبه دوم و بالاتر ممکن است از حل عددی برای حل انتگرال‌های لاپلاس معکوس توابع تبدیل متعالی استفاده شود. در مرجع [۱۲] نمودارهایی به طور نمونه با استفاده از حل عددی انتگرال‌های مذکور ارائه شده است. همان طور که انتظار می‌رود، نمودارهای حاصل از حل عددی تنها برای مقادیر مشخصی از پارامترها حاصل می‌شود. البته روش ساده‌تر، حل عددی معادلات حالت با استفاده از روش الحاقی است [۱۳]. به طور نمونه، در این روش می‌توان انحراف معیار فاصله خطا ناشی از هر یک از منابع خطا را بر حسب خطای رادوم (یا حاصلضرب شیب خطای رادوم در نسبت سرعت نزدیک شدن به سرعت موشک) مطابق مرجع [۱۵] ترسیم نمود. البته این نمودارها به ازای مقادیر مشخص ضریب ناوبری و ثابت زمانی نرخ چرخش حاصل می‌شود که تعداد زیادی نمودار می‌شود. البته در صورتی که تعداد پارامترها افزوده شود، به طور مثال، اگر استراتژی‌های هدایت تناسبی با تعداد پارامترهای بیشتر، استفاده شود، با افزایش تعداد نمودارها، طراحی و تحلیل مشکلتر می‌شود. در صورتی که بتوان معادلات را به گونه‌ای بی‌بعد و تجمیع کرد که در نهایت به ازای هر نویز جستجوگر (نویز تابش، نویز مستقل از فاصله و نویز وابسته به فاصله در سیستم فعال و نیمه‌فعال)، یک نمودار نتیجه بدهد، برای طراحی و تحلیل بسیار مفید خواهد بود. در مرجع [۱۶] معادلات به گونه‌ای نوشته شده است که تأثیر اثر رادوم و ثابت زمانی نرخ چرخش با ضرایب دیگر تجمیع شده و برای هر کدام از نویزها، یک رابطه با فرض سیستم کنترل مرتبه اول، حاصل شده است. البته خوشبختانه این تجمیع به گونه‌ای انجام شده است که سیستم منتج، مرتبه اول باقیمانده است؛ لذا از همان روابط تحلیلی موجود حاصل از روش الحاقی، برای فاصله خطا ناشی از نویزهای جستجوگر در مرجع [۱۳]، استفاده شده است. اما اگر سیستم هدایت و کنترل مرتبه دوم منظور شود، پیچیدگی مسئله چند برابر می‌شود؛ چرا که در صورت بی‌بعدسازی و تجمیع مناسب نیز دیگر حل تحلیلی مسئله از روش‌های معمول موجود نیست. در

تحلیل فاصله خطا برای سیستم مرتبه ۲

مطابق شکل ۱، دیاگرام بلوکی مسئله خطی شده هدایت تناسبی نمایش داده شده است که در آن s متغیر حوزه لاپلاس است. برای خطی‌سازی فرض می‌شود که زاویه خط‌دید (λ) کوچک باقی می‌ماند و نسبت به خط‌دید اولیه سنجیده می‌شود.



شکل ۱ - دیاگرام بلوکی مسئله خطی شده

در این شکل، N' ضریب ناوبری، v_c سرعت نزدیک شدن موشک به هدف (که ثابت فرض شده)، n_c دستور شتاب موشک و t_{go} زمان باقیمانده تا اصابت (یا کمترین فاصله) است. $(t_{go} = t_f - t)$ که زمان نهایی t_f معلوم فرض می‌شود. شتاب موشک (n_M) و شتاب هدف (n_T) در خطی‌سازی تنها در راستای y نوشته می‌شود. راستای y عمود بر خط‌دید اولیه منظور می‌شود و مقدار آن، همان فاصله هدف نسبت به موشک در راستای عمود بر خط‌دید اولیه است. همچنین، u_N نویز اندازه‌گیری زاویه خط‌دید است و به صورت زیر لحاظ می‌شود [۱۳]:

$$u_N = \frac{u_{GL}}{v_c t_{go}} + u_{FN} + \frac{v_c t_{go}}{R_A} u_{RN} + \left(\frac{v_c t_{go}}{R_A} \right)^2 u_{RNA} \quad (1)$$

که در آن u_{GL} ورودی مدل نویز تابش (بر حسب متر)، u_{FN} ورودی نویز مستقل از فاصله (فاصله موشک تا هدف) بر حسب رادیان، u_{RN} ورودی مدل نویز وابسته به فاصله برای سیستم نیمه‌فعال (بر حسب رادیان) و u_{RNA} ورودی نویز وابسته به فاصله برای سیستم فعال (بر حسب رادیان) است. این ورودی‌ها به صورت نویز سفید فرض شده و چگالی طیفی توان آنها با Φ و همان اندیس ورودی متناظر نمایش داده می‌شود (واحد Φ_{GL} مجذور متر بر هرتز و واحد چگالی نویز بقیه برابر

اینجا سؤالی که مطرح می‌شود این است که چه نیازی به حل مسئله با فرض سیستم مرتبه دوم نسبت به سیستم مرتبه اول است. اول این که سیستم هدایت و کنترل مرتبه دوم از سیستم مرتبه اول به مسئله واقعی نزدیکتر است. همچنین در این حالت، جستجوگر و فیلتر نویز با تابع تبدیل مرتبه اول و سیستم کنترل نیز با تابع تبدیل مرتبه اول مدل می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، در این نوع مدل‌سازی، تخمین نرخ چرخش خط‌دید که خروجی فیلترشده جستجوگر است و همچنین دستور شتاب، ظاهر می‌شود؛ اما در مدل‌سازی سیستم کلی با تابع تبدیل مرتبه اول، هیچکدام (به‌درستی) ظاهر نمی‌شود. در صورت عدم موجود بودن تخمین نرخ چرخش خط‌دید و دستور شتاب، مقایسه با قوانین هدایت بهبودیافته نیز میسر نمی‌شود. لازم به یادآوری است که در تحلیل مسئله با اعمال نویز جستجوگر، اگر سیستم هدایت به صورت حاصلضرب یک مشتق‌گیر خالص در یک بهره مدل شود، خروجی آن (تخمین نرخ چرخش خط‌دید یا دستور شتاب) نوسانات بسیار بزرگ پیدا می‌کند؛ چرا که از نویز سفید مشتق گرفته می‌شود. به عبارت خلاصه، سیستم مرتبه دوم ابتدایی‌ترین مدل مفروض برای مدل‌سازی نسبتاً صحیح مسئله در حضور نویز جستجوگر است؛ اما سبب چندبرابر شدن پیچیدگی تحلیل مسئله خواهد شد؛ چرا که حل تحلیلی (از روش‌های متداول) ندارد.

در تحقیق حاضر، استراتژی هدایت تناسبی با بازخورد شتاب جانبی (و نرخ آن) برای سیستم مرتبه دوم و در حضور اثر رادوم مد نظر است. در این تحلیل، مدل خطی شده با فرض ثابت بودن شیب خطای رادوم و سرعت نزدیک شدن موشک به هدف استفاده شده است. دینامیک جستجوگر به همراه فیلتر نویز به صورت مرتبه اول و دینامیک سیستم کنترل نیز مرتبه اول فرض می‌شود. برای تحلیل فاصله خطا، پارامترهای مسئله جمع شده و سپس مدل الحاقی استخراج می‌شود. در ادامه، با بی‌بعدسازی معادلات الحاقی و حل عددی آن، نمودار فاصله خطای بی‌بعد ناشی از هر کدام از نویزهای جستجوگر به دست می‌آید. در مرحله نهایی، با برازش نمودار فاصله خطای ناشی از هر نویز که تابع دو متغیر بی‌بعد جمع شده می‌شود، روابطی استخراج شده است. لازم به ذکر است که در حالت خاص با صفر منظور کردن ضریب بازخورد شتاب، نتایج برای هدایت تناسبی حاصل می‌شود.

$$K_{RN}(N', \alpha, \tau_f) = \frac{R_A \sigma_{RN}}{\Phi_{RN}^{0.5} T^{1.5} v_c^2} = \sqrt{\hat{x}_{RN}(\tau_f)} \quad (24)$$

$$K_{RNA}(N', \alpha, \tau_f) = \frac{R_A^2 \sigma_{RNA}}{\Phi_{RNA}^{0.5} v_c^3 T^{2.5}} = \sqrt{\hat{x}_{RNA}(\tau_f)} \quad (25)$$

که به ضرایب K ضرایب بی‌بعد می‌گویند. نتایج حل عددی در شکل ۳ به‌ازای $N' = 3$ و $\alpha = 0.5$ ترسیم شده است. توجه این که بازه اصلی α ، بین صفر و یک است؛ اما نتایج به‌ازای α و $1 - \alpha$ یکسان می‌شود. بنابراین، کافی است که تحلیل به‌ازای بازه $0 < \alpha \leq 0.5$ انجام شود. همان‌طور که از شکل ۳ ملاحظه می‌شود، مقدار ضرایب بی‌بعد پس از مدت زمانی به مقدار پایا (حالت ماندگار) می‌رسد. البته مقدار ضرایب بی‌بعد برای نویز وابسته به فاصله، نسبت به دو نویز تابش و نویز مستقل از فاصله، دیرتر به حالت پایا رسیده است. در ادامه، تحلیل فاصله خطای پایا مد نظر است. شکل ۴ رفتار ضرایب بی‌بعد را بر حسب ضریب ناوبری N' به‌ازای سه مقدار مختلف $\alpha = 0.001, 0.2, 0.5$ نشان می‌دهد. همان‌طور که از این شکل ملاحظه می‌شود، تغییر α بر حسب کاربرد می‌تواند مهم باشد. به‌جز نویز تابش، با افزایش N' اختلاف نتایج به‌ازای مقادیر مختلف α زیاد می‌شود. این رفتار برای نویز تابش برای مقادیر N' بزرگتر از ۶ مشاهده می‌شود. نتایج به‌ازای $\alpha = 0.001$ با دقت بسیار خوبی مشابه نتایج برای سیستم مرتبه اول ($\alpha = 0$) است. بنابراین در شکل ۴، نتایج سیستم مرتبه دوم با مرتبه اول نیز قابل مقایسه است. نویزهای وابسته به فاصله برای کاربردهای ضدبالستیک که سرعت نزدیک شدن موشک به هدف زیاد است، اهمیت زیادی پیدا می‌کند. بنابراین مقدار α برای محاسبه نویز تأثیر قابل توجهی دارد؛ اما برای موشک‌های راداری رهگیر متداول، نویز غالب به‌طور معمول نویز تابش و نویز مستقل از فاصله است (بسته به مقدار ثابت زمانی معادل). البته لازم به ذکر است که تقریب نسبتاً قابل قبول برای طراحی اولیه، به‌طور معمول، سیستم هدایت و کنترل مرتبه پنج است. البته روابط تحلیلی برای مرتبه اول و دوم با اتخاذ ضرایب تصحیح ممکن است برای طراحی قانون هدایت با ضرایب متغیر استفاده شود.

$$\hat{x}'_5 = -\hat{x}_2 - \hat{x}_5 / (1 - \alpha) \quad (15)$$

$$\hat{x}'_{FN} = \hat{y}_1^2 \quad (16)$$

$$\hat{x}'_{RN} = \hat{y}_1^2 \tau^2 \quad (17)$$

$$\hat{x}'_{RNA} = \hat{y}_1^2 \tau^4 \quad (18)$$

$$\hat{x}'_{GL} = \hat{y}_1^2 / \tau^2 \quad (19)$$

که در آن، $(\)'$ مشتق نسبت به $\tau = t / T$ است و متغیرهای بی‌بعد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{x}_2 = \frac{x_2}{T}, \hat{x}_3 = x_3, \hat{x}_4 = \frac{x_4}{T v_c}, \hat{x}_5 = \frac{x_5}{T^2}, \hat{x}_{GL} = T x_{GL}$$

$$\hat{x}_{FN} = \frac{x_{FN}}{T v_c^2}, \hat{x}_{RN} = \frac{R_A^2}{T^3 v_c^4} x_{RN}, \hat{x}_{RNA} = \frac{R_A^4}{T^5 v_c^6} x_{RNA} \quad (20)$$

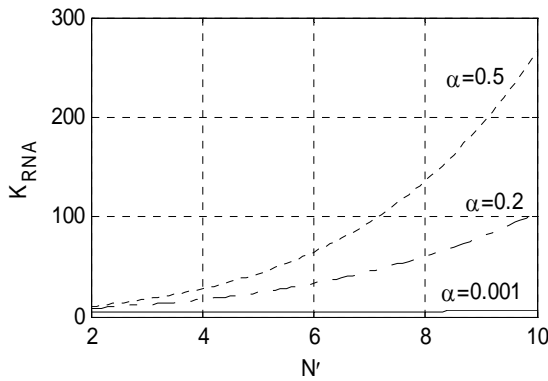
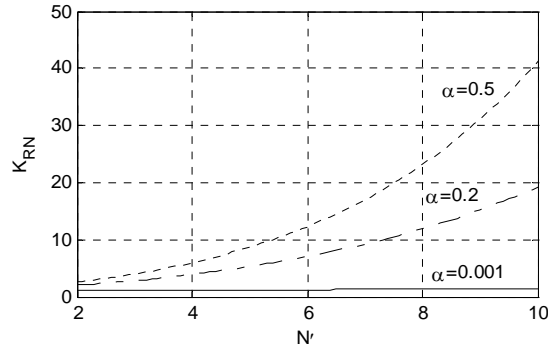
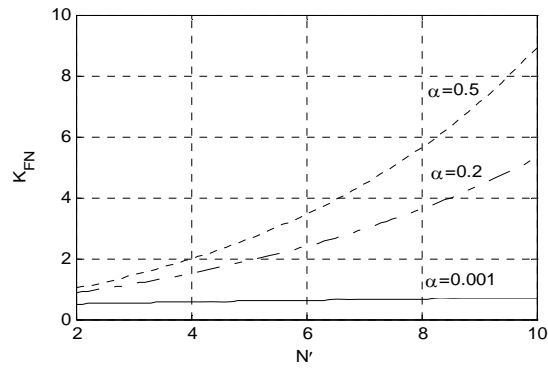
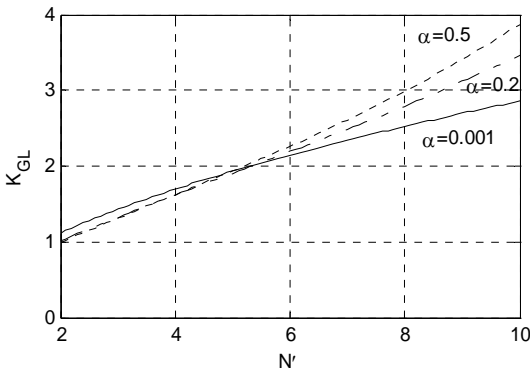
همچنین

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{\alpha} \hat{x}_4 + \frac{N'}{\alpha(1 - \alpha)} \hat{x}_5 \quad (21)$$

همان‌طور که از معادلات الحاقی بی‌بعد ملاحظه می‌شود، فاصله خطای بی‌بعد ناشی از نویزها، تابعی از متغیرهای N', α و τ_f می‌شود ($\tau_f = t_f / T$). ریشه میانگین مجذور فاصله خطای اصابت ناشی از نویزهای مذکور با حل عددی معادلات (۱۹-۱۲) به‌ازای شرایط اولیه صفر، به‌جز $\hat{x}_3(0) = 1$ ، از روابط (۲۲-۲۵) محاسبه می‌شود.

$$K_{GL}(N', \alpha, \tau_f) = \frac{\sigma_{GL}}{\sqrt{\Phi_{GL} / T}} = \sqrt{\hat{x}_{GL}(\tau_f)} \quad (22)$$

$$K_{FN}(N', \alpha, \tau_f) = \frac{\sigma_{FN}}{v_c \sqrt{T \Phi_{FN}}} = \sqrt{\hat{x}_{FN}(\tau_f)} \quad (23)$$

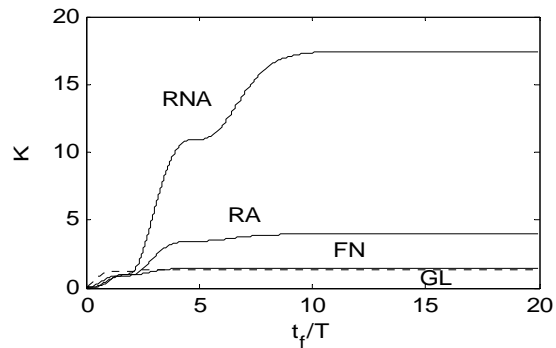


شکل ۴ - ضرایب بی‌بعد پایا بر حسب N'

در صورتی که با برازش منحنی به نمودارهای مربوطه بتوان روابط ساده‌ای به‌دست آورد، برای تحلیل فاصله خطا، محاسبه ثابت زمانی بهینه و همچنین طراحی هدایت با ضرایب متغیر، مفید خواهد بود. با توجه به تقارن نتایج حول $\alpha = 0.5$ ، به‌نظر می‌آید که اگر نمودارها نسبت به $\alpha(1-\alpha)$ ترسیم شود، استخراج روابط آسانتر باشد. همان‌طور که از شکل ۵ ملاحظه می‌شود، استفاده از متغیر $\alpha(1-\alpha)$ می‌تواند مفید باشد. با استفاده از این متغیر و به‌ازای مقادیر مفروض، نمودار ضریب بی‌بعد تابش در شکل ۵، نسبت به $\alpha(1-\alpha)$ ثابت (یا با شیب بسیار ملایمی) می‌باشد. رفتار ضرایب بی‌بعد نویز مستقل از فاصله نسبت به متغیر $\alpha(1-\alpha)$ نیز خطی مشاهده می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، بر حسب کاربرد، می‌توان روابط ضرایب بی‌بعد پایا بر حسب N' یا $\alpha(1-\alpha)$ را به‌صورت خطی یا غیرخطی تقریب زد. البته در اینجا برای افزایش دقت (نسبت به تقریب خطی) روابط تقریبی ضرایب بی‌بعد پایا به‌ازای بازه $3 \leq N' \leq 6$ به‌صورت

$$K_j = K_j(\alpha = 0) + b_j(N')[\alpha(1-\alpha)]^{n_j(N')} \quad (26)$$

استخراج شده است که در آن $z = GL, FN, RA, RNA$ و $K_j(\alpha = 0)$ مقدار ضریب بی‌بعد به‌ازای $\alpha = 0$ (ضرایب بی‌بعد برای سیستم مرتبه اول) که در پیوست الف آمده‌است. اما ضرایب b و n به‌صورت روابط (۲۷-۳۴) به‌دست می‌آید:



شکل ۳ - ضرایب بی‌بعد بر حسب زمان نهایی بی‌بعد به‌ازای $N' = 3$ و $\alpha = 0.5$

$$b_{GL} = -0.54 + 0.25(N' - 3) \quad (27)$$

$$b_{FN} = 3.3 + 1.8(N' - 3)^{1.35} \quad (28)$$

$$b_{RN} = 13 + 18.3(N' - 3) \quad (29)$$

$$b_{RNA} = 65 + 80(N' - 3)^{1.5} \quad (30)$$

$$n_{FN} = 0.9 + (N' - 3) / 30 \quad (31)$$

$$n_{GL} = 1 \quad (32)$$

$$n_{RN} = 1.1 + 0.2(N' - 3)^{0.29} \quad (33)$$

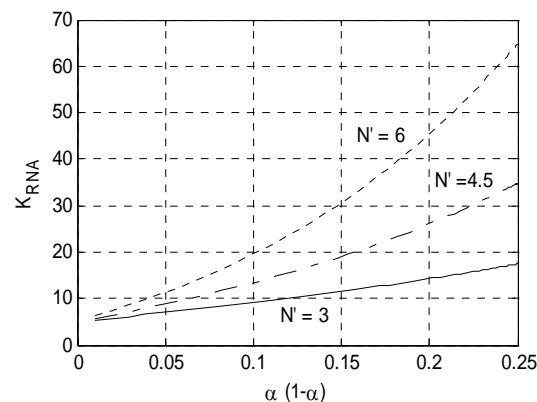
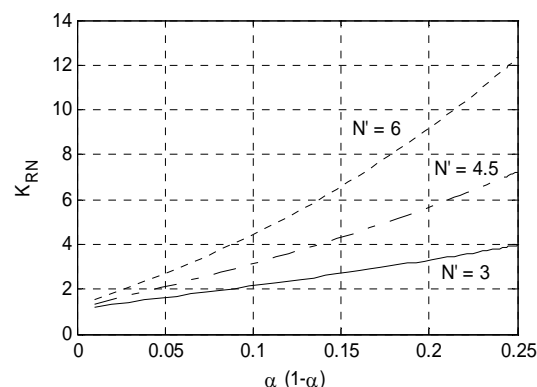
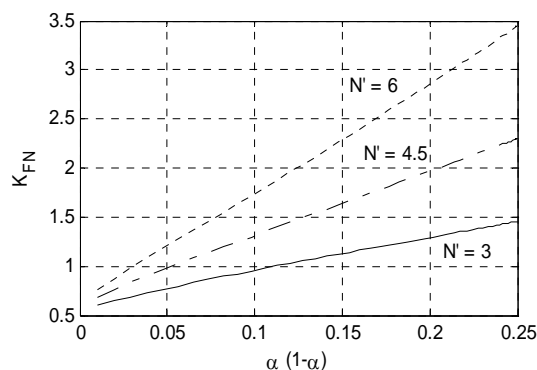
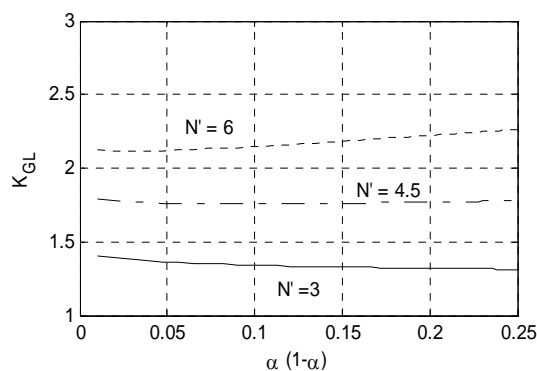
$$n_{RNA} = 1.2 + 0.15(N' - 3)^{0.84} \quad (34)$$

در صورتی که خطای نویز غالب در مسئله، خطای ناشی از نویز تابش و نویز مستقل از فاصله باشد، تقریب‌های خطی دارای دقت خوبی بوده و بار محاسباتی را کاهش داده و همچنین امکان حل تحلیلی برای مسئله بهینه‌سازی را میسر می‌سازد.

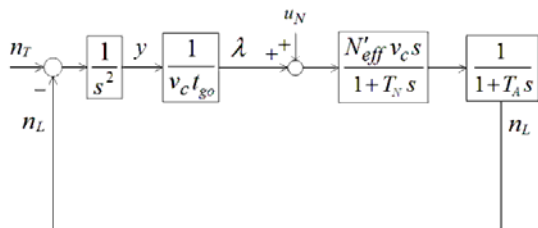
در ادامه، به عنوان یک مثال عددی فرض کنید در سیستم نخست، تابع تبدیل سیستم کنترل به صورت $1 / (1 + Ts / 2)^2$ با ثابت زمانی معادل 0.4 ثانیه باشد ($\alpha = 0.5$) و سیستم دوم شامل دو تابع تبدیل مرتبه اول با ثابت زمانی فیلتر نویز 0.05 و ثابت زمانی سیستم کنترل 0.35 ثانیه باشد ($\alpha = 1 / 8$). در مقایسه ضرایب بی‌بعد پایا برای دو سیستم مذکور به ازای ضریب ناوبری ۳ می‌توان گفت که ضریب بی‌بعد نویز تابش تفاوت زیادی نمی‌کند؛ اما ضریب بی‌بعد نویز مستقل از فاصله در سیستم اول نسبت به سیستم دوم، برابر $1/5$ می‌شود. همچنین ضرایب بی‌بعد وابسته به فاصله در سیستم اول نسبت به سیستم دوم حدود $1/7$ برابر می‌شود.

تحلیل فاصله خطا با بازخورد شتاب

ابتدا دیگرام بلوکی مسئله خطی شده هدایت تناسبی با بازخورد شتاب جانبی مطابق رابطه (۳۵) در شکل ۶ نمایش داده شده است.



شکل ۵ - ضرایب بی‌بعد پایا بر حسب $\alpha(1 - \alpha)$



شکل ۷ - دیاگرام بلوکی ساده شده در شکل ۶

تحلیل فاصله خطا با اثر رادوم

در شکل ۸ نمودار بلوکی خطی شده قانون هدایت تناسبی با بازخورد شتاب جانبی با اعمال اثر رادوم نمایش داده شده است که در آن، R شیب خطای رادوم، v_M سرعت موشک، T_α ثابت زمانی نرخ چرخش و θ زاویه محور طولی موشک با امتداد مرجع است. دستور شتاب قانون هدایت نیز به صورت رابطه (۳۵) لحاظ می‌شود. در ادامه، دیاگرام بلوکی شکل ۸ به صورت دیاگرام بلوکی شکل ۹ ساده می‌شود که در آن ضریب ناوبری مؤثر و ثابت زمانی مؤثر به ترتیب برابر است با:

$$N'_{eff} = \frac{N'(1+R)}{1+N'_L+K_R} \quad (39)$$

$$T_{eff} = \frac{T_a + T_N + N'_L(\tau_d + T_N) + K_R T_\alpha}{1+N'_L+K_R} \quad (40)$$

$$c_2 = \frac{T_N(T_a + N'_L \tau_d)}{1+N'_L+K_R} \quad (41)$$

که در آن

$$K_R = \frac{N'v_c R}{v_M} \quad (42)$$

همچنین با توجه به شکل ۹، تابع تبدیل از نرخ چرخش خط دید به شتاب جانبی بر حسب ضریب ناوبری مؤثر، ثابت زمانی مؤثر، سرعت نزدیک شدن موشک به هدف و ضریب c_2 نوشته می‌شود:

$$\frac{n_L}{\lambda}(s) = \frac{N'_{eff} v_c}{1 + T_{eff} s + c_2 s^2} \quad (43)$$

$$n_c = N'v_c \dot{\lambda}_m - N'_L(1 + \tau_d s)n_L \quad (35)$$

که در آن N'_L ضریب شتاب جانبی، τ_d ثابت زمانی مشتق‌گیر و n_L شتاب جانبی موشک است (در خطی‌سازی فرض می‌شود $n_L = n_M$). اگر بازخورد شتاب جانبی با بلوک سیستم کنترل تلفیق شود (شکل ۷)، ثابت زمانی بلوک حاصل و حاصلضرب بهره‌ها با ضریب ناوبری، به صورت زیر نوشته می‌شود:

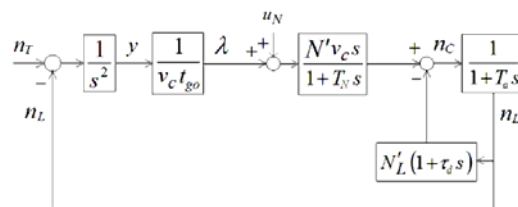
$$N'_{eff} = \frac{N'}{1+N'_L} \quad (36)$$

$$T_A = \frac{T_a + N'_L \tau_d}{1+N'_L} \quad (37)$$

بنابراین با جایگزین کردن N'_{eff} به جای N' و T_A به جای T_a می‌توان از روابط، نمودارها و نتایج بخش قبل برای فاصله خطا استفاده کرد. توجه این که در این حالت مانند قبل $T_N = \alpha T$ ؛ اما $T_A = (1 - \alpha)T$. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با بازخورد شتاب می‌توان ثابت زمانی سیستم را از لحاظ تئوری به مقدار دلخواه تغییر داد؛ اما بهره سیستم نیز تغییر می‌کند. در مدل مفروض، در صورتی که ضریب ناوبری، متغیر و برابر $N'(1 + N'_L)$ انتخاب شود، ضریب ناوبری مؤثر برابر N' می‌شود.

در ادامه با توجه به شکل ۷، تابع تبدیل از نرخ چرخش خط‌دید به شتاب جانبی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{n_L}{\lambda}(s) = \frac{N'_{eff} v_c}{(1 + T_N s)(1 + T_A s)} \quad (38)$$



شکل ۶ - دیاگرام بلوکی مسئله خطی شده هدایت تناسبی با بازخورد شتاب جانبی

در ادامه، مسئله به‌ازای ریشه‌های مختلط برای رابطه (۴۴) بررسی می‌شود. برای این حالت، دوباره باید مدل الحاقی را ساخت و حل عددی نمود. در ابتدا باید مدل الحاقی بی‌بعد استخراج شود. برای این منظور، استخراج مدل الحاقی بی‌بعد برای شکل ۹ آسانتر از مدل اولیه است؛ چرا که در شکل ۹ ضرایب N'_{eff} ، T_{eff} و c_2 به‌دست آمده است. قبل از استخراج مدل الحاقی، دیاگرام بلوکی شکل ۹ به‌صورت شکل ۱۰ ساده می‌شود و مرتبه سیستم کاهش می‌یابد. همچنین برای استخراج مدل الحاقی شکل ۱۰، تابع تبدیل مرتبه دوم باید بر حسب دو بلوک انتگرال‌گیر مطابق شکل ۱۱ شکسته شود. سپس با استفاده از قواعد استخراج مدل الحاقی، مدل شکل ۱۲ حاصل می‌شود. ادامه این شکل، پس از فلش به سمت بالا که با y_1 علامت‌گذاری شده است، با اعمال ضریب $1 / (1 + R)$ ، مشابه دیاگرام بلوکی شکل ۲ می‌شود. در ادامه، معادلات رسته یک برای دیاگرام بلوکی شکل ۱۲ (و بخش مشابه آن در شکل ۲) نوشته می‌شود:

$$\dot{x}_1 = x_2 - \frac{T_{eff}}{c_2} x_1 \quad (۴۷)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{c_2} x_1 - x_3 \quad (۴۸)$$

$$\dot{x}_3 = y_1 / v_c t \quad (۴۹)$$

$$\dot{x}_{FN} = y_1^2 \quad (۵۰)$$

$$\dot{x}_{RN} = (y_1 v_c t / R_A)^2 \quad (۵۱)$$

$$\dot{x}_{RNA} = y_1^2 (v_c t / R_A)^4 \quad (۵۲)$$

$$\dot{x}_{GL} = (y_1 / v_c t)^2 \quad (۵۳)$$

که در آن،

$$y_1 = \frac{N'_{eff} v_c x_1}{c_2} \quad (۵۴)$$

بنابراین، انحراف معیار σ یا ریشه میانگین مربعات فاصله خطای اصابت ناشی از هر یک از نویزهای جستجوگر از رابطه (۵۵) محاسبه می‌شود:

اگر مخرج کسر رابطه (۴۳) دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد، می‌توان از روابط قبل استفاده نمود. برای این منظور، ابتدا ضرایب T_1 و T_2 به‌دست می‌آید:

$$(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) = 1 + T_{eff} s + c_2 s^2 \quad (۴۴)$$

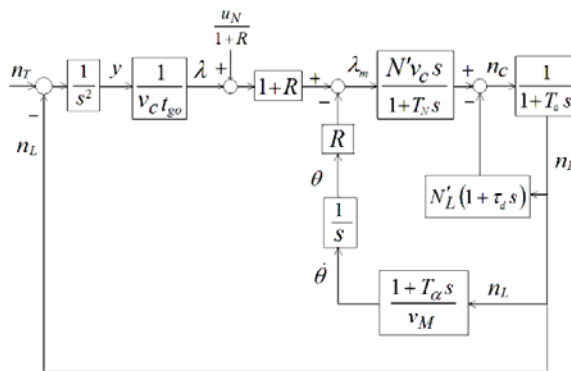
بنابراین:

$$T_{1,2} = \frac{T_{eff}}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4c_2}{T_{eff}^2}} \right] \quad (۴۵)$$

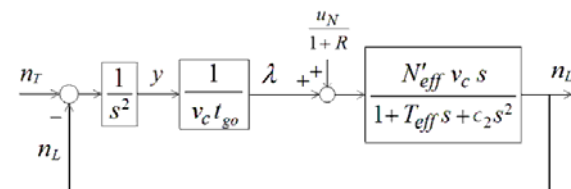
برای این که رابطه فوق، دو جواب حقیقی مثبت داشته باشد، باید $c_2 > 0$ و $T_{eff} \geq 2\sqrt{c_2}$ برای این حالت می‌توان نوشت:

$$\alpha(1 - \alpha) = \left(\frac{T_1}{T_{eff}} \right) \left(\frac{T_2}{T_{eff}} \right) = \frac{c_2}{T_{eff}^2} \leq \frac{1}{4} \quad (۴۶)$$

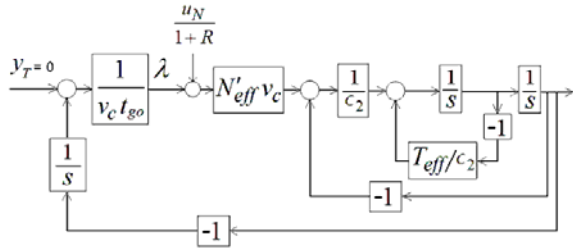
بنابراین، شروط مثبت حقیقی بودن جوابهای رابطه (۴۵) همان رابطه $0 < \alpha < 1$ است. البته مطابق شکل ۹، ورودی نویز و متعاقباً فاصله خطا باید با ضریب $1 / (1 + R)$ اصلاح شود.



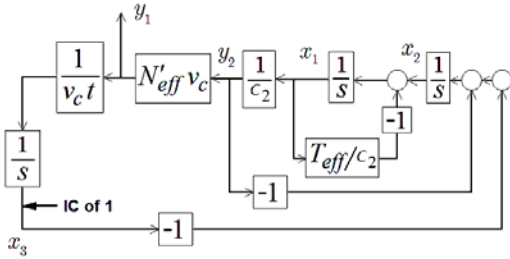
شکل ۸- دیاگرام بلوکی هدایت با اثر رادوم



شکل ۹- دیاگرام بلوکی ساده شده در شکل ۸



شکل ۱۱- دیاگرام بلوکی شکل ۱۰ با تجزیه به المانهای انتگرال گیر



شکل ۱۲- مدل الحاقی سیستم هدایت و کنترل با اثر رادوم

$$\hat{x}'_{GL} = \hat{y}_1^2 / \tau^2 \quad (۶۳)$$

که در آن،

$$\hat{y}_1 = N'_{eff} \hat{x}_1 \quad (۶۴)$$

در نتیجه، ریشه میانگین مجذور فاصله خطای پایا ناشی از نویزهای مذکور با حل عددی معادلات (۶۳-۵۷) به ازای شرایط اولیه صفر (به جز $\hat{x}_3 = 1$) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$K_{GL}(N'_{eff}, \gamma) = \frac{(1+R)\sigma_{GL}}{\sqrt{\Phi_{GL} / T_{eff}}} = \sqrt{\hat{x}_{GL}(\infty)} \quad (۶۵)$$

$$K_{FN}(N'_{eff}, \gamma) = \frac{(1+R)\sigma_{FN}}{v_c \sqrt{T_{eff} \Phi_{FN}}} = \sqrt{\hat{x}_{FN}(\infty)} \quad (۶۶)$$

$$K_{RN}(N'_{eff}, \gamma) = \frac{(1+R)R_A \sigma_{RN}}{\Phi_{RN}^{0.5} T_{eff}^{1.5} v_c^2} = \sqrt{\hat{x}_{RN}(\infty)} \quad (۶۷)$$

$$\sigma_j = \frac{\sqrt{\Phi_j x_j(t_f)}}{1+R} \quad j = GL, FN, RA, RNA \quad (۵۵)$$

توجه این که میانگین فاصله خطا، صفر است. در این حالت، انحراف معیار برابر ریشه میانگین مربعات می شود. با تغییر متغیر زمان به $\tau = t / T_{eff}$ و متغیرهای بی بعد به صورت:

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1}{c_2}, \hat{x}_2 = \frac{x_2}{T_{eff}}, \hat{x}_3 = x_3, \hat{y}_1 = \frac{y_1}{v_c} \quad (۵۶)$$

و همچنین تعریف مشابه برای متغیرهای حالت \hat{x}_{RN} ، \hat{x}_{FN} و \hat{x}_{GL} و \hat{x}_{RNA} معادلات الحاقی بی بعد به صورت زیر حاصل می شود:

$$\hat{x}'_1 = \frac{T_{eff}^2}{c_2} (\hat{x}_2 - \hat{x}_1) \quad (۵۷)$$

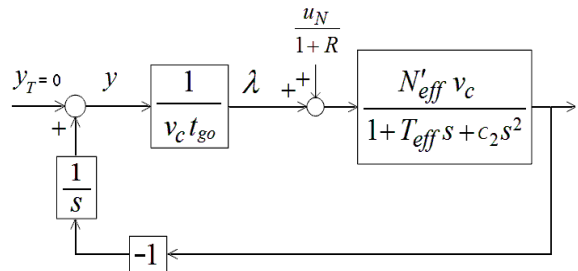
$$\hat{x}'_2 = -\hat{x}_1 - \hat{x}_3 \quad (۵۸)$$

$$\hat{x}'_3 = \hat{y}_1 / \tau \quad (۵۹)$$

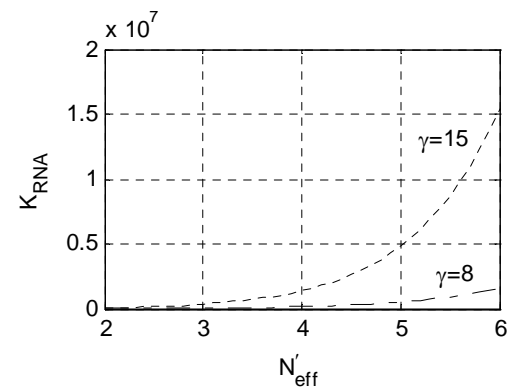
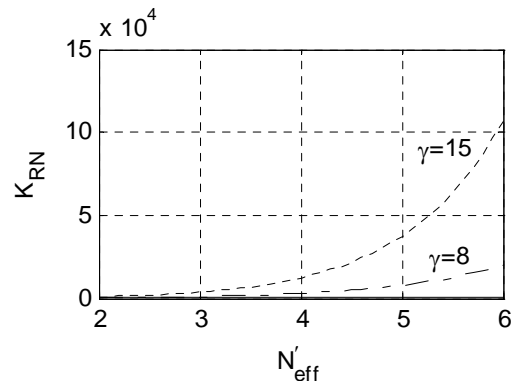
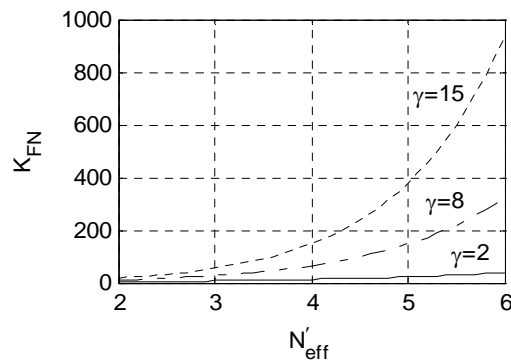
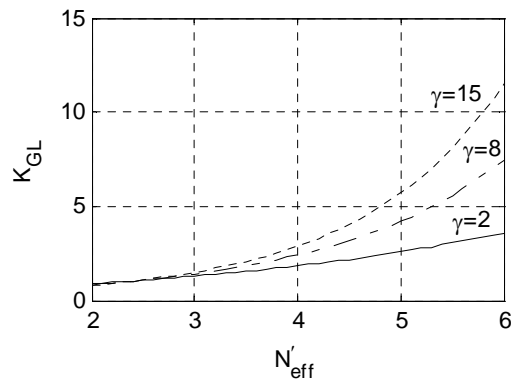
$$\hat{x}'_{FN} = \hat{y}_1^2 \quad (۶۰)$$

$$\hat{x}'_{RN} = \hat{y}_1^2 \tau^2 \quad (۶۱)$$

$$\hat{x}'_{RNA} = \hat{y}_1^2 \tau^4 \quad (۶۲)$$



شکل ۱۰- ساده سازی دیاگرام بلوکی شکل ۹



شکل ۱۳ - ضرایب بی بعد پایا بر حسب N'_{eff}

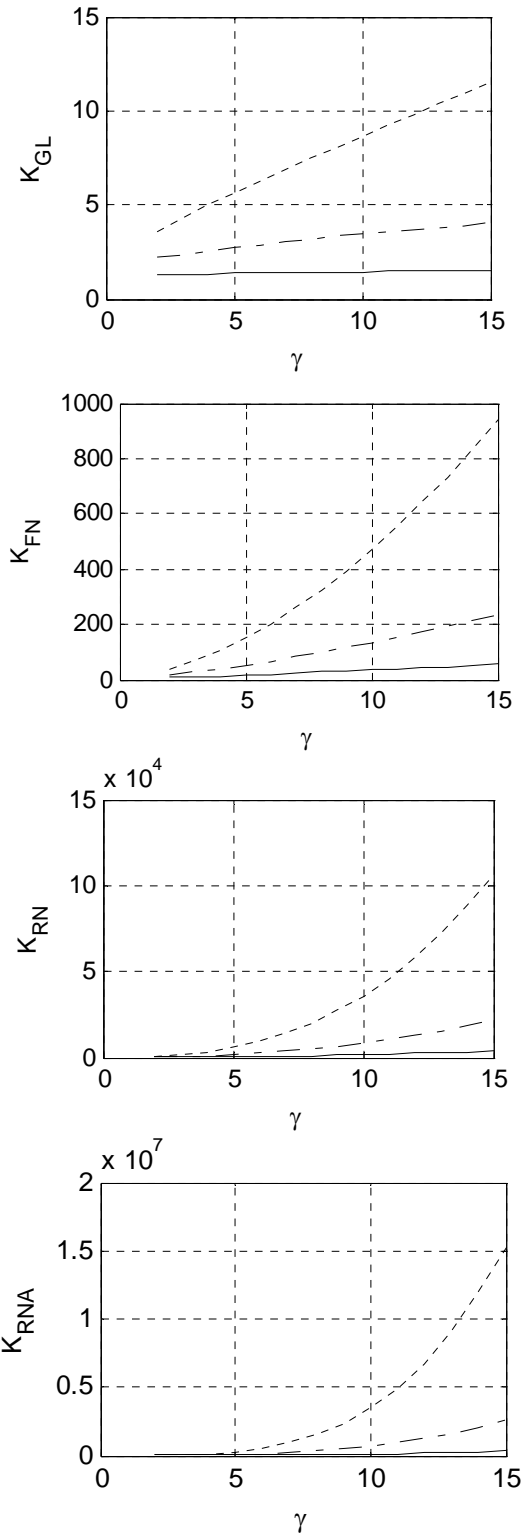
$$K_{RNA}(N'_{eff}, \gamma) = \frac{(1+R)R_A^2 \sigma_{RNA}}{\Phi_{RNA}^{0.5} v_c^3 T_{eff}^{2.5}} = \sqrt{\hat{x}_{RNA}(\infty)} \quad (68)$$

که در روابط فوق، $\gamma = c_2 / T_{eff}^2$.

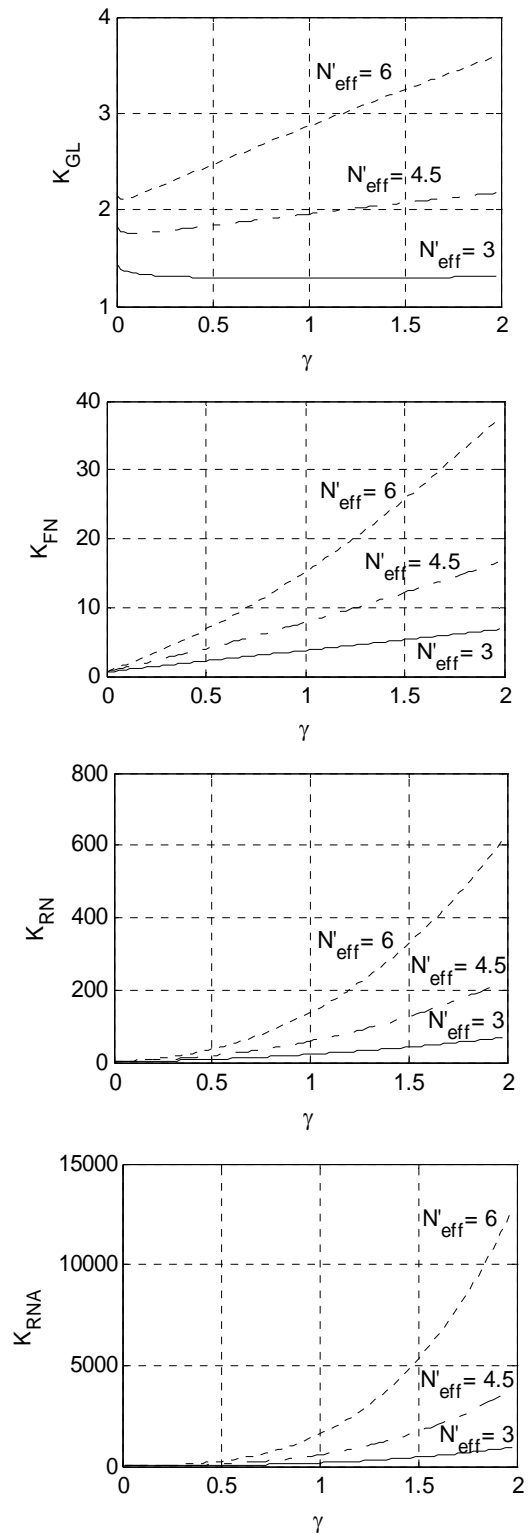
نتایج حل عددی در شکل ۱۳، رفتار ضرایب بی بعد پایا را بر حسب ضریب ناوبری مؤثر N'_{eff} به ازای سه مقدار مختلف $\gamma = 2, 8, 15$ نشان می دهد. همان طور که از این شکل ملاحظه می شود، مقدار γ می تواند تأثیر زیادی بر مقادیر ضرایب بی بعد پایا داشته باشد. با توجه به مقیاس شکل ۱۳ نمودار K_{RNA} و K_{RN} به ازای $\gamma = 2$ بسیار نزدیک (تقریباً منطبق بر) محور افقی است و با این مقیاس قابل تفکیک نمی باشد. نتایج حل عددی به ازای $0 < \gamma \leq 0.25$ مشابه نتایج برای حالت قطب های حقیقی (شکل ۴ و ۵) خواهد شد که این به نوعی صحنه گذاری بخش مهمی از استخراج روابط و حل عددی تلقی می شود. شکل های ۱۴ و ۱۵، رفتار ضرایب بی بعد پایا را بر حسب γ به ازای سه مقدار مختلف $N'_{eff} = 3, 4.5, 6$ نشان می دهد که به علت وضوح بهتر برای دو بازه $0 < \gamma < 2$ و $2 \leq \gamma \leq 15$ ترسیم شده است (تعریف نوع خطوط در شکل ۱۵ مشابه شکل ۱۴ است). به طور نمونه و برای مقادیر مفروض، رفتار ضریب بی بعد نویز تابش بر حسب γ تقریباً خطی است؛ اما رفتار نسبتاً خطی برای ضریب بی بعد نویز مستقل از فاصله نسبت به γ تنها به ازای ضریب ناوبری مؤثر ۳ تا ۴ مشاهده می شود. همچنین مشاهده می شود که ضریب بی بعد نویز وابسته به فاصله، رفتاری غیر خطی دارد.

نکته مهم این است که استفاده از بی بعدسازی معادلات الحاقی و استخراج ضریب γ سبب شده است که به جای تحلیل فاصله خطا به ازای پارامترهای متعدد، این تحلیل نسبت به حداقل پارامترهای ممکن کاهش یابد. همچنین ترسیم ضرایب بی بعد پایا نسبت به پارامتر γ به نوعی آنالیز حساسیت فاصله خطا نسبت به تغییرات γ تلقی می شود.

همان طور که قبلاً اشاره شد، می توان ضرایب بی بعد پایا را بر حسب N'_{eff} و γ با روابطی تقریب زد که برای تحلیل فاصله خطا، محاسبه ثابت زمانی بهینه و همچنین طراحی هدایت با ضرایب متغیر، مفید خواهد بود.



شکل ۱۵ - ضرایب بی‌بعد پایا بر حسب γ
 (در محدوده $2 \leq \gamma \leq 15$)



شکل ۱۴ - ضرایب بی‌بعد پایا بر حسب γ
 (در محدوده $0 < \gamma < 2$)

$$n_{RN} = \begin{cases} 1.32 + 0.08(N' - 3) & 0.25 < \gamma < 1.2 \\ 1.7 + 0.12(N' - 3) & 1.2 \leq \gamma \leq 5 \end{cases} \quad (۸۰)$$

$$n_{RNA} = \begin{cases} 1.7 + 0.07(N' - 3) & 0.25 < \gamma < 1.2 \\ 2.45 + 0.13(N' - 3) & 1.2 \leq \gamma \leq 5 \end{cases} \quad (۸۱)$$

لازم به ذکر است که تحلیل حاضر برای مسئله خطی شده است و تحلیل مسئله در حالت غیرخطی و سه‌بعدی دشوار خواهد بود. تحلیل‌های موجود در منابع در حالت سه‌بعدی با استفاده از شبیه‌سازی پرواز ارائه می‌شود. به‌طور نمونه در مرجع [۱۷] جبران‌سازی سه‌بعدی خطای رادوم انجام شده است و نتایج با شبیه‌سازی پرواز به‌دست آمده است.

پیوست الف: سیستم مرتبه اول

نتایج حل عددی با استفاده از روش الحاقی بی‌بعد برای سیستم هدایت و کنترل مرتبه اول در شکل ۱۶ ملاحظه می‌شود. در این حالت، ضرایب بی‌بعد پایا تنها تابعی از ضریب ناوبری مؤثر است. در اینجا تقریب خطی ضرایب پایا در بازه $3 \leq N'_{eff} \leq 6$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$K_{FN}(N'_{eff}) = 0.532 + 0.025(N'_{eff} - 3) \quad (۸۲)$$

$$K_{GL}(N'_{eff}) = 1.44 + 0.238(N'_{eff} - 3) \quad (۸۳)$$

$$K_{RN}(N'_{eff}) = 1.06 + 0.043(N'_{eff} - 3) \quad (۸۴)$$

$$K_{RNA}(N'_{eff}) = 4.66 + 0.062(N'_{eff} - 3) \quad (۸۵)$$

امتیاز روابط خطی این است که محاسبات و استخراج روابط تحلیلی آتی (برای طراحی ضریب ناوبری متغیر) را ساده می‌کند. روابط ریشه میانگین مجذور فاصله خطای پایا از مرجع [۱۶] به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_{GL} = \frac{K_{GL}(N'_{eff})}{1 + R} \sqrt{\Phi_{GL} / T_{eff}} \quad (۸۶)$$

در اینجا برای افزایش دقت (نسبت به تقریب خطی) روابط تقریبی ضرایب بی‌بعد پایا در بازه $3 \leq N' \leq 6$ و $0.25 \leq \gamma \leq 5$ به‌صورت

$$K_j = K_j(\gamma=0.25) + b_j(N'_{eff})(\gamma - 0.25)^{n_j(N'_{eff})} \quad (۶۹)$$

استخراج شده است که در آن $j = GL, FN, RA, RNA$ و مقدار ضریب بی‌بعد پایا به‌ازای $\gamma = 0.25$ است ($\alpha = 0.5$):

$$K_{GL}|_{\gamma=1/4} = 1.31 + 0.317(N'_{eff} - 3) \quad (۷۰)$$

$$K_{FN}|_{\gamma=1/4} = 1.45 + 0.5(N'_{eff} - 3)^{1.26} \quad (۷۱)$$

$$K_{RN}|_{\gamma=1/4} = 3.96 + 2(N'_{eff} - 3)^{1.28} \quad (۷۲)$$

$$K_{RNA}|_{\gamma=1/4} = 17.4 + 10.5(N'_{eff} - 3)^{1.31} \quad (۷۳)$$

اما ضرایب b و n به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$b_{GL} = -0.02 + 0.14(N'_{eff} - 3)^{1.57} \quad (۷۴)$$

$$b_{FN} = 3 + 2.7(N'_{eff} - 3)^{1.36} \quad (۷۵)$$

$$b_{RN} = 27 + 33(N'_{eff} - 3)^{1.5} \quad (۷۶)$$

$$b_{RNA} = 271 + 420(N'_{eff} - 3)^{1.65} \quad (۷۷)$$

$$n_{GL} = 1 - 0.02(N'_{eff} - 3) \quad (۷۸)$$

$$n_{FN} = \begin{cases} 0.95 + 0.04(N' - 3) & 0.25 < \gamma < 1.2 \\ 1.05 + 0.12(N' - 3) & 1.2 \leq \gamma \leq 5 \end{cases} \quad (۷۹)$$

قطب‌های حقیقی مجزا در سیستم مرتبه ۲ بررسی شده است. سپس به بازخورد شتاب و اثر آن پرداخته شده و در نهایت، اثر رادوم به دو اثر مذکور افزوده شده است و نمودارهای بی‌بعد و روابط تقریبی فاصله خطا به دست آمده است.

اگرچه حداقل مرتبه سیستم هدایت و کنترل برای مدل‌سازی نسبتاً مناسب مسئله در حضور نویز، سیستم مرتبه ۲ است، اما روابط و نمودارهای حاصل می‌تواند با شبیه‌سازی شش درجه آزادی پرواز به همراه مدل‌سازی جستجوگر و سنسورها، کالیبره شود. علاوه بر تحلیل فاصله خطا ناشی از هر یک از نویزهای جستجوگر، با استفاده از روابط حاصل می‌توان ثابت زمانی معادلی را که ریشه میانگین مجذور فاصله خطای اصابت موشک را کمینه می‌کند، استخراج نمود. مزیت دیگر، استفاده از نتایج این تحقیق برای طراحی هدایت تناسبی با ضرایب ناوبری و ثابت زمانی‌های متغیر است تا بتواند ملزومات طراحی را در محدوده وسیع‌تری از شرایط پروازی ارضاء نماید.

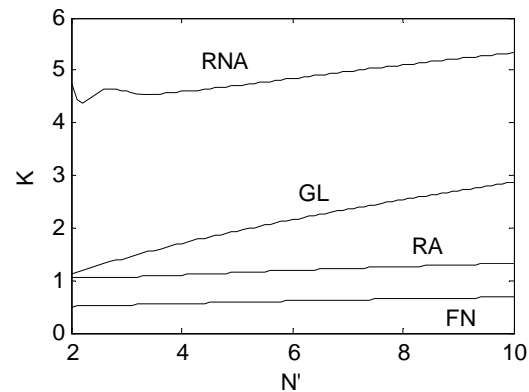
منابع و مراجع

- [1] Lin, C.-F., *Modern Navigation, Guidance, and Control Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [2] Fleeman, E.L., *Tactical Missile Design*, AIAA Education Series, 2001.
- [3] Shneydor, N.A., *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics, and Control*, Horwood Series in Engineering Science, 1998.
- [4] Neslin, F.W., and Zarchan, P., "A New Look at Classical versus Modern Homing Missile Guidance," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 4, No. 6, 1981, pp. 78-85.
- [5] Spencer, A., and Moore W., "Design Trade-offs for Homing Missiles," *AIAA SDIO Annual Interceptor Technology Conference*, AIAA-92-2755, USA, 1992.
- [6] Miwa, S., "Radome Effect on the Miss Distance of a Radar Homing Missile," *Electronics and Communications in Japan*, Part 1, Vol. 81, No. 7, 1998.
- [7] Ohlmeyer, E.J., "Root-Mean-Square Miss Distance of Proportional Navigation Missile Against Sinusoidal Target," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 3, 1996, pp. 563-568.
- [8] Hablani, H.B., and Pearson, D.W., "Miss Distance Error Analysis of Exoatmospheric Interceptors," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 2, 2004, pp. 283-289.
- [9] Alpert, J., "Miss Distance Analysis for Command Guided Missiles," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 11, No. 6, 1988, pp. 481487.

$$\sigma_{FN} = \frac{K_{FN}(N'_{eff})v_c}{1+R} \sqrt{T_{eff} \Phi_{FN}} \quad (87)$$

$$\sigma_{RN} = \frac{K_{RN}(N'_{eff})v_c^2}{(1+R)R_A} \sqrt{T_{eff}^3 \Phi_{RN}} \quad (88)$$

$$\sigma_{RNA} = \frac{K_{RNA}(N'_{eff})v_c^3}{(1+R)R_A^2} \sqrt{T_{eff}^5 \Phi_{RNA}} \quad (89)$$



شکل ۱۶ - ضرایب بی‌بعد یا ناشی از نویز جستجوگر بر حسب ضریب ناوبری (مؤثر) برای سیستم مرتبه اول

که برای محاسبه ضرایب $K(N'_{eff})$ می‌توان از روابط خطی (۸۲-۸۵) استفاده کرد. البته روابط تقریبی (۸۲-۸۵) در مرجع [۱۶] نیامده است.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، روابط تقریبی فاصله خطای استراتژی بهبودیافته ناوبری تناسبی با بازخورد شتاب جانبی (و نرخ آن) برای سیستم هدایت و کنترل مرتبه دوم در حضور اثر رادوم و نویز جستجوگر با استفاده از حل عددی معادلات بی‌بعد شده روش الحاقی استخراج شده است. تحلیل مذکور با فرض مسئله خطی شده، ثابت بودن شیب خطای رادوم و سرعت نزدیک شدن موشک به هدف انجام شده است. برای استخراج روابط مذکور، مسئله به سه بخش تقسیم شده است تا اثرات هر عامل شامل سیستم مرتبه دوم با قطب‌های حقیقی غیریکسان، بازخورد شتاب جانبی و اثر رادوم در فاصله خطای ناشی از نویز جستجوگر، به‌طور مجزا و توأمان تحلیل شود. ابتدا تنها اثر

[15] Neslin, F.W., and Zarchan, P., "Radome Induced Miss Distance in Aerodynamically Controlled Homing Missiles," *AIAA Guidance and Control Conference*, AIAA-84-1845, USA, 1984.

[۱۶] جلالی نائینی س.ح.، "تحلیل فاصله خطای استراتژی ناوبری تناسبی با بازخورد شتاب و سرعت زاویه بدنه با استفاده از روش الحاقی" *مجله کنترل*، جلد ۷، شماره ۱، بهار ۱۳۹۲، صفحات ۵۷-۴۳.

[۱۷] نیکوسخن لامع، م. و محمدخانی، م.ع.، "جبران‌سازی سه بعدی خطای ریدوم در صفحه دید با استفاده از نرخ بدنی" *نهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران*، تهران، ۱۳۸۸.

[10] Neslin, F.W., and Zarchan, P., "Missile Guidance Design Tradeoffs for High Altitude Air Defense," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 6, No. 3, 1983, pp. 207-212.

[11] Neslin, F.W., "Missile Guidance for Low-Altitude Air Defense," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 2, No. 4, 1979, pp. 283-289.

[12] Yanushevsky, R., *Modern Missile Guidance*, CRC Press, 2008.

[13] Zarchan, P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*, Sixth ed., Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 239, AIAA, 2012.

[14] Neslin, F.W., and Zarchan, P., "Miss Distance Dynamics in Homing Missiles," *AIAA Guidance and Control Conference Proceedings*, Aug. 1984, pp. 84-98.

