

# اثر کنترل‌کنندگی فرکانس نیروی تحریک بر رفتار دینامیکی آشوبناک سیستم‌های دوار

محمدخانلو، حشمت‌اله\*، مهردوست، علیرضا<sup>۲</sup>

۱- استادیار مرکز تحصیلات تکمیلی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

۲- مربی دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۲/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۸/۲۸)

## چکیده

رفتارهای دینامیکی آشوبناک با توجه به ماهیت غیرقابل پیش‌بینی بودن می‌توانند مشکلات زیادی را به‌ویژه در سیستم‌های مهندسی ایجاد نمایند. از مهم‌ترین سیستم‌هایی که در معرض ارتعاشات آشوبناک قرار دارند، می‌توان به سیستم‌های دوار مانند موتورهای جت یا توربین‌های خنک‌کننده سیستم تهویه هواپیما اشاره کرد. در حالت آشوبناک، دامنه پاسخ سیستم ارتعاشی به‌صورت غیرمنتظره کم و زیاد می‌شود که این مورد با توجه به بالا بودن سرعت چرخشی سیستم‌های دوار هوایی، می‌تواند تنش‌های دوره‌ای فوق‌العاده‌ای را ایجاد نماید. وجود تنش‌های دوره‌ای نیز منجر به کاهش عمر در اثر خستگی قطعات می‌شود. لذا شناسایی محدوده رفتارهای آشوبناک با توجه به غیرخطی بودن اغلب سیستم‌های واقعی و چگونگی خارج شدن از این رفتارها اهمیت به‌سزایی دارد. در این مقاله از معادله دافینگ و دافینگ اصلاح‌شده با توجه به ماهیت فیزیکی مناسب، استفاده و پس از شناسایی رفتار دینامیکی سیستم با تکنیک خاص رفتارهای غیرخطی، سعی بر کنترل رفتار آشوبناک با تغییر فرکانس تحریک گردیده است. نتایج به‌دست آمده بیانگر تأثیر مثبت افزایش فرکانس تحریک بر خروج از رفتار آشوبناک می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** رفتار آشوبناک، دوشاخه‌ای شدن، معادله دافینگ، فرکانس تحریک

## مقدمه

رفتار دینامیکی آشوبناک در بسیاری از سیستم‌های مهندسی که دارای دینامیک غیرخطی هستند، رخ می‌دهد. لذا شناسایی این نوع رفتارها با استفاده از شیوه‌های خاص مانند نمودارهای دوشاخه‌ای، طیف توان، مقاطع پوانکاره و ماکزیمم نماهای لیپانوف از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است؛ از طرفی کنترل این نوع رفتارهای دینامیکی نیز بخش گسترده‌ای از تحقیقات امروزی را به خود اختصاص داده است. البته بررسی دینامیک غیرخطی و آشوب در سیستم‌های واقعی مهندسی همواره با مشکلات عمده‌ای مواجه است. در این راستا، معمولاً قبل از اعمال روش‌های مختلف تحلیل غیرخطی، آن را بر سیستم‌های ساده و شناخته‌شده اعمال کرده و پس از نتیجه‌گیری مطلوب، به سیستم‌های واقعی گسترش می‌دهند.

دینگ و همکارانش معادله دافینگ<sup>۱</sup> را به‌عنوان یک گزینه مناسب برای سیستم‌های کنسرواتیو غیرخطی با تحریک پریودیک خارجی معرفی کرده‌اند. دلیل آنها برای این انتخاب، ساختار فیزیکی مناسب معادله دافینگ برای اعمال تکنیک‌های ریاضی می‌باشد [۱]. هابتس و همکارانش به بررسی وجود حل‌های پریودیک برای معادله دافینگ پرداخته‌اند. در این مقاله وجود حل‌های پریودیک با شرایط مختلف جمله مربوط به سختی در معادله دافینگ اثبات شده است [۲]. ونگ وجود حل‌های T پریودیک را در معادله دافینگ با تئوری‌های مربوطه از جمله تئوری پوانکاره اثبات کرده است [۳]. در رابطه با حل‌های پریودیک و تکینگی و همچنین زوال این نوع حل در معادله دافینگ می‌توان [۴ و ۵] را به‌عنوان مثال بیان کرد. همچنین وجود حل‌های پریودیک و تقریباً پریودیک با شرایط مختلف برای جملات غیرخطی در [۶-۹] مطالعه شده است. شیو و همکارانش تأثیر میرایی مرتبه کسری بر رفتار دینامیکی و ورود و خروج از حالت آشوبناک را در معادله دافینگ بررسی کردند [۱۰]. تعدادی از پژوهشگران نیز از روش‌های تحلیلی مانند روش ملنیکوف (Melnikov)، روش تعادل هارمونیک (Harmonic balance) و ... برای مطالعه رفتارهای غیرخطی در معادله دافینگ استفاده کرده‌اند [۱۱-۱۳]. هو و همکارانش تحلیل اثرات میرایی غیرخطی در حوزه فرکانس را در معادله دافینگ بررسی کرده و اثر تغییرات میرایی و سختی روی

کاهش رزونانس و جداسازی ارتعاشی را مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند [۱۴].

در حوزه کنترل ارتعاشات آشوبناک نیز محققین زیادی به بررسی شیوه‌های مختلف کنترل و اعمال قوانین مختلف کنترلی بر سیستم‌های مختلف از جمله معادله دافینگ در دهه اخیر پرداخته‌اند. برای اطلاع بیشتر در این مورد می‌توان به مراجع [۱۵-۱۸] رجوع کرد.

با مرور کارهای گذشته ملاحظه می‌شود که معادله دافینگ از جمله معادلات مهم و کاربردی در زمینه ریاضی، فیزیک، شیمی و مهندسی می‌باشد که نظر بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. در این مقاله تأثیر فرکانس تحریک بر رفتارهای غیرخطی به‌ویژه خارج شدن از ارتعاشات آشوبناک مورد بررسی قرار گرفته است. این مطالعه بر روی معادله دافینگ و دافینگ اصلاح‌شده انجام گرفته است. در ادامه نخست به معرفی معادلات و پارامترهای آن پرداخته می‌شود، سپس نحوه شناسایی رفتارهای آشوبناک با تکنیک‌های عددی مربوطه بیان می‌گردد. در پایان نحوه کنترل و خارج شدن از آشوب بررسی خواهد شد.

## فرمول‌بندی و تعریف مسئله

همان‌گونه که در بخش قبلی اشاره شد، معادله دافینگ در بسیاری از سیستم‌های واقعی کاربرد داشته و رفتار دینامیکی آن را می‌توان به سیستم‌های واقعی تعمیم داد. معادله یاد شده به‌صورت کلی زیر معرفی می‌شود:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \gamma x^3 = F_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

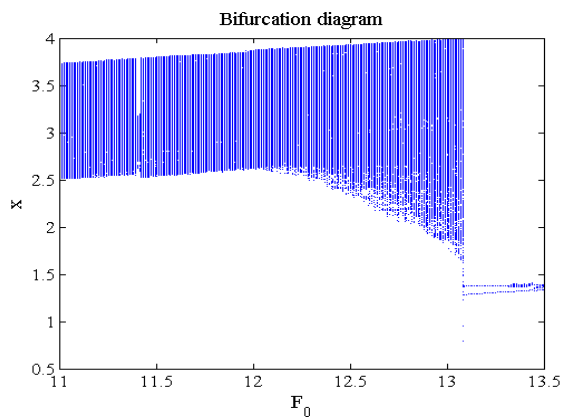
در این معادله،  $\alpha$  ضریب میرایی،  $\gamma$  ضریب سختی،  $F_0$  ضریب نیروی تحریک و  $\omega$  فرکانس تحریک هستند. دینامیک غیرخطی بسیاری از سیستم‌های تحت ارتعاش اجباری به‌صورت معادله (۱) بیان می‌شود. البته در معادله فوق با توجه به نوع کاربرد، اصلاحاتی انجام گرفته است که در مراجع مختلف می‌توان این تغییرات را پیگیری کرد. نمونه اصلاح‌شده معادله دافینگ برای اهداف کنترلی به‌صورت زیر معرفی می‌گردد [۱۵]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_d \frac{dx}{dt} + \alpha_d x + \beta_d x^3 + \gamma_d x^5 = F_0 \cos(\omega_d t) \quad (2)$$

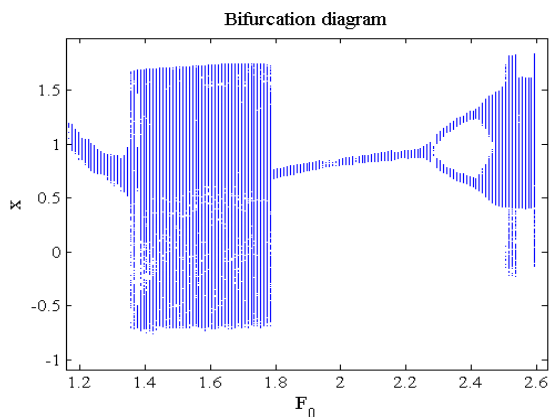
نمودارهای دوشاخه‌ای<sup>۲</sup>

نمودارهای دوشاخه‌ای به‌عنوان اولین تکنیک برای بررسی رفتار غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این قسمت، ضریب نیروی تحریک به‌عنوان پارامتر کنترلی انتخاب شده و با تغییر آن با گام مناسب، جابجایی برحسب این پارامتر ترسیم شده است. چنانچه حرکت، منظم (پریودیک) باشد، مسیرهای خروجی از مقطع پوانکاره فقط یک نقطه را نشان می‌دهند. اگر حرکت نامنظم (شبه‌پریودیک یا آشوبناک) باشد، نوار باریکی از نقاط را در کنار هم خواهیم دید [۱۹]. لذا برای تشخیص دقیق آشوب به تکنیک‌های دیگری نیاز است که در ادامه توضیح داده می‌شود.

شکل ۱ نشان می‌دهد که رفتار نامنظم در  $F_0 = 11$  شروع شده و در  $F_0 = 13.1$  وارد رفتار منظم سوپرهارمونیک<sup>۳</sup> یا پایین هارمونیک<sup>۴</sup> با پریود  $2T$  می‌شود.



شکل ۱- نمودار دوشاخه‌ای معادله دافینگ با  $\gamma = \omega = 1$  و  $\alpha = 0.2$



شکل ۲- نمودار دوشاخه‌ای معادله دافینگ اصلاح شده با

$$\omega_d = 1, \beta_d = \gamma_d = 1, \alpha_d = -1, \lambda_d = 0.15$$

که در آن،  $\lambda_d$  ضریب میرایی،  $\alpha_d$  ضریب سختی خطی، و  $\beta_d$  و  $\gamma_d$  به‌ترتیب ضرایب سختی غیرخطی مرتبه سه و پنج و  $\omega_d$  فرکانس تحریک هستند.

در ادامه رفتار دینامیکی دو سیستم فوق مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادله (۱) با تعریف  $q_1 = x$  و  $q_2 = \dot{x}$  و  $q_3 = t$  به‌صورت معادلات فضای حالت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{q}_1 = q_2 \quad (۳)$$

$$\dot{q}_2 = -\alpha q_2 - \gamma q_1^3 + F_0 \cos(\omega q_3) \quad (۴)$$

به همین ترتیب، معادله (۲) با تعریف  $p_1 = x$  و  $p_2 = \dot{x}$  و  $p_3 = t$  به‌صورت معادلات فضای حالت زیر بیان می‌گردد:

$$\dot{p}_1 = p_2 \quad (۵)$$

$$\dot{p}_2 = -\lambda_d p_2 - \alpha_d p_1 - \beta_d p_1^3 - \gamma_d p_1^5 + F_0 \cos(\omega_d p_3) \quad (۶)$$

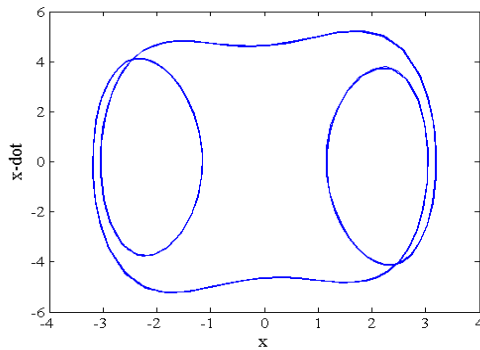
معادلات (۳) تا (۶) در فضای حالت به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی تبدیل شدند که برای حل عددی مناسب می‌باشند. برای بررسی تأثیر فرکانس تحریک نیز در معادلات (۴) و (۶)،  $\omega = 2\pi f$  در نظر گرفته می‌شود.

در بخش بعدی، شبیه‌سازی عددی و تحلیل نتایج به‌دست آمده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## شبیه‌سازی عددی و تحلیل نتایج

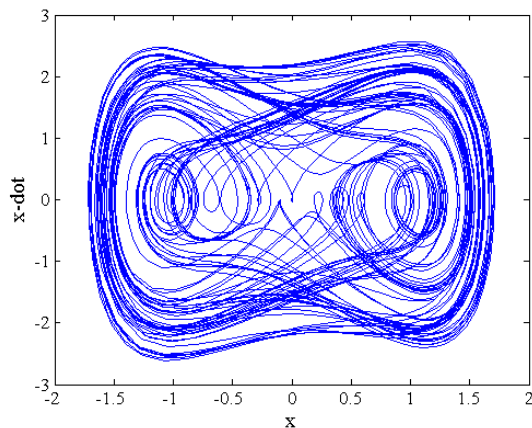
در این بخش، نخست شبیه‌سازی عددی برای بررسی رفتار دینامیکی سیستم و محدوده‌های آشوبناک برای معادله دافینگ معمولی (معادله (۱)) و تعمیم‌یافته (معادله (۲)) انجام می‌گیرد. سپس روند خروج از رفتار آشوبناک با تغییر فرکانس تحریک در دو حالت فوق، بررسی می‌شود.

حل عددی معادلات (۳) تا (۶) با روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ و در نرم افزار متلب انجام گرفته و از خروجی آن برای تحلیل رفتارهای دینامیکی غیرخطی استفاده می‌شود. تکنیک‌های خاصی برای تحلیل رفتارهای غیرخطی وجود دارد. از مهمترین آنها می‌توان به نمودارهای دوشاخه‌ای، صفحه فاز، طیف توان، نگاشت پوانکاره و ماکزیمم نماهای لیاپانوف اشاره کرد که به‌هنگام ارائه نتایج، توضیح کوتاهی برای هرکدام از روش‌های بالا داده می‌شود.



شکل ۴- نمودار صفحه فاز معادله دافینگ در  $F_0 = 13.1$

شکل ۴ رفتار منظم (پریودیک  $2T$ ) را نشان می‌دهد. در این حالت مسیر حرکت در صفحه فاز منظم بوده و تنها یک بار قطع منحنی مسیر رخ داده است.  
 شکل ۵ نیز بیانگر رفتار نامنظم معادله دافینگ اصلاح‌شده در  $F_0 = 1.5$  می‌باشد.



شکل ۵- نمودار صفحه فاز معادله دافینگ اصلاح‌شده با  $F_0 = 1.5$

#### نمودارهای طیف توان

تکنیک دیگر برای بررسی رفتار دینامیکی غیرخطی، نمودار طیف توان می‌باشد. نمودار طیف توان با اعمال تبدیل فوریه سریع بر پاسخ دینامیکی سیستم به دست می‌آید. چنانچه پاسخ سیستم منظم باشد، یک سری قله<sup>۵</sup> در فرکانس‌های خاصی دیده می‌شود که در رفتار نامنظم این نمودار به صورت یک طیف گسترده خواهد بود [۲۰]. شکل ۶ طیف گسترده‌ای را در  $F_0 = 12.6$  نشان می‌دهد که یکی دیگر از علائم رفتارهای آشوبناک است.

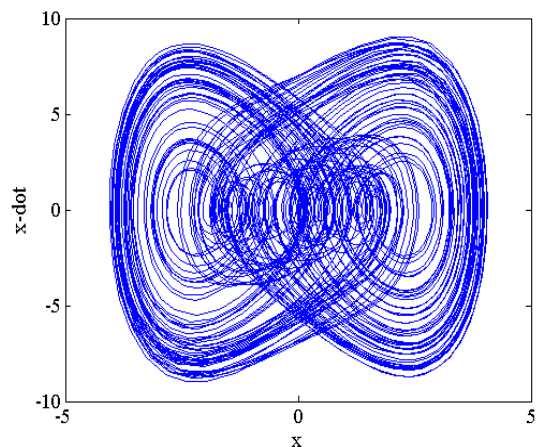
شکل ۲ نمودار دوشاخه‌ای معادله دافینگ اصلاح شده را نشان می‌دهد. در این حالت نیز ضریب نیروی تحریک به عنوان پارامتر کنترلی در نظر گرفته شده است. محدوده نسبتاً گسترده‌ای از رفتارهای نامنظم از  $F_0 = 1.36$  تا  $F_0 = 1.78$  در شکل دیده می‌شود. با افزایش  $F_0$  رفتار دینامیکی سیستم به حالت منظم با نوسانات بسیار کوچک برمی‌گردد. در  $F_0 = 2.29$  دوشاخه‌ای رخ داده و در  $F_0 = 2.42$  دوباره رفتار سیستم نامنظم می‌شود.

در ادامه برای تأیید رفتار به دست آمده در نمودار دوشاخه‌ای از تکنیک‌های دیگر استفاده می‌کنیم.

#### نمودارهای صفحه فاز

ابزار بعدی برای تحلیل رفتار دینامیکی سیستم، بررسی صفحه فاز است. در این صفحه سرعت برحسب جابه‌جایی ترسیم می‌شود. چنانچه مسیر در صفحه فاز یک مسیر تکراری بدون تقاطع باشد، حرکت منظم پریودیک  $1T$  و اگر تکراری با تقاطع باشد، حرکت منظم سوپرهارمونیک یا زیرهارمونیک است. چنانچه مسیر به صورت نامنظم و بدون تکرار باشد، حرکت شبه‌پریودیک یا آشوبناک است.

شکل ۳ نمونه‌ای از رفتار آشوبناک را در  $F_0 = 12.6$  معادله دافینگ نشان می‌دهد. چنانچه می‌بینیم مسیر حرکت کاملاً درهم‌ریخته و نامشخص می‌باشد که یکی از ویژگی‌های آشوب است.



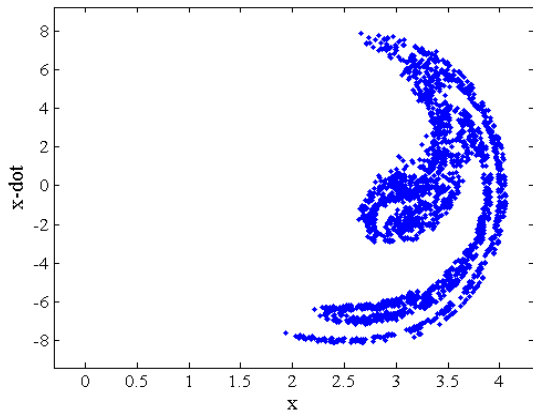
شکل ۳- نمودار صفحه فاز معادله دافینگ در  $F_0 = 12.6$

### نمودارهای نگاشت پوانکاره

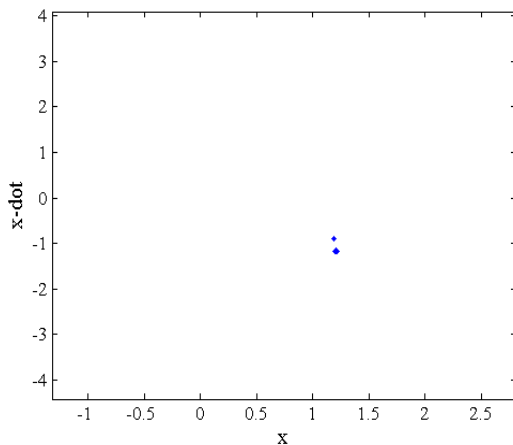
در سیستم‌های دینامیکی وابسته به زمان، یک نقطه روی مقطع پوانکاره از تقاطع مسیرهای پاسخ زمانی با صفحات فرضی با فواصل مساوی از  $T$  (دوره تناوب نیروی تحریک) به دست می‌آید. تصویر این مقطع روی صفحه فاز را نگاشت پوانکاره می‌نامند.

چنانچه تعداد  $k$  نقطه جدا از هم روی نگاشت پوانکاره وجود داشته باشد، رفتار سیستم منظم (پریودیک با پریود  $kT$ ) است و اگر نقاط برگشتی تشکیل منحنی بسته دهند، رفتار شبه‌پریودیک و اگر نقاط، پراکنده و اصطلاحاً ساختار فراکتالی<sup>۶</sup> داشته باشند، رفتار آشوبناک است.

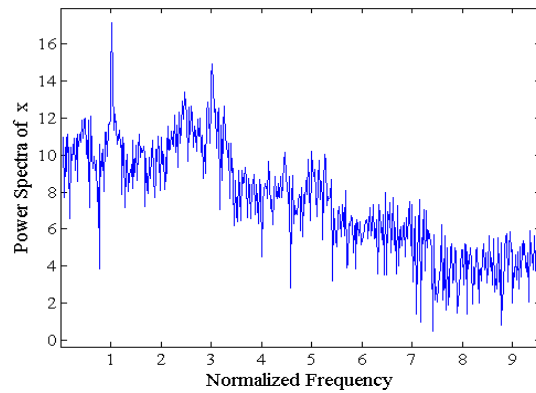
در شکل ۹ نقاط روی نگاشت پوانکاره به صورت پراکنده با ساختار هندسی فراکتالی را نشان می‌دهد که بیانگر رفتار آشوبناک در  $F_0 = 12.6$  است. دو نقطه مجزا در شکل ۱۰ در  $F_0 = 13.1$  رفتار پریودیک  $2T$  را بیان می‌کند.



شکل ۹- نگاشت پوانکاره معادله دافینگ در  $F_0 = 12.6$



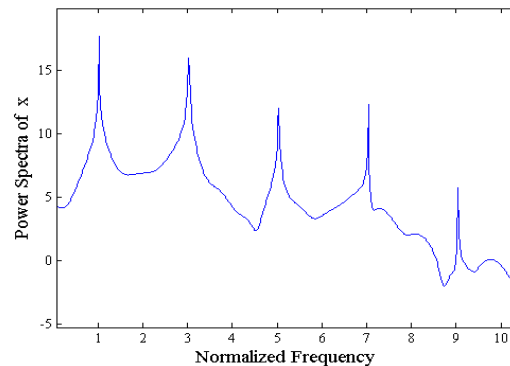
شکل ۱۰- نگاشت پوانکاره معادله دافینگ در  $F_0 = 13.1$



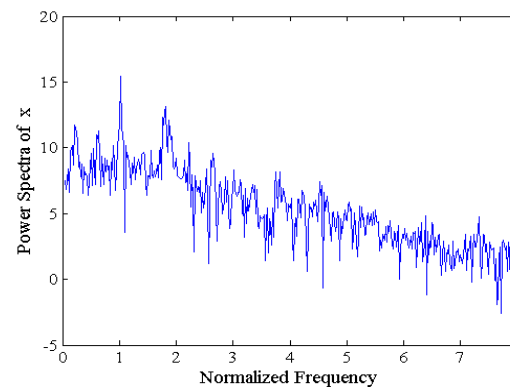
شکل ۶- نمودار طیف توان معادله دافینگ در  $F_0 = 12.6$

در شکل ۷ وجود قله‌های مشخص، نشان‌دهنده رفتار منظم می‌باشد. در اینجا وجود قله در فرکانس‌هایی با ضرب صحیح از فرکانس اصلی، نشانگر رفتار سوپرهارمونیک در  $F_0 = 13.1$  است؛ در صورتی‌که قله‌هایی با ضرب کسری از فرکانس اصلی، رفتار دینامیکی زیرهارمونیک را نشان می‌دهد.

طیف توان گسترده در  $F_0 = 1.5$  معادله دافینگ اصلاح‌شده در شکل ۸ نشان‌دهنده رفتار آشوبناک است.

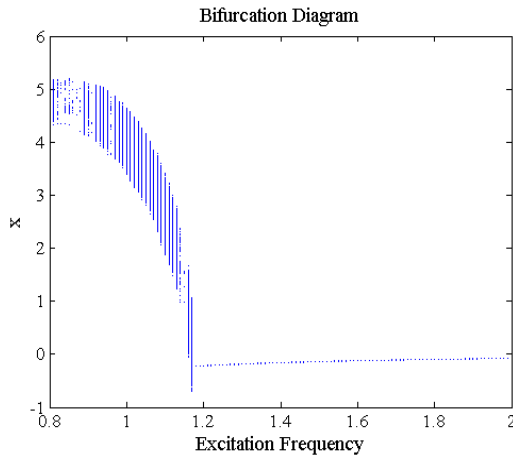


شکل ۷- نمودار طیف توان معادله دافینگ در  $F_0 = 13.1$

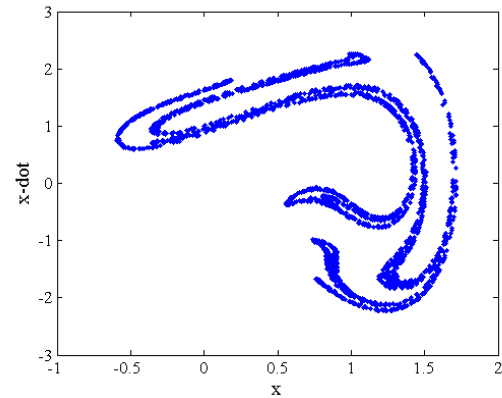


شکل ۸- نمودار طیف توان معادله دافینگ اصلاح‌شده با  $F_0 = 1.5$

اصلاح‌شده در حالت آشوبناک در گرفته شده است.



شکل ۱۲- نمودار دوشاخه‌ای معادله دافینگ با  $F_0 = 12.6$  و  $\alpha = 0.2$



شکل ۱۱- نگاهت مقطعی یوناکاره معادله دافینگ اصلاح‌شده با  $F_0 = 1.5$

هم‌چنین، شکل ۱۱ معادله دافینگ اصلاح‌شده در  $F_0 = 1.5$ ، رفتار دینامیک آشوبی را به‌نمایش می‌گذارد.

شکل ۱۲ نمودار دوشاخه‌ای را در  $F_0 = 12.6$  نشان می‌دهد. همان‌گونه که قبلاً نشان داده شد، در این ضریب نیروی تحریک، رفتار دینامیکی سیستم آشوبناک است. با تغییر فرکانس تحریک در  $F = 1.18$  سیستم از حالت آشوبناک خارج شده و وارد رفتار کاملاً پریودیک می‌شود. این نوع رفتار نیز با توجه به ماهیت قابل‌پیش‌بینی بودن، از جمله رفتارهای دینامیکی مطلوب می‌باشد.

برای تأیید رفتار ایجاد شده در نمودار دوشاخه‌ای از ماکزیمم‌نماهای لیاپانوف<sup>۹</sup> به‌عنوان یک ابزار قوی در شناسایی رفتارهای آشوبناک استفاده می‌کنیم. ماکزیمم‌نماهای لیاپانوف بیانگر آهنگ متوسط همگرایی یا واگرایی بر اثر اعمال شرایط اولیه مختلف از مسیر حرکت سیستم می‌باشد، که با رابطه

$$\bar{\lambda}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|y(t)\|}{\|y(0)\|} \right)$$

نماهای لیاپانوف است. چنانچه ماکزیمم‌نماهای لیاپانوف منفی یا صفر باشند، رفتار منظم و مثبت بودن این نماها بیانگر رفتار آشوبناک است [۱۹ و ۲۱]. الگوریتم به‌کار رفته برای تعیین نماهای لیاپانوف بر پایه مرجع [۲۲] می‌باشد.

در شکل ۱۳ ماکزیمم‌نماهای لیاپانوف قبل از فرکانس 1.18 مثبت و بعد از آن منفی است که به‌ترتیب بیانگر رفتار آشوبناک و پریودیک است.

### اثر کنترلی فرکانس تحریک

در این بخش، هدف اصلی این مقاله (یعنی بررسی اثر کنترل‌کنندگی فرکانس تحریک بر رفتارهای آشوبناک) بررسی می‌گردد. رفتارهای آشوبناک با توجه به ماهیت غیرقابل پیش‌بینی بودن، می‌تواند مشکلات زیادی را به‌ویژه در سیستم‌های مهندسی ایجاد نماید. به‌عنوان مثال، در ارتعاشات آشوبناک در یک سیستم دوار مانند موتور جت یا توربین خنک‌کننده<sup>۷</sup> سیستم تهویه هواپیما یا سیستم‌های ژيروسکوپ، دامنه پاسخ سیستم ارتعاشی به‌صورت غیرمنتظره کم و زیاد می‌شود، که با توجه به بالا بودن سرعت چرخشی این‌گونه سیستم‌ها، می‌تواند منجر به تنش‌های دوره‌ای<sup>۸</sup> فوق‌زیاد گردد. این نیز به‌نوبه خود موجب کم شدن عمر خستگی قطعات می‌شود. لذا شناسایی محدوده رفتارهای آشوبناک با توجه به غیرخطی بودن اغلب سیستم‌های واقعی و چگونگی خارج شدن از این رفتارها اهمیت به‌سزایی دارد. البته همان‌گونه که در مقدمه گفته شد، روش‌های مختلف کنترلی مانند روش کنترل مقاوم، تطبیقی، مدهای لغزشی و ... در حوزه سیستم‌های کنترل وجود دارد. ولی در اینجا هدف اعمال روش کنترلی خاصی نیست، بلکه استفاده از پارامترهای خود سیستم مورد نظر است. یکی از این پارامترهای مهم فرکانس نیروی تحریک می‌باشد. برای بررسی این مورد، معادله دافینگ و دافینگ

همچنین در شکل ۱۴ اثر افزایش فرکانس تحریک بر خارج کردن رفتار سیستم از حالت آشوبناک ( $F_0 = 1.5$ ) و رسیدن به رفتار پریودیک برای معادله دافینگ اصلاح شده نیز نشان داده شده است. شکل ۱۵ هم روند تغییر ماکزیمم نماهای لیاپانوف با تغییر فرکانس نیروی تحریک را نشان می‌دهد.

### جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

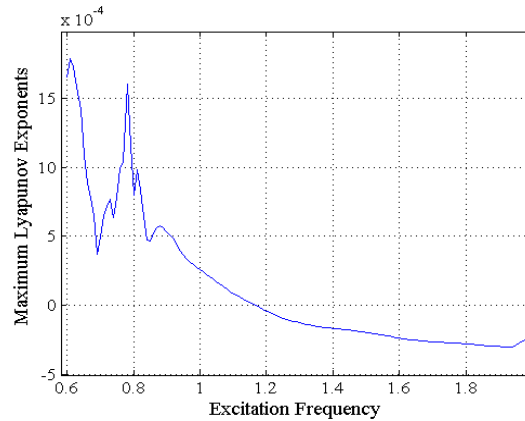
در این مقاله تغییر فرکانس نیروی تحریک بر رفتار دینامیکی آشوبناک مورد بررسی قرار گرفت. از معادله دافینگ و معادله دافینگ اصلاح شده، با توجه به ساختار فیزیکی مناسب این معادلات، به‌عنوان یک سیستم فیزیکی استفاده شد. معادلات دیفرانسیل حرکت به فضای حالت تبدیل و با روش رانگ-کوتا به صورت عددی حل شدند. خروجی حل‌های عددی با استفاده از تکنیک‌های تحلیل سیستم‌های غیرخطی یعنی نمودارهای دوشاخه‌ای، صفحه فاز، طیف توان، نگاشت پوانکاره و ماکزیمم نماهای لیاپانوف مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج مهم این تحلیل عبارت‌اند از:

۱- در معادله دافینگ، محدوده رفتار آشوبناک برحسب تغییر ضریب نیروی تحریک با فرکانس تحریک ثابت، با استفاده از نمودار دوشاخه‌ای شناسایی شد. رفتار دینامیکی به دست آمده در این نمودار که فقط یک برآورد ظاهری است، با استفاده از تکنیک‌های دیگر مورد تأیید قرار گرفت.

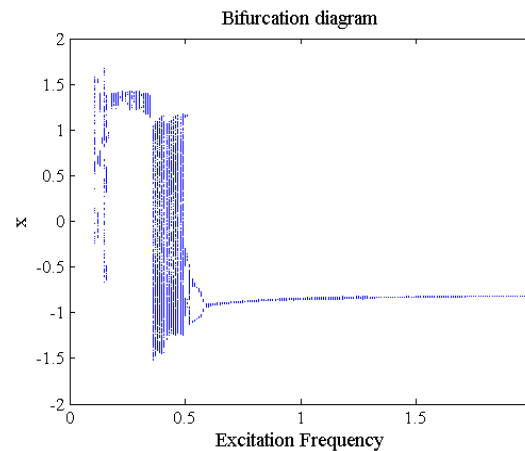
۲- رفتار دینامیکی سیستم در حالت کاملاً آشوبناک (یعنی  $F_0 = 12.6$ ) با پارامتر کنترلی فرکانس نیروی تحریک انتخاب گردید. نتایج نشان داد که با افزایش فرکانس نیروی تحریک، رفتار دینامیکی آشوبناک به سمت رفتار پریودیک می‌رود که بیانگر بهبود رفتار سیستم می‌باشد.

۳- برای تأیید بیشتر نتایج پیش‌گفته، این روند با معادله دافینگ اصلاح شده نیز بررسی گردید که در این حالت نیز اثر افزایش فرکانس نیروی تحریک بر خارج شدن از رفتار آشوبناک، دیده شد.

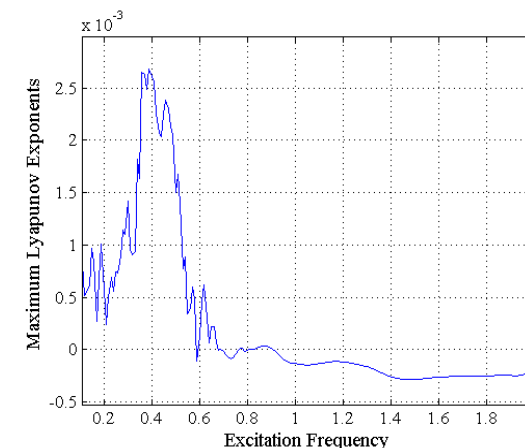
۴- این مورد را می‌توان به بسیاری از سیستم‌های دوار هوایی با توجه به بالا بودن سرعت‌های چرخشی (مثلاً حدود 15000rpm در موتورهای جت و حدود 40000rpm در توربین‌های سیستم خنک‌کننده و حدود 20000rpm در سیستم‌های ژيروسکوپ) تعمیم داد. لازم به توضیح است که در سیستم‌های ذکر شده، به‌عنوان مثال، نیروی ناشی از عدم



شکل ۱۳- نمودار ماکزیمم نماهای لیاپانوف معادله دافینگ با  $\alpha = 0.2$  و  $F_0 = 12.6$



شکل ۱۴- نمودار دوشاخه‌ای معادله دافینگ اصلاح شده با  $F_0 = 1.5$ ,  $\beta_d = \gamma_d = 1$ ,  $\alpha_d = -1$ ,  $\lambda_d = 0.15$



شکل ۱۵- نمودار ماکزیمم نماهای لیاپانوف معادله دافینگ اصلاح شده با  $\beta_d = \gamma_d = 1$ ,  $\alpha_d = -1$ ,  $\lambda_d = 0.15$  و  $F_0 = 1.5$

*quintic nonlinearities*,” Computers and Mathematics with Applications 57, pp. 500-506.

[10] Long-Jye Sheu, Hsien-Keng Chen, Juhn-Horng Chen, Lap-Mou Tam, (2007), “*Chaotic dynamics of the fractionally damped Duffing equation*,” Chaos, Solitons and Fractals 32, pp. 1459-1468.

[11] L. Cveticanin, (2009), “*M.Zukovic Melnikov’s criteria and chaos in systems with fractional order deflection*,” Journal of Sound and Vibration 326, pp. 768-779.

[12] A. Beléndez, E. Gimeno, T. Beléndez, A. Hernández, (2009), “*Rational harmonic balance based method for conservative nonlinear oscillators: Application to the Duffing equation*,” Mechanics Research Communications 36, pp. 728-734.

[13] S. Nourazar, A. Mirzabeigy, (2013), “*Approximate solution for nonlinear Duffing oscillator with damping effect using the modified differential transform method*,” Scientia Iranica B 20 (2), pp. 364-368.

[14] Carmen Ho, Zi-Qiang Lang, Stephen A. Billings, (2014), “*A frequency domain analysis of the effects of nonlinear damping on the Duffing equation*,” Mechanical Systems and Signal Processing 45, pp. 49-67.

[15] Sihem A. Lazzouni, Samuel Bowong, F.M. Moukam Kakmeni, Brahim Cherki, Noureddine Ghouali, (2007), “*Chaos control using small-amplitude damping signals of the extended Duffing equation*,” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 12, pp. 804-813.

[16] Shu-Yong Liu, Xiang Yu, Shi-Jian Zhu, (2008), “*Study on the chaos anti-control technology in nonlinear vibration isolation system*,” Journal of Sound and Vibration 310, pp. 855-864.

[17] A.Y.T. Leung, H.X. Yang, P. Zhu, (2014), “*Periodic bifurcation of Duffing-van der Pol oscillators having fractional derivatives and time delay*,” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 19, pp. 1142-1155.

[18] P. Brzeski, P. Perlikowski, T. Kapitaniak, (2014), “*Numerical optimization of tuned mass absorbers attached to strongly nonlinear Duffing oscillator*,” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 19, pp. 298-310.

[19] A. H. Nayfeh, B. Balachandran, (1995), “*Applied nonlinear dynamics*,” John Wiley and Sons Inc.

[20] Moon, F. C., (1992), “*Chaotic and fractal dynamics; An introduction for applied scientists and engineers*,” John Wiley and Sons Inc.

[21] Jianxue Xu, (2009), “*Some advances on global analysis of nonlinear systems*,” Chaos, Solitons and Fractals 39, pp. 1839-1848.

[22] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, (1985), “*Determining Lyapunov exponents from a time series*,” Physica D 16, pp. 285-317.

بالانس می‌تواند به‌عنوان منبع نیروی تحریک در نظر گرفته شود. از طرفی با توجه به سرعت چرخشی بالا، سیستم‌های فوق تحت تحریک با فرکانس بالا خواهند بود که با توجه به نتایج به‌دست‌آمده، احتمال رفتارهای آشوبناک در این‌گونه سیستم‌ها کاهش می‌یابد.

#### پی‌نوشت

- 1 - Duffing equation
- 2 - Bifurcation diagrams
- 3 - Super-harmonic
- 4 - Sub-harmonic
- 5 - Peak
- 6 - Fractal structure
- 7 - Cooling turbine
- 8 - Cyclic stresses
- 9 - Lyapunov exponents

#### مراجع

- [1] Ding, T., et al. (1991), “*On Periodic Solutions of Sub linear Duffing Equations*,” Journal of mathematical Analysis and Applications 158, pp. 316-332.
- [2] Habets, P., Metzen, G. (1989), “*Existence of Periodic Solutions of Duffing Equations*,” Journal of Differential Equations 78, pp. 1-32.
- [3] Wang, C., (2001), “*The Lower Bounds of T-Periodic Solutions for The Forced Duffing Equation*,” Journal of mathematical Analysis and Applications 260, pp. 507-516.
- [4] Zaihong Wang, Jing Xia, Dongyun Zheng, (2006), “*Periodic solutions of Duffing equations with semi-quadratic potential and singularity*,” J. Math. Anal. Appl. 321, pp. 273-285.
- [5] Hongbin Chen, Yi Li, (2007), “*Rate of decay of stable periodic solutions of Duffing equations*,” J. Differential Equations 236, pp. 493-503.
- [6] Qiyuan Zhoua, Bingwen Liub, (2009), “*New results on almost periodic solutions for a class of nonlinear Duffing equations with a deviating argument*,” Applied Mathematics Letters 22, pp. 6-11.
- [7] Lequn Peng, (2007), “*Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of Duffing equation with two deviating arguments*,” Mathematical and Computer Modelling 45, pp. 378-386.
- [8] Youyu Wang, Weigao Ge, (2006), “*Periodic Solutions for Duffing Equations with a p-Laplacian-Like Operator*,” Computers and Mathematics with Applications 52, pp. 1079-1088.
- [9] T. Pirbodaghi a, S.H. Hoseini b, M.T. Ahmadiana, G.H. Farrahi, (2009), “*Duffing equations with cubic and*