

## بهبود در یک الگوریتم حرکت شبکه و توسعه یک الگوریتم تفاضل مرکزی در حل جریان‌های ناپایا

شاهوردی مقدم، هومن\*<sup>۱</sup>، میرساجدی، سید مهدی<sup>۲</sup>

۱- کارشناس ارشد هوافضا- دانشکده مهندسی هوافضا - دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

۲- استادیار- دانشکده مهندسی فناوری‌های نوین- دانشگاه شهید بهشتی

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۵/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۰۹/۱۰)

### چکیده

در این تحقیق الگوریتمی ساده و بهبودیافته برای شبیه‌سازی حرکات نوسانی یا دورانی جسم و همچنین حل معادلات حاکم بر جریان ارائه شده است. بمنظور شبکه بندی میدان حل، از یک شبکه هیبریدی<sup>۱</sup> که ترکیبی از المان‌های مثلثی و چهارضلعی می‌باشد، استفاده شده است. در الگوریتمی که جهت حرکت شبکه استفاده شده به راحتی حرکات نوسانی یا دورانی جسم قابل اجرا می‌باشد، به گونه‌ای که به هیچ یک از متدهای رایج در شبکه‌های متحرک مانند میانه یابی، حذف یا درج نقاط و یا شبکه بندی مجدد نیاز نمی‌باشد. گسسته‌سازی میدان حل در این تحقیق مبتنی بر روش حجم کنترل بر مبنای المان محدود (CVFEM)<sup>۲</sup> بوده و بمنظور حل معادلات جریان، الگوریتم تفاضل مرکزی جیمسون بر اساس روش مذکور، توسعه یافته است، که از مهمترین مزایای روش ارائه شده، عدم نیاز به شناسایی اطلاعات سلول‌های مجاور جهت محاسبه شارهای جابه‌جایی است که این موضوع در حل مسائل سه بعدی بسیار حائز اهمیت می‌باشد و موجب سادگی قابل توجه در حجم ساختار داده‌ها می‌گردد. علاوه بر این در این روش محاسبه خواص جریان مستقیماً بر روی رئوس المان‌ها صورت می‌پذیرد، بدین ترتیب شرایط مرزی مستقیماً بر روی نقاط مرزی اعمال شده و در نتیجه خواص جریان بر روی مرزها بصورت دقیقتری محاسبه می‌شود. در این تحقیق و بر روی معادلات گذرا، دوبعدی و تراکم‌پذیر اویلر، روش‌های تسریع همگرایی شامل گام‌زمانی موضعی، آنتالپی میراکنده و هموار سازی باقی‌مانده‌ها نیز بمنظور کاهش زمان حل استفاده شده است. در انتها و برای اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، این نتایج با داده‌های تجربی و سایر نتایج عددی موجود مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: حجم محدود بر مبنای المان محدود، مرز متحرک، روش جیمسون، الگوریتم تفاضل مرکزی

### مقدمه

بی‌سازمان با توجه به انعطاف‌پذیری بالایی که دارند به خوبی می‌توانند برای این کار مورد استفاده قرار بگیرند و دوم، استفاده از یک الگوریتم عددی سریع و با دقت بالا. چنین الگوریتمی باید بتواند جریان غیردائمی را که شامل شوک و سایر ناپیوستگی‌ها است با دقت بالایی شبیه‌سازی نماید.

بنابراین همانگونه که بیان شد، اولین گام در شبیه‌سازی عددی جریان در داخل یک میدان، شبکه‌بندی میدان می‌باشد. تولید یک شبکه مناسب تاثیر بسزایی در روند حل میدان دارد. اهمیت این امر در خصوص مسائل حاوی مرز متحرک دوچندان است چرا که با کوچک‌ترین حرکت جسم، کیفیت اولیه شبکه نیز بسرعت از بین می‌رود. بنابراین اولین قدم در حل میدان مورد نظر، انتخاب و تولید شبکه‌ای مناسب،

از جمله مباحثی که در حال حاضر به عنوان یکی از چالش‌های دینامیک سیالات عددی مطرح می‌باشد، حل جریان غیردائم در میدانی حاوی اجسام متحرک است. در اینجا حرکت جسم نه تنها باعث ایجاد یک جریان غیردائم پیچیده می‌شود بلکه نیاز به تغییر شبکه داخل میدان را نیز ایجاد می‌کند که این خود باعث پیچیده و زمانبر شدن فرآیند تولید شبکه و حل جریان می‌شود. لذا به منظور شبیه‌سازی دقیق جریان‌های غیردائم حاوی اجسام متحرک دو پارامتر عمده باید مورد توجه قرار بگیرد. اول، وجود یک سیستم شبکه‌بندی کارا و قابل انعطاف که بتواند حرکت اجسام را بخوبی و بدون آنکه کیفیت خود را از دست بدهد تعقیب نموده و آنرا مدل نماید که شبکه‌های

کارآ و قابل انعطاف است که بدون آنکه از کیفیت آن کاسته شود، قادر به مدل سازی کلیه حرکت های جسم متحرک باشد. در زمینه شبکه متحرک نیز روش های مختلفی همچون روش تولید شبکه مجدد، روش تولید شبکه موضعی، روش های فیزی و ... وجود دارد که برای مثال به برخی از آنها در مراجع [۶-۱] اشاره شده است.

پس از تولید شبکه و تعیین ساختار داده ها، باید معادلات حاکم بر روی شبکه مزبور گسسته شود. فرآیند گسسته سازی<sup>۳</sup> میدان فیزیکی و ایجاد میدان محاسباتی عملیات پیچیده ای بدنبال دارد و سهم قابل توجهی در کیفیت حل میدان جریان را عهده دار می باشد. انواع روش های عددی که در حال حاضر روی توسعه آنها کار می شود روش های مبتنی بر اختلاف محدود<sup>۴</sup>، المان محدود<sup>۵</sup>، حجم محدود<sup>۶</sup> و طیفی<sup>۷</sup> می باشند.

استفاده از روش های اختلاف محدود با توجه به این که مبتنی بر بسط سری تیلور هستند تنها به همراه شبکه های با سازمان امکان پذیر می باشد. در روش های المان محدود، گسسته سازی میدان با تقسیم میدان حل به المان های بدون اشتراک و دلخواه از نظر شکل و اندازه صورت می گیرد. در این روش برای تقریب متغیرهای جریان از توابع ساده خطی یا درجه دو استفاده می - شود.

روش های طیفی نیز در حال حاضر به مسائلی با هندسه - های نسبتا ساده و شرایط مرزی اندک، محدود می گردند و در جریان های دارای ناپیوستگی با مشکلاتی مواجه می باشند، ولیکن تحقیقات گسترده و قابل توجهی جهت رفع این محدودیت ها در حال انجام می باشد [۷ و ۸].

روش های حجم محدود با توجه به این که بر اساس انتگرال گیری از معادلات حاکم بر روی حجم کنترل تعریف شده اند، دارای انعطاف پذیری بالایی بوده و قابل اعمال بر روی شبکه های با سازمان و بی سازمان می باشند.

در هر یک از روش های اشاره شده، معادلات دیفرانسیل حاکم تبدیل به یک دستگاه معادلات جبری شده که با حل آن، پاسخ های نهایی جریان بدست می آید. همچنین مشتقات شارها را می توان با استفاده از روابط مرتبه اول، دوم و یا بالاتر تخمین زد که بر این اساس الگوریتم های مختلفی برای هر یک از روش های فوق ارائه شده است.

در سالهای ۱۹۵۰ تا ۱۹۸۱ میلادی الگوریتم های تفاضل مرکزی بسیاری توسعه داده شده است [۹-۱۱]. وجه مشترک

تمامی این الگوریتم ها، استفاده از مقادیر طرفین هر وجه سلول جهت دستیابی به دقت مرتبه دوم مکانی است. پرکاربردترین این الگوریتم ها روش های مک کورمک و جیمسون می باشند. روش مک کورمک (Mac-Cormack) در سال ۱۹۶۹ توسط مک کورمک و همکاران ارائه شد و در مدت یک دهه به پر کاربردترین روش عددی در آیرودینامیک تبدیل شد. در سال ۱۹۸۱ جیمسون و همکارانش روشی را ارائه و در سال های ۱۹۸۲ تا ۱۹۸۷ آنرا توسعه دادند [۱۲]. در این روش برای گسسته سازی ترم مکانی از روش تفاضل مرکزی و برای گسسته سازی ترم زمانی از انتگرال گیری زمانی رانگ کوتای چهار مرحله ای استفاده شده است. همچنین همانند سایر الگوریتم های عددی تفاضل مرکزی، در این روش نیز از عبارتهای میرایی عددی استفاده شده است.

در تمامی روش های ارائه شده برای پیاده سازی الگوریتم جیمسون در مراجع [۱۶-۱۱]، گسسته سازی میدان حل بر پایه روش حجم محدود بوده و ساختار اطلاعاتی بکار برده شده بر مبنای ضلع<sup>۸</sup> می باشد. در این الگوریتم ها انتخاب حجم کنترل های میدان بر پایه روش سلول مرکز<sup>۹</sup> بوده و پارامترهای جریان در مرکز هر المان محاسبه شده است.

از نقاط ضعف این روش آن است که اولاً برای مدل سازی ترم های مکانی معادلات باید از اطلاعات سلول های مجاور استفاده کرد. بعبارت دیگر ابتدا باید در کد مربوطه ساختار اطلاعاتی مبتنی بر ضلع ایجاد کرد، بطوریکه برای هر ضلع اطلاعات مربوط به سلول های مشترک را در کد مربوطه ذخیره سازی کرد. ثانياً در این روش با توجه به اینکه پارامترهای جریان در مرکز هر المان محاسبه می شود، در نتیجه نمی توان شرایط مرزی را مستقیماً بر روی نقاط مرزی میدان اعمال کرد که این امر خود باعث کاهش دقت محاسبات بر روی مرزها می باشد.

در این تحقیق شبکه بندی میدان حل، شبکه هیبریدی بهبود داده شده در مرجع [۱] می باشد و گسسته سازی میدان حل نیز با استفاده از روش حجم کنترل بر مبنای المان محدود صورت گرفته است. انتخاب حجم کنترل های میدان بر اساس روش سلول گره<sup>۱۰</sup> می باشد که بدین ترتیب پارامترهای جریان مستقیماً بر روی نقاط شبکه محاسبه می شوند. ساختار اطلاعاتی که در این روش به کار برده شده است به گونه ای می باشد که الگوریتم جیمسون به راحتی بر روی این ساختار قابل

در این روش میدان حل شامل دو مرز دایروی شکل می‌باشد، در سطح داخلی که شامل جسم متحرک می‌باشد هر نوع شبکه‌ای می‌تواند ایجاد شود که در این تحقیق از شبکه بی سازمان مثلثی استفاده شده است، در سطح خارجی که فاصله میانی دو مرز دایروی می‌باشد، با استفاده از المان‌های چهارضلعی شبکه‌بندی شده است. شبکه مورد استفاده در این تحقیق در شکل‌های (۱- الف و ب) نمایش داده شده است.

### متحرک‌سازی شبکه بمنظور مدل‌سازی حرکات نوسانی یا دورانی جسم

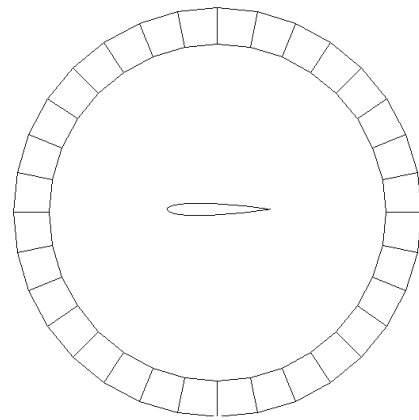
بر مبنای روش مرجع [۱] حرکت دورانی یا نوسانی جسم به لایه حلقوی بین دو دایره منتقل می‌شود و تمامی نقاط و سلول‌های داخل دایره اول بصورت صلب به همراه جسم حرکت کرده و بدون تغییر شکل باقی می‌مانند. بدین وسیله کیفیت شبکه نزدیک به جسم حفظ میگردد و تنها نقاطی که روی مرز دایره خارجی و در حقیقت روی مرز شبکه با سازمان (چهارضلعی) قرار دارند ثابت و بدون تغییر باقی می‌مانند بنابراین سلول‌هایی که در حد فاصل این دو دایره و در داخل حلقه یا لایه اطراف شبکه با سازمان قرار دارند، دچار تغییر شکل می‌گردند. در مرجع [۱] بمنظور اصلاح کیفیت المان‌های مابین دو دایره در هنگام دوران، پس از  $\frac{360}{n}$  (n تعداد نقاط روی مرزهای دایروی شکل می‌باشد) درجه چرخش که هر نقطه بر روی مرز دایره داخلی به مکان نقطه بعدی قبل از چرخش می‌رسد، شکل المان‌ها دچار بیشترین کشیدگی شده و از حالت یک المان طبیعی خارج می‌شود. در این وضعیت بدون جابجایی نقاط و نیاز به میان‌یابی اطلاعات و فقط با اصلاح شماره المان‌ها شکل هندسی شبکه به حالت اول قبل از شروع چرخش بازگشته و مجدداً می‌تواند بدون هیچگونه محدودیت، به اندازه  $\frac{360}{n}$  درجه دوران نماید. برای این منظور اتصالات و لبه‌های سلول‌های قرار گرفته در حلقه، اصلاح شده و گره‌های تشکیل دهنده هر سلول تغییر می‌کنند شکل (۲). لازم به ذکر است در این فرآیند نقطه‌ای حذف یا تولید نمی‌شود بلکه تنها اتصالات تغییر داده شده و سازمان داده‌ای، برای تغییرات صورت گرفته اصلاح می‌گردد.

در این تحقیق با انتخاب المان‌های چهارضلعی به جای المان‌های مثلثی میان دو مرز دایروی شکل، همانگونه که در شکل (۳) مشاهده می‌شود، اصلاح شماره المان‌ها پس از

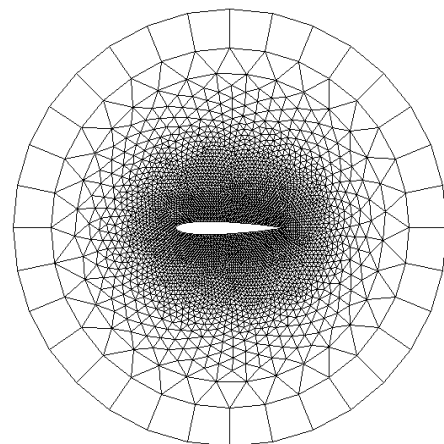
اجرا می‌باشد، با این تفاوت که بر خلاف مراجع [۱۶-۱۳] اولاً نیازی به اطلاعات سلول‌های مجاور نمی‌باشد و ثانياً خواص جریان مستقیماً بر روی نقاط میدان محاسبه می‌شود که افزایش دقت محاسبات در مرزها و کاهش زمان محاسبات را دنبال دارد.

### ساختار شبکه

در این تحقیق همانگونه که بیان شد در مدل‌سازی حرکات دورانی یا نوسانی یک جسم از شبکه هیبریدی با المان‌های چهارضلعی و مثلثی استفاده شده است. شبکه به کار رفته در این تحقیق در حقیقت بهبود شبکه‌بندی ایجاد شده در مرجع [۱] می‌باشد.



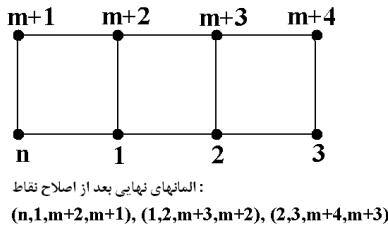
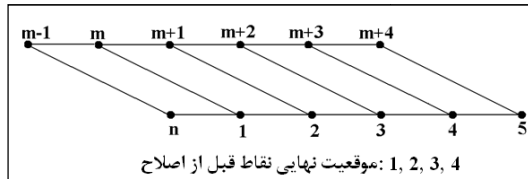
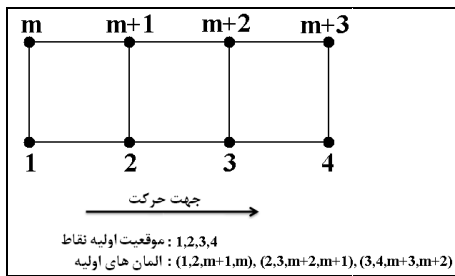
(الف)



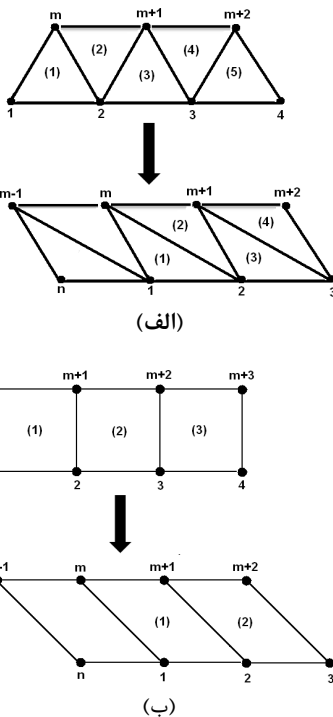
(ب)

شکل ۱- شبکه بندی مورد استفاده در این تحقیق،

الف) المان‌های چهارضلعی در فضای میانی دو دایره، ب) کل میدان



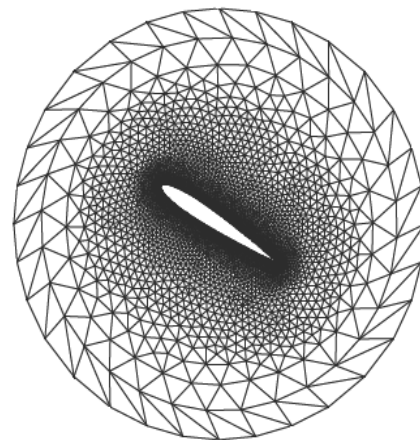
شکل ۳- نحوه اصلاح المان های لایه میانی پس از دوران  $(2 \times \frac{360}{n})$



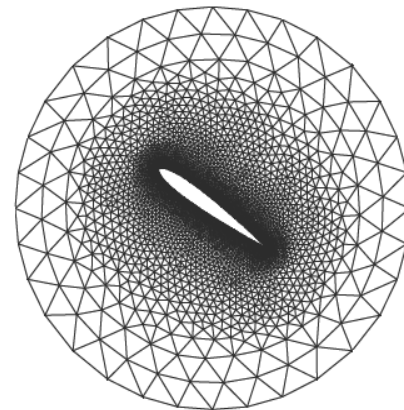
شکل ۴- مزیت استفاده از المان های چهارضلعی نسبت به المان های مثلثی در لایه تغییر شکل

درجه چرخش صورت می گیرد که این امر باعث می شود که اولاً دامنه نوسانات یا دوران جسم نسبت به مرجع [۱] بدون اصلاح نقاط، دو برابر شود. ثانیاً بر اساس شکل (۴)، تعداد المان هایی که دچار تغییر شکل می شوند نسبت به مرجع [۱] به نصف کاهش یابد.

بمنظور درک بهتر از روش و در شکل (۵)، دوران بین ۰ تا ۴۵ درجه یک ایرفویل با شبکه اصلاح شده مذکور نمایش داده شده است. در این مثال تعداد نقاط روی مرز دایروی ۶۴ عدد در نظر گرفته شده است.

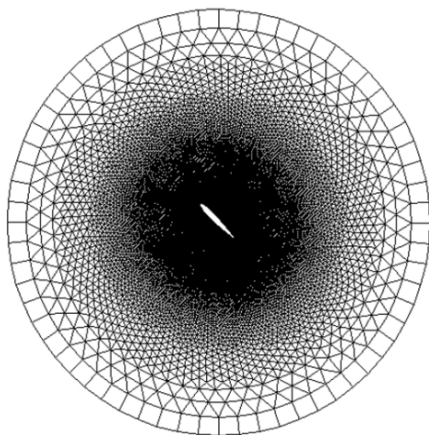


(الف)

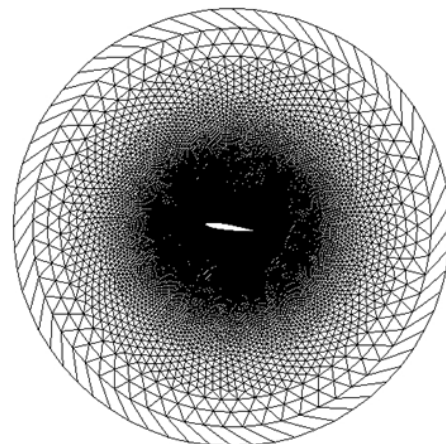


(ب)

شکل ۵- چرخش ۳۵ درجه ای شبکه، (الف) قبل و (ب) بعد از انجام اصلاح شماره المان ها بر مبنای روش مرجع [۱]



د) چرخش ایرفویل به اندازه ۴۵ درجه، چهار بار اصلاح شماره المان‌های بین دو دایره



الف) چرخش ایرفویل به اندازه ۱۱/۲۵ درجه، یک بار اصلاح شماره المان‌های بین دو دایره

شکل ۵- چرخش ایرفویل بین صفر تا ۴۵ درجه با اصلاح نقاط پس از  $(2 \times \frac{360}{n})$  درجه چرخش

### شبیه سازی جریان غیردائم روی شبکه اولیه

به منظور شبیه سازی جریان غیردائم حول یک جسم ابتدا باید شرایط اولیه جریان برای هنگامیکه جسم در موقعیت اولیه در داخل جریان قرار گرفته و قبل از اینکه شروع به حرکت نماید به دست آید. پس از آن و بدست آمدن پاسخ حالت دائم جریان مرحله بعد حرکت جسم داخل میدان و متناسب با آن حرکت شبکه داخل میدان می‌باشد و سپس حل معادلات غیردائم جریان بر روی شبکه اولیه می‌باشد.

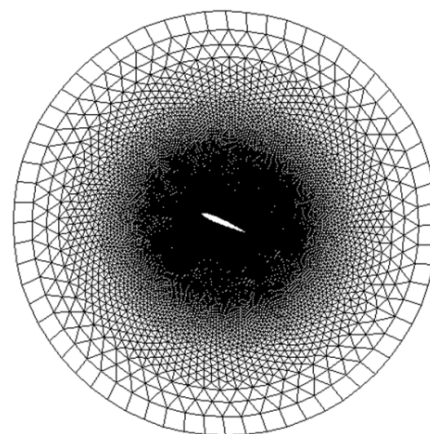
با توجه به اینکه معادلات و الگوریتم های به کار رفته در حل معادلات دائم زیر مجموعه‌ای از معادلات و الگوریتم‌های به کار رفته در شبیه‌سازی جریان غیردائم روی شبکه متحرک است، در ادامه معادلات این معادلات بطور کامل بررسی شده است.

### معادلات حاکم بر جریان

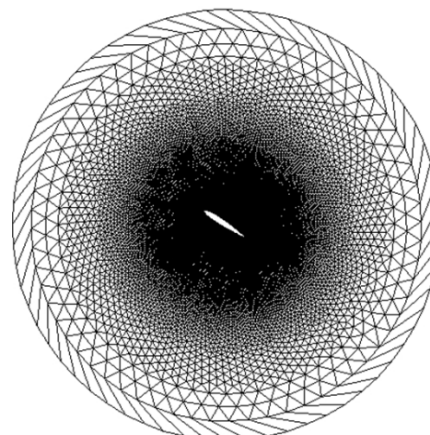
معادلاتی که در این تحقیق برای شبیه‌سازی جریان مورد استفاده قرار گرفته‌اند، معادلات دو بعدی، غیردائم و تراکم پذیر اویلر در شکل بقائی می‌باشند. شکل بقائی این معادلات در حالت بی‌بعد بصورت زیر است.

$$\partial Q / \partial t + \partial F / \partial x + \partial G / \partial y = 0 \quad (1)$$

در این رابطه  $Q$ ، بردار متغیرهای بقائی،  $F$  و  $G$ ، بردارهای شار جابجایی در جهات مختلف می‌باشند و بصورت زیر تعریف می‌شوند.



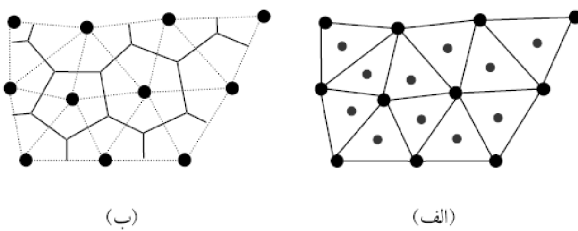
ب) چرخش ایرفویل به اندازه ۲۳/۲۳ درجه، دو بار اصلاح شماره المان‌های بین دو دایره



ج) چرخش ایرفویل به اندازه ۳۳/۲۶ درجه، سه بار اصلاح شماره المان‌های بین دو دایره

در این روش حجم کنترل هر نقطه، شامل بخش‌هایی از هر یک از المان‌های هندسی می‌گردد که این نقطه را احاطه نموده‌اند. شکل (۶).

در روش حجم محدود پس از انتگرال‌گیری از معادلات حاکم باید ترم‌های شار بگونه‌ای بر روی سطوح کنترل محاسبه شوند. گذشته از اینکه این ترم‌ها چگونه محاسبه شوند، بطور قطع روش محاسبه به اطلاعات حجم کنترل‌های اطراف خود نیازمند است. این مساله به نوع حجم کنترل نیز بستگی ندارد یعنی در هر دو نوع سلول مرکز و سلول گره وجود دارد. علاوه بر این در روش سلول مرکز با توجه به اینکه خواص میدان در مرکز هر المان محاسبه می‌شود برای محاسبه خواص جریان روی مرزها باید از برون‌یابی خواص از داخل میدان بهره گرفت. این امر دقت اطلاعات روی مرزها را بخصوص در مرزهای داخلی که از اهمیتی خاص برخوردار است، کاهش می‌دهد. [۱۷]



شکل ۶- حجم‌های کنترل شبکه در روش، الف) سلول مرکز  
ب) سلول گره

اولین قدم در گسسته‌سازی معادلات با کمک روش حجم محدود، انتگرال‌گیری از معادلات حاکم بر روی حجم کنترل می‌باشد. اگر  $\Omega$  حجم کنترل و  $\partial\Omega$  مرز در برگیرنده آن باشد، نتیجه این انتگرال‌گیری با اعمال فرضیه گرین به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} Q \, dx dy + \oint_{\partial\Omega} (F dy - G dx) = 0 \quad (5)$$

با در نظر گرفتن یک حجم کنترل  $n$  وجهی و با فرض ثابت بودن خواص در داخل حجم کنترل، انتگرال فوق بصورت زیر در می‌آید.

$$A \frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (F \Delta y - G \Delta x)_i = 0 \quad (6)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u_r \\ \rho u_r u + P \\ \rho u_r v \\ (\rho E + P)u_r + x_t P \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho u v_r \\ \rho v_r v + P \\ (\rho E + P)v_r + y_t P \end{bmatrix}$$

$u$  و  $v$  مولفه‌های سرعت در جهات  $x$  و  $y$ ،  $P$  فشار،  $\rho$  چگالی و  $E$  انرژی داخلی سیال می‌باشد.  $u_r$  و  $v_r$  سرعت‌های کانتراورینت<sup>۱۱</sup> بوده و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u_r = u - x_t, \quad v_r = v - y_t \quad (3)$$

که در روابط فوق  $x_t$  و  $y_t$  سرعت‌های حرکت اضلاع شبکه (مرزهای حجم کنترل) در جهت‌های  $x$  و  $y$  هستند. در روابط فوق متغیرهای جریان با استفاده از مقادیر جریان آزاد بی‌بعد شده‌اند. همچنین برای تکمیل معادلات فوق از معادله حالت گاز کامل بصورت زیر نیز استفاده می‌شود.

$$P = (\gamma - 1)\rho \left[ E - \frac{u^2 + v^2}{2} \right] \quad (4)$$

که در این رابطه  $\gamma$  نسبت گرمایی ویژه می‌باشد.

### گسسته سازی مکانی معادلات حاکم

همانگونه که در مقدمه بیان شد بمنظور حل عددی معادلات حاکم بر جریان ابتدا باید میدان فیزیکی حل را به اجزای کوچکی تقسیم کرد و سپس با استفاده از روش‌های موجود میدان فیزیکی را به میدان محاسباتی جهت حل معادلات حاکم بر جریان تبدیل کرد. برای این کار روش‌های حجم محدود با توجه به انعطاف‌پذیری بالایی که با شبکه‌های بی‌سازمان و باسازمان دارند امروزه بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در روش‌های حجم محدود که امروزه کاربرد بسیاری در حل مسائل عددی پیدا کرده است، دو نوع روش متفاوت برای انتخاب حجم‌های کنترل در یک میدان شبکه‌بندی شده وجود دارد. در روش اول که به روش سلول مرکز معروف است، هر یک از المان‌های هندسی میدان به عنوان یک حجم کنترل در نظر گرفته شده و خواص میدان در وسط این المان‌ها محاسبه می‌شوند، در روش دوم که به روش سلول گره معروف است، خواص میدان در رئوس المان‌های هندسی شبکه محاسبه می‌شوند.

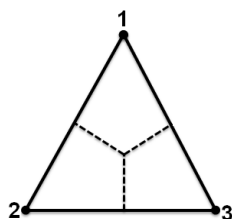
## روش حجم کنترل بر مبنای المان محدود با ساختار اطلاعاتی مبتنی بر ضلع (CVFEM-EBDS)<sup>۱۳</sup>

بمنظور گسسته‌سازی میدان حل از روش فوق و لزوم تغییر در ساختار اطلاعاتی روش جیمسون که بصورت معمول و تا کنون در مراجع از آن استفاده شده است، بصورت زیر عمل می‌شود.

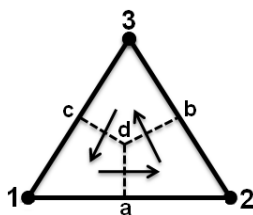
۱. هر یک المان‌های میدان حل (چهارضلعی و مثلثی) با استفاده از روش سلول گره انتخاب شده و اطلاعات بر مبنای سلول ذخیره می‌شوند. این اطلاعات شامل مختصات نقاط، شماره نقاط و شماره هر المان می‌باشد. قابل ذکر است که این اطلاعات برای هر المان بصورت جداگانه ذخیره شده و در این روش نیازی به اطلاعات المان‌های مجاور به یک المان نمی‌باشد.

۲. در هر المان، نقطه مرکزی آن و سپس میانه‌های آن المان بدست می‌آید. (هر المان چهارضلعی به دو المان مثلثی تقسیم می‌شود) دقت شود که در این روش ابتدا باید یک جهت مثلثاتی برای شماره‌گذاری نقاط هر المان در نظر بگیریم و این جهت باید برای تمامی المان‌های میدان یکسان باشد. در حقیقت در اینجا هر المان مثلثی به سه زیر حجم محدود تقسیم می‌شود. که هر زیر حجم شامل یکی از نقاط المان می‌باشد. در این قسمت ساختار اطلاعاتی جدید برای هر المان شامل نقاط ابتدایی و انتهایی هر ضلع میانه و نقاط مجاور به آن ضلع می‌باشد.

۳. پس از آنکه این عملیات برای تمامی المان‌های میدان انجام شد، مجموعه زیر حجم‌های محدود پیرامون هر نقطه، حجم کنترل بسته مورد نظر را پیرامون آن نقطه تشکیل می‌دهد. مجموعه این عملیات در شکل (۷- الف تا ج) نمایش داده شده است.



الف) یک المان مثلثی به همراه زیر حجم محدودهای مربوط به آن



که در آن  $A$  مساحت حجم کنترل و  $l$  نشان‌دهنده هر یک از وجوه آن می‌باشد.

با توجه به روش حل معادلات جریان در الگوریتم جیمسون انتخاب المان‌های میدان با استفاده از روش سلول مرکز و ذخیره‌سازی اطلاعات المان‌ها با استفاده از این روش بسیار مناسب است. در این روش خواص جریان در مرکز هر المان محاسبه می‌شود. ولی این روش دارای معایبی است که از جمله آنها نیاز به داشتن اطلاعات المان‌های همسایه و همچنین نیاز به برون‌یابی در مرزها می‌باشد که باعث کاهش سرعت محاسبات و دقت آنها در مرزها می‌شود.

اشکال این روش به ویژه در مسائل سه‌بعدی حاوی اجسام متحرک که شماره المان‌ها تغییر کرده و المان‌های همسایه نیز تغییر می‌نمایند، بیشتر جلوه می‌نماید. در این تحقیق بمنظور اجتناب از نیاز به اطلاعات المان‌های همسایه، از روش حجم کنترل بر مبنای المان محدود استفاده شده است.

از مزایای روش المان محدود آن است که همیشه و فقط از اطلاعات یک المان برای همان المان استفاده می‌کند. بنابراین استفاده از این ایده در روش‌های حجم محدود کارایی این روش‌ها را به مراتب بالاتر می‌برد.

از دیگر مزایای این روش آن است که معادلات بقا در آن بطور صریح ارضا می‌شوند. این بدان معناست که اگر شار عبوری از هر سطح کنترل دوبر محاسبه شود، ممکن است که مقادیر عددی این شار در اثر خطای عددی، با یکدیگر تفاوت داشته باشند و باعث تشکیل ترم‌های چشمه و چاه غیرواقعی در میدان جریان گردند. اما با یکبار محاسبه شار برای المان‌های چپ و راست، مقادیر شاری که از یک حجم کنترل خارج می‌شود، بطور صریح و بدون هیچگونه تفاوتی وارد حجم کنترل همسایه می‌گردد.

بر حسب نوع حجم محدود انتخابی می‌توان اطلاعات هندسی را به دو روش ذخیره نمود تا در روش حجم کنترل بر مبنای المان محدود مورد استفاده قرار گیرد. اگر حجم محدود بصورت سلول مرکز در نظر گرفته شده باشد، اطلاعات باید بر مبنای ضلع ذخیره شود. اگر حجم محدود از نوع سلول گره باشد، اطلاعات بر مبنای سلول<sup>۱۲</sup> ذخیره می‌شود. برای آگاهی از جزئیات بیشتر این روش می‌توان به مرجع [۱۸] مراجعه نمود. در ادامه به ذکر جزئیات روش پیاده شده در این تحقیق اشاره می‌شود.

راحتی امکان پذیر است که در ادامه به نحوه پیاده سازی این روش پرداخته شده است.

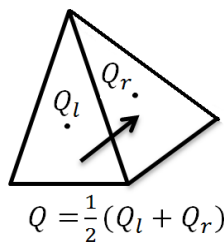
### محاسبه شارهای غیرلرزج

در این مرحله، مسأله مهم در حل معادلات بدست آمده نحوه مدل کردن شارهای عبوری از سطوح حجم کنترل در رابطه (۶) و نیز نحوه انترگرال گیری در زمان می باشد. اهمیت مدل کردن شارها از آنجا ناشی می شود که خواص جریان در نقاط کنترلی معلوم بوده و شارهای عبوری باید روی سطوح حجم کنترل محاسبه شوند، بنابراین، باید متغیرها و یا شارهای روی سطوح را به گونه ای به خواص روی نقاط کنترلی ارتباط داد.

محاسبه شارهای غیرلرزج یا شارهای جابجایی به دلیل خاصیت انتقالی که دارند همواره با اشکالاتی همراه بوده بطوریکه در طول چند دهه اخیر روش های گوناگونی جهت تخمین هر چه بهتر این ترمها ارائه شده است. ساده ترین روشی که برای مدل سازی شارهای جابجایی می توان بکار برد، استفاده از روش جداسازی مرکزی درجه دوم [۱۶ و ۱۵] است، در این روش مقدار متغیر بقائی بر روی وجوه حجم کنترل، با استفاده از متوسط گیری از مقادیر متغیرهای بقائی نقاط کنترلی المان های مجاور، بصورت زیر محاسبه می گردد.

$$Q_i = \frac{1}{2}(Q_L + Q_R) \quad (7)$$

که در آن  $R$  و  $L$  نشان دهنده المان های سمت راست و چپ ضلع  $i$  می باشد. شکل (۸).



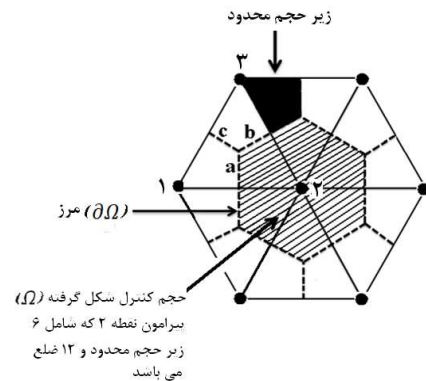
شکل ۸- نحوه مدل سازی شارهای جابه جایی با استفاده از الگوریتم گسسته سازی مرتبه ۲

برای محاسبه شارها نیز در این روش، از متد جداسازی مرکزی مرتبه دوم استفاده شده که الگوریتم آن در شکل (۹) نمایش داده شده است.

المان سمت راست    المان سمت چپ    انتهای ضلع    ابتدای ضلع

$$\begin{pmatrix} a & d & 1 & 2 \\ b & d & 2 & 3 \\ c & d & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(ب) انتخاب جهت پادساعتگرد و نحوه ذخیره سازی اطلاعات در کد مربوطه برای هر المان. در اینجا نقاط هر المان نمایانگر المان های مجاور به هر ضلع زیر حجم محدود می باشد



(ج) چگونگی شکل گیری حجم کنترل با استفاده از زیر حجم های محدود

شکل ۷- نحوه پیاده سازی روش حجم کنترل بر مبنای المان محدود با ساختار اطلاعاتی مبتنی بر ضلع

نکته قابل اهمیت در این روش آن است که چگونگی اعمال مقادیر بردار شار از مبانی حجم کنترل گرفته شده و چگونگی انتخاب المان ها از منظر المان محدود دیده شده است. بعبارت دیگر هر المان بصورت مجزا در نظر گرفته شده، شار کمیت های بقایی، صرفنظر از المان های همسایه، بر روی نقاط متصل به آن المان نوشته می شود. سپس با تکرار این روش بر روی سایر المان ها، مقادیر شار بر روی هر نقطه (ناشی از المان های مختلف) با هم جمع شده و بدین ترتیب حجم کنترل پیرامون آن نقطه کامل می گردد. عدم نیاز به اطلاعات همسایه هر المان از بزرگ ترین ویژگی های این روش است که ساختار اطلاعاتی را تا حد بسیاری ساده تر می نماید. بدیهیست که این مزیت در حالت سه بعدی بیشتر خود را نمایان می سازد. همچنین با توجه به ذخیره سازی اطلاعات با الگوریتم ذکر شده، پیاده کردن الگوریتم تفاضل مرکزی برای محاسبه شارهای جابه جایی به



$R_i(Q)$  مجموع شارهای جابه جایی در جهات  $x$  و  $y$  می باشد که برای هر ضلع  $l$  از حجم کنترل  $\Omega$  به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$R_{il}(Q) = \begin{bmatrix} (Q_n - W_n)_l \rho_l \\ (Q_n - W_n)_l (\rho u)_l + P_l \Delta y_l \\ (Q_n - W_n)_l (\rho v)_l - P_l \Delta x_l \\ (Q_n - W_n)_l (E + P)_l + (W_n)_l P_l \end{bmatrix} \quad (10)$$

در این رابطه:

$$Q_n = u \Delta y - v \Delta x \quad (11)$$

$$W_n = x_t \Delta y - y_t \Delta x \quad (12)$$

با توجه به اینکه روشهای مبتنی بر جداسازی مرکزی درجه دوم فاقد ترم اتلاف و پراکندگی می باشند، لذا زمانیکه با ترمهای جابجایی معادلات بکار می روند، نوساناتی نامیرا ایجاد می کنند که اثرات نامطلوبی بر روند همگرایی حل معادلات می گذارند. برای حل این مشکل از مقداری استهلاک مصنوعی به همراه گسسته سازی مرکزی شارهای جابجایی استفاده می شود. در اینجا از ترم استهلاک مصنوعی ارائه شده توسط جیمسون استفاده شده است [۱۵ و ۱۲].

با اضافه کردن این ترم به معادله (۹) خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} (Q_i A_i) + R_i(Q) - D_i(Q) = 0 \quad (13)$$

در این رابطه ترم اتلاف مصنوعی اضافه شده به شارها به منظور جلوگیری از نوسانات می باشد. که برای اولین بار توسط جیمسون و همکارانش معرفی گردید. این ترم از یک بخش مرتبه ی دوم جهت حذف نوسانات در اطراف ناپیوستگی ها و یک بخش مرتبه ی چهارم جهت حذف نوسانات داخل میدان تشکیل شده است. این ترم بصورت زیر تعریف می شود:

$$D_i(Q) = \sum_{k=1}^{Nedges} d_k^2 + \sum_{k=1}^{Nedges} d_k^4 \quad (14)$$

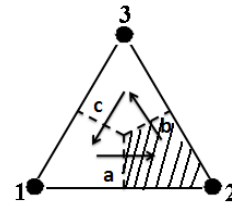
$$d_k^{(2)} = \lambda_k \varepsilon_k^{(2)} (Q_p - Q_i)_k$$

$$d_k^{(4)} = \lambda_k \varepsilon_k^{(4)} (\nabla^2 Q_p - \nabla^2 Q_i)_k$$

پس از پیاده سازی این الگوریتم برای تمامی المان های میدان، رابطه (۶) برای تک تک نقاط میدان نوشته می شود، برای مثال با نوشتن این رابطه برای نقطه ۲ در شکل (۷-ج)، خواهیم داشت:

$$A \frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_{l=1}^{12} (F \Delta y - G \Delta x)_l = 0 \quad (8)$$

که در آن  $A$  مساحت حجم کنترل پیرامون نقطه ۲ و  $l$  نشان دهنده هر یک از وجوه آن می باشد.



محاسبه شار گذرنده از هر ضلع:

$$\text{ضلع (a): } Q_a = \frac{1}{2} (Q_l + Q_r) = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2)$$

$$\text{ضلع (b): } Q_b = \frac{1}{2} (Q_l + Q_r) = \frac{1}{2} (Q_2 + Q_3)$$

$$\text{ضلع (c): } Q_c = \frac{1}{2} (Q_l + Q_r) = \frac{1}{2} (Q_3 + Q_1)$$

محاسبه شار گذرنده از هر زیر حجم محدود نسبت به نقطه واقع در آن:

$$Q_1 = -Q_c + Q_a$$

$$Q_2 = -Q_a + Q_b$$

$$Q_3 = -Q_b + Q_c$$

شکل ۹- نحوه محاسبه شارهای جابه جایی با استفاده از الگوریتم

#### گسسته سازی مرتبه ۲ در روش CVFEM-EBDS

با کمک رابطه (۸) و گسسته مکانی معادلات با استفاده از روش تفاضل مرکزی توضیح داده شده و نوشتن آن برای تمامی نقاط میدان، ترمهای زمانی و مکانی از هم مجزا شده و دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می شود.

$$\frac{d}{dt} (Q_i A_i) + R_i(Q) = 0 \quad (9)$$

که در این معادله  $A_i$  مساحت حجم کنترل  $\Omega$  پیرامون نقطه  $i$  می باشد. که باتوجه به متحرک بودن شبکه مقدار آن وابسته به زمان می باشد.

اساس دقت مورد نیاز برای مسأله غیردائم محاسبه شده و مورد استفاده قرار گیرد.

به منظور استفاده از این الگوریتم ضمنی برای حل غیردائم معادله‌ی (۱۳)، این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dt}(Q_i^{n+1}A_i^{n+1}) + R_i(Q^{n+1}) - D_i(Q^{n+1}) = 0 \quad (19)$$

که در آن بالا نویس  $n+1$  نشان دهنده‌ی مرحله‌ی زمانی جدید بوده و نشان دهنده‌ی آن است که ترم‌های باقی‌مانده و استهلاك مصنوعی در این رابطه می‌بایست بر حسب مقادیر جدید متغیرهای جریان و به صورت ضمنی محاسبه شوند. برای گسسته‌سازی ترم مشتق زمانی در این رابطه، از یک تقریب مرتبه‌ی دوم پسرو برای  $\frac{d}{dt}$  استفاده شده‌است.

$$\frac{3}{2\Delta t}(Q_i^{n+1}A_i^{n+1}) - \frac{2}{\Delta t}(Q_i^n A_i^n) + \frac{1}{2\Delta t}(Q_i^{n-1}A_i^{n-1}) + R_i(Q^{n+1}) - D_i(Q^{n+1}) = 0 \quad (20)$$

در این مرحله با تعریف مانده غیردائم  $R^*$  به صورت زیر:

$$R^*(Q^{n+1}) = \frac{3}{2\Delta t}(Q_i^{(n+1)}A_i^{n+1}) - \frac{2}{\Delta t}(Q_i^n A_i^n) + \frac{1}{2\Delta t}(Q_i^{n-1}A_i^{n-1}) + R_i(Q_i^{(n+1)}) - D_i(Q^{n+1}) \quad (21)$$

و نوشتن معادله‌ی دیفرانسیل زیر نسبت به زمان مجازی  $\tau$  که جواب معادله‌ی فوق، پاسخ حالت دائم آن می‌باشد:

$$A_i \frac{\partial Q_i^{n+1}}{\partial \tau} + R^*(Q^{n+1}) = 0 \quad (22)$$

می‌توان با انتگرال‌گیری از این معادله در زمان مجازی  $\tau$  پاسخ حالت دائم آن‌را که در حقیقت جواب معادله‌ی (۲۰) در زمان حقیقی می‌باشد، به دست آورد.

در این تحقیق از دستگاه معادلات (۲۲) با استفاده از روش صریح انتگرال‌گیری چهار مرحله‌ای رانگ کوتاه در زمان مجازی به صورت زیر انتگرال‌گیری شده‌است:

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= (Q_i^{n+1})^m \\ Q^{(1)} &= Q^{(0)} - \frac{1}{4} \frac{\Delta \tau}{A_i} R^*(Q^{(0)}) \\ Q^{(2)} &= Q^{(0)} - \frac{1}{3} \frac{\Delta \tau}{A_i} R^*(Q^{(1)}) \\ Q^{(3)} &= Q^{(0)} - \frac{1}{2} \frac{\Delta \tau}{A_i} R^*(Q^{(2)}) \end{aligned} \quad (23)$$

در رابطه فوق اندیس  $k$  ضلع مشترک سلول‌های  $p$  و  $i$  را نشان می‌دهد و اپراتور لاپلاس  $\nabla^2$  برای شبکه‌های بی‌سازمان دو بعدی، به صورت زیر عمل می‌کند.

$$\Delta^2 Q_i = \sum_{j=1}^{Nedges} (Q_j - Q_i) \quad (15)$$

ضرایب  $\varepsilon_k^{(2)}$  و  $\varepsilon_k^{(4)}$  ضرایب تطبیقی و سازگاری هستند که با سنسور شوک  $v_k$  فعال و غیرفعال می‌شوند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{(2)} &= k_2 \max(v_k) \\ \varepsilon_k^{(4)} &= \max(0, k_4 - \varepsilon_k^{(2)}) \\ v_k &= \left| \frac{P_i - P_p}{P_i + P_p} \right| \end{aligned} \quad (16)$$

سنسور شوک  $v_k$  با استفاده از تفاضل بی‌بعد فشار، نواحی گرادیان بالای ایجاد شده توسط امواج شوک را مشخص می‌کند. مقادیر استاندارد ضرایب ثابت  $k_4$  و  $k_2$  برای جریان غیر لزج بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < k_2 < 1 \\ \frac{1}{256} < k_4 < \frac{1}{32} \end{aligned} \quad (17)$$

در روابط ارائه شده  $\lambda_k$  ضریبی است که با مقادیر ویژه ماتریس‌های زاكوبی جابجایی مرتبط می‌شود.

$$\lambda_k = |u_k \Delta y - v_k \Delta x| + c_k \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (18)$$

که در رابطه فوق  $u$  و مؤلفه‌های بردار سرعت متوسط روی ضلع  $k$  و  $c$  سرعت محلی صوت  $\sqrt{\frac{\gamma P_k}{\rho_k}}$  می‌باشد.

### انتگرال‌گیری زمانی معادلات

استفاده از روش‌های صریح برای حل جریان‌های غیردائم با توجه به محدود بودن دامنه‌ی پایداری آنها بسیار زمانبر و توأم با هزینه‌ی محاسباتی بالا می‌باشد. این محدودیت در حل مسائل غیردائمی که شامل یک جسم نوسانی می‌باشد باعث می‌شود گام زمانی مجاز برای انتگرال‌گیری بر اساس محدودیت پایداری روش محاسبه گردد و نه بر اساس دقت مورد نیاز. استفاده از روش ضمنی دوزمانه برای حل جریان‌های غیردائم، باعث از بین رفتن این محدودیت شده و این اجازه را می‌دهد که گام‌زمانی مجاز جهت انتگرال‌گیری از معادلات غیردائم بر

ابزار دیگری که برای سرعت بخشیدن به همگرایی می‌توان استفاده نمود تعریف یک ترم میراکننده مصنوعی و اضافه کردن آن به معادلات حاکم به منظور کاهش نوسانات در طول همگرایی می‌باشد بدون آنکه به پاسخ حالت دائم معادلات لطمه‌ای وارد آورد. این ترم میراکننده متناسب با اختلاف آنتالپی لحظه‌ای کل  $H$ ، با مقدار جریان آزاد آن  $H_\infty$  تعریف می‌شود. به این منظور می‌توان ترم‌های مصنوعی  $\alpha\rho(H - H_\infty)$ ،  $\alpha\rho v(H - H_\infty)$ ،  $\alpha\rho u(H - H_\infty)$ ، پیوستگی، ممنتوم و انرژی اضافه نمود. در این روابط  $\alpha$  ضریب ثابتی بوده که مقدار بهینه‌ی آن برابر  $0.05$  می‌باشد.

یکی دیگر از راه‌های افزایش نرخ همگرایی، افزایش محدوده‌ی پایداری و در نتیجه بالا رفتن عدد CFL و افزایش گام‌زمانی می‌باشد. هموارسازی باقی‌مانده‌ها یکی از روش‌هایی است که با اضافه کردن یک مشخصه‌ی ضمنی به الگوریتم عددی و هموارسازی تغییرات فرکانس بالای باقی‌مانده‌ها باعث افزایش حداکثر CFL مجاز می‌شود. با استفاده از این روش محدوده‌ی پایداری الگوریتم انتگرال‌گیری چندمرحله‌ای افزایش می‌یابد. برای این منظور مانده‌ی المان  $i$  در یک فرآیند ضمنی به صورت زیر هموار می‌شود:

$$\overline{Res}_i = Res_i + \varepsilon \sqrt{V^2 Res_i} \quad (29)$$

که در آن علامت "-" نشان دهنده‌ی مقادیر جدید باقی‌مانده‌های هموار شده می‌باشد. در این تحقیق از مقدار  $0.5$  برای  $\varepsilon$  استفاده شده‌است.

### استفاده از الگوریتم ضمنی برای قوانین بقای هندسی

اگرچه اساس الگوریتم‌ها در دینامیک سیالات عددی ارضاء قوانین فیزیکی است، اما دو قانون مهمی که بقاء هندسی شبکه‌ی متحرک را در حل جریان‌های غیردائم، ارضاء می‌کنند، نیز از اهمیت بالایی برخوردار بوده و باید مورد توجه قرار گیرند. این قوانین که به قوانین  $GCL^{14}$  معروفند، تعادل بین پارامترهای هندسی را در شبکه‌های متحرک و ثابت حفظ نموده و معمولاً در حل معادلات و قانون بقایی حاکم در نظر گرفته می‌شوند. این دو قانون عبارتند از قانون بقای سطح  $(SCL)^{15}$  و قانون بقای حجم  $(VCL)^{16}$  [۲۰ و ۱۹]

زمانیکه موقعیت اولیه‌ی شبکه و مقدار جابجایی آن مشخص باشد، اطلاعات کافی از مشخصات حجم و سطح شبکه برای رعایت قوانین بقای هندسی در حین حرکت شبکه در اختیار

$$Q^{(4)} = Q^{(0)} - \frac{\Delta\tau}{A_i} R^*(Q^{(3)})$$

$$(Q_i^{n+1})^{m+1} = Q^{(4)}$$

که در آن بالانویس  $m$  نشان دهنده‌ی مرحله‌ی زمانی  $m\Delta\tau$  بوده و:

(۲۴)

$$R^*(Q^{(l)}) = \frac{3}{2\Delta t}(Q_i^{(l)} A_i^{n+1}) - \frac{2}{\Delta t}(Q_i^n A_i^n) + \frac{1}{2\Delta t}(Q_i^{n-1} A_i^{n-1}) + R_i(Q_i^{(l)}) - D_i(Q^{n+1}) R^*(Q^{(l)}) = \frac{3}{2\Delta t}(Q_i^{(l)} A_i^{n+1}) - \frac{2}{\Delta t}(Q_i^n A_i^n) + \frac{1}{2\Delta t}(Q_i^{n-1} A_i^{n-1}) + R_i(Q_i^{(l)}) - D_i(Q^{n+1})$$

همچنین مقادیر بهینه‌ی ضرایب مورد استفاده با استفاده از مرجع [۱۸] بصورت زیر است.

$$\alpha_1 = 0.333, \quad \alpha_2 = 0.2667, \quad \alpha_3 = 0.555, \quad \alpha_4 = 1.0 \quad (25)$$

این ضرایب مقادیر بهینه، به منظور همگرایی سریع حل معادلات به روش رانگ-کوتای مرتبه چهار می‌باشند. با توجه به محدودیت‌های همگرایی گام زمانی قابل قبول از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\Delta\tau_i = \min \left[ \frac{CFL A_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}, \frac{2\Delta t}{3} \right] \quad (26)$$

که در آن:

$$\lambda = u\Delta y - v\Delta x \quad (27)$$

### روش‌های افزایش سرعت همگرایی

در این تحقیق به منظور افزایش سرعت همگرایی جهت رسیدن به پاسخ معادله‌ی (۲۰) در زمان مجازی، از روش‌های افزایش سرعت همگرایی شامل گام‌زمانی موضعی، آنتالپی میراکننده و هموارسازی باقی‌مانده‌ها، استفاده شده‌است [۱۵].

در الگوریتم رانگ-کوتای چندمرحله‌ای، پاسخ دائم جریان، مستقل از گام‌زمانی موضعی در هر نقطه می‌باشد لذا گام زمانی در هر نقطه می‌تواند با گام‌زمانی نقطه‌ی دیگر متفاوت باشد بدون اینکه پاسخ دائم دچار تغییر شود. بنابراین می‌توان از گام زمانی موضعی زیر در هر المان استفاده نمود.

$$\Delta t_i = \frac{CFL A_i}{\sum_{k=1}^{Nedge} |u_k \Delta y_k - v_k \Delta x_k| + c_k \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}} \quad (28)$$

پس از بدست آوردن سطح المان می توان مؤلفه عمودی سرعت حرکت ضلع المان را از رابطه زیر بدست آورد.

$$w_n = \frac{\Delta A}{l \Delta t} \quad (34)$$

که در آن  $\Delta A$  مقدار تغییر مساحت المان و  $l$  طول ضلع المان می باشد. از این سرعت در محاسبه شارها استفاده می شود.

#### شرایط اولیه

شرایط اولیه تأثیر بسزایی در روند همگرایی حل معادلات دارد از اینرو تعیین دقیق و صحیح آن در روش های عددی از اهمیت بالایی برخوردار می باشد. شرایط اولیه ای که در این تحقیق بکار گرفته شده است. استفاده از مقادیر جریان آزاد برای کمیت های میدان می باشد. عموماً اعداد بی بعد جریان آزاد مانند عدد ماخ، عدد رینولدز و زاویه حمله از مشخصات معلوم جریان آزاد می باشند. بنابراین دیگر کمیت های بی بعد جریان از این مقادیر، قابل تعیین خواهند بود. فشار و چگالی بی بعد نیز برابر با یک فرض شده و بردارهای سرعت بصورت زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{aligned} \rho_\infty &= 1 \\ P_\infty &= 1 \\ \rho u_\infty &= M_\infty \sqrt{\gamma} \cos \alpha \\ \rho v_\infty &= M_\infty \sqrt{\gamma} \sin \alpha \end{aligned} \quad (35)$$

#### شرایط مرزی

شرایط مرزی در این تحقیق مستقیماً بر روی نقاط دایره بیرونی اعمال گردیده است. در این حالت از شرایط مرزی مبتنی بر متغیرهای ریمان استفاده شده است.

شرط مرزی مورد استفاده بر روی سطوح جامد، شرط دیواره صلب است؛ چرا که در جریان غیرلزج، بر روی دیواره شرط لغزش وجود دارد. در این حالت شار نسی از دیواره برای کلیه کمیت های بقایی صفر است. چنانچه مرز ثابت باشد، سرعت عمودی جریان بر روی مرز صفر بوده و چنانچه مرز متحرک باشد، سرعت عمودی جریان با مولفه عمودی سرعت مرز برابر خواهد بود.

#### نتایج و بحث

در این تحقیق بمنظور کارایی روش ارائه شده و دقت الگوریتم مورد نظر، نتایج در دو بخش ارائه می شود. ابتدا معادلات جریان در حالت دائم (ایرفویل بدون نوسان) پیرامون ایرفویل NACA0012 در رژیم های مختلف جریان شامل زیر صوت، گذر

خواهد بود. سایر مشخصات هندسی شبکه، بر حسب حجم و سطح قابل استخراج می باشند. بدین ترتیب می توان با محاسبه دقیق پارامترهای هندسی حجم و سطح هر حجم کنترل، قوانین بقای هندسی را رعایت نمود که البته این مسأله باید مستقل از روش عددی باشد.

با توجه به الگوریتم ضمنی دوزمانه به کار رفته در این تحقیق برای حل معادلات جریان غیر دائم، و بمنظور ارضاء قوانین بقاء هندسی و تصحیح اثر جابه جایی که در هر مرحله زمانی حرکت جسم باید در معادلات اعمال گردد، در اینجا از یک الگوریتم ضمنی استفاده شده است که در ادامه به آن پرداخته شده است.

محاسبه مساحت المان ها در معادله (۲۰) را می توان از مختصات جدید نقاط استفاده نمود و آنرا بصورت دقیق محاسبه کرد. از آنجا که حرکت شبکه بصورت تقریب در فرآیند حل وارد می شود این کار می تواند باعث ایجاد خطاهایی در فرآیند شبیه سازی شود. برای پرهیز از ایجاد چنین خطاهایی در شبیه سازی های غیردائم، قوانین بقای هندسی، در کنار معادلات حاکم باید در نظر گرفته شده و ارضاء شوند. برای ارضاء قانون بقای حجم از معادله زیر در حالت دوبعدی استفاده شده است.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} dA + \oint_{\Omega} V_m \cdot n \, d\Omega = 0 \quad (30)$$

که در اینجا  $A$  مساحت سطح کنترل  $(\Omega)$  و  $V_m$  سرعت بر روی سطوح حجم کنترل و  $n$  بردار عمود بر سطح می باشد. انتگرال گیری از معادله فوق باید با استفاده از الگوریتمی که برای حل معادلات جریان استفاده می شود، انجام شود. با اعمال الگوریتم انتگرال گیری ضمنی مرتبه دوم مورد استفاده در این تحقیق معادله فوق بصورت زیر درمی آید.

$$\frac{3A_i^{n+1} - 4A_i^n + A_i^{n-1}}{2\Delta t} - V_i^{n+1} = 0 \quad (31)$$

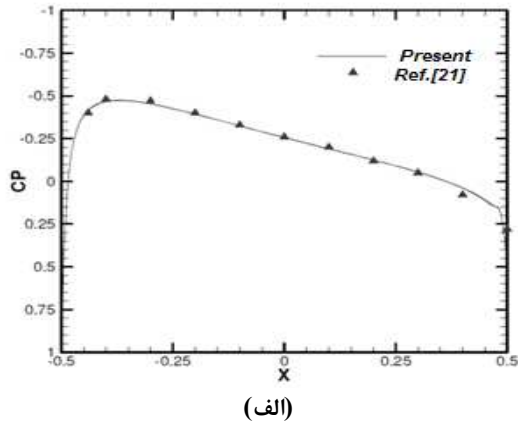
که در آن

$$V_i^{n+1} = \sum u_{mj}^{n+1} \Delta y_j^{n+1} - v_{mj}^{n+1} \Delta x_j^{n+1} \quad (32)$$

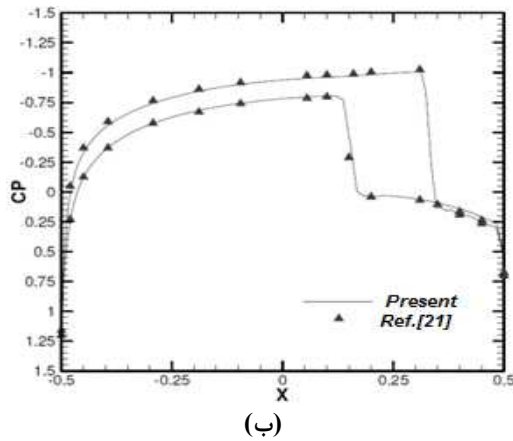
و بدین ترتیب

$$A_i^{n+1} = \frac{4A_i^n - A_i^{n-1} + 2\Delta t V_i^{n+1}}{3} \quad (33)$$

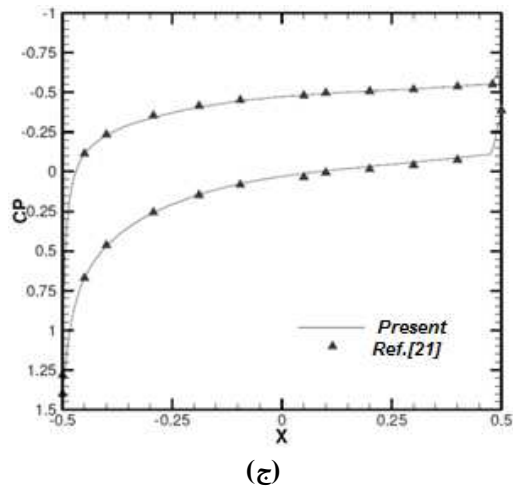
کاملاً مشخص است که هرچه از جسم دورتر و به مرز دایروی نزدیکتر می شویم شبکه درشت تر می شود.



(الف)



(ب)

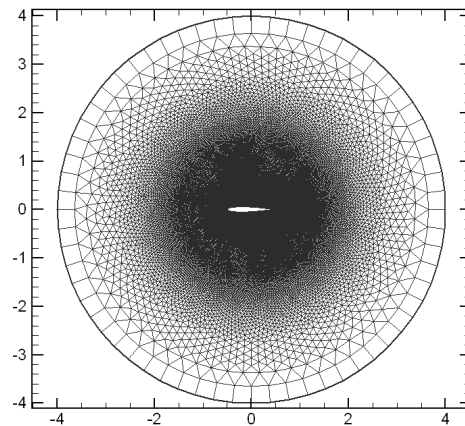


(ج)

شکل ۱۱- توزیع فشار روی ایرفویل در رژیم‌های مختلف جریان و مقایسه نتایج حاصله با نتایج موجود در مرجع [۲۱]

صوت و مافوق صوت، حل شده و در بخش دوم، جریان غیردائم پیرامون ایرفویل نوسانی در مدل‌های CT1، CT5 و CT6 مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. سپس نتایج حاصل با نتایج تجربی و عددی موجود مقایسه شده است.

در شکل (۱۰) شبکه مورد استفاده در این تحقیق نمایش داده شده است. این شبکه شامل ۶۴ المان چهارگوش و ۶۹۶۶۴ المان مثلثی می‌باشد. تعداد نقاط بر روی جسم نیز ۱۵۰ بوده و شعاع دایره مرز خارجی چهار برابر وتر جسم در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است که اطلاعات ارائه شده پس از بررسی عدم وابستگی نتایج به تعداد شبکه ارائه شده است. برای مثال در دو شبکه ریز و درشت‌تر از مقدار اشاره شده، به ترتیب تعداد ۳۲ و ۹۶ نقطه بر روی مرز بیرونی و تعداد ۱۰۰ و ۲۰۰ نقطه بر روی ایرفویل در نظر گرفته شده بود.



شکل ۱۰- کل میدان مورد نظر (مبدأ مختصات نقطه (۰,۰) می باشد)

### الف) نتایج عددی جریان دائم

برای این حالت، جریان حول ایرفویل NACA0012 در سه رژیم متفاوت ماخ ۰/۵ تحت زاویه حمله صفر، ماخ ۰/۸۵ و زاویه حمله یک و ماخ ۱/۲ با زاویه حمله هفت درجه در نظر گرفته شده است. بمنظور تحلیل نتایج، منحنی تغییرات ضریب فشار در طول ایرفویل در شکل‌های (۱۱- الف، ب و ج) رسم شده اند که نتایج موجود با نتایج موجود در مرجع [۲۱] مقایسه شده است و نشان از دقت بالای الگوریتم ارائه شده در این تحقیق می‌باشد. لازم به ذکر است که بدلیل تشکیل شوک پیرامون ایرفویل، شبکه پیرامون ایرفویل بمنظور تسخیر شوک به حد کافی ریز در نظر گرفته شده است. که این ویژگی در شکل (۱۰)

این تحقیق معادلات اوپلر می باشد که اثرات لزجت در نتایج در نظر گرفته نشده است.

با دقت در ماکزیمم دامنه نوسانات در سه مدل اخیر، مشاهده می شود که، این مقدار مربوط به مدل CT1 و برابر با ۵/۳ درجه می باشد. با یادآوری اینکه تعداد نقاط در نظر گرفته شده بر روی لایه تغییر شکل پذیر برابر با ۶۴ نقطه بوده و بدین ترتیب فاصله هر نقطه از هم ۵/۶۲۵ درجه می گردد، لذا بنظر می رسد که در مثال های حل شده، ماکزیمم دامنه تغییر شکل در المان ها که برابر با ۱۱/۲۵ درجه می باشد به حد مورد نیاز جهت انجام فرایند اصلاح شماره المان ها نرسیده است. بعبارت دیگر و در بدترین حالت (بیشترین دامنه نوسان) بدون آنکه نیازی به اصلاح شماره المان ها در لایه تغییر شکل پذیر باشد، المان ها فقط دچار کشیدگی شده اند. در این قسمت و بمنظور نمایش اینکه تغییر در شماره المان ها در لایه تغییر شکل پذیر تاثیری بر روی جواب ها ندارد، مثال زیر ارائه می گردد.

در این آزمایش نیز میدان حل شامل ایرفویل NACA0012 می باشد که بین زوایای ۱۲- تا ۱۲+ درجه نوسان می کند، بدین ترتیب عملیات اصلاح شماره المان ها با توجه به ماکزیمم دامنه تغییر شکل در المان ها که برابر با ۱۱/۲۵ درجه می باشد، انجام می پذیرد. در این وضعیت از شبکه متحرک به دو صورت اجرا گرفته شد. اول آنکه مطابق معمول هنگامی که دامنه تغییر شکل در المان ها به ۱۱/۲۵ درجه برسد فرایند اصلاح شماره المان ها انجام شود و در حالت دوم، بدون آنکه در زاویه مزبور فرایند اصلاح نقاط صورت پذیرد، ایرفویل تا میزان دامنه ۱۲ درجه نوسان نماید. از آنجا که برای این مثال حالت استاندارد یافت نشد، شرایط جریان بصورت زیر در نظر گرفته شد.

$$M_{\infty} = 0.5, \quad \alpha_m = 0.0, \\ \alpha_0 = 12.0, \quad k = 0.09$$

شایان ذکر است بدلیل آنکه هر دو حالت در یک شرایط جریانی مقایسه می شوند، تغییر در شرایط جریانی تاثیری بر نتیجه مورد نظر ندارد. بمنظور مقایسه این دو حالت نمودار تغییرات ضریب نیروی قائم بر حسب زاویه حمله برای هر دو حالت رسم شده و در شکل (۱۳) ارائه شده است. همانگونه که مشاهده می شود در فرایند اصلاح مجدد شماره المان ها و بدون نیاز به هیچگونه میان یابی می توان به جواب های مطلوب دست یافت.

$$(الف): M_{\infty} = 0.5, \alpha = 0^{\circ}$$

$$(ب): M_{\infty} = 0.85, \alpha = 1^{\circ}$$

$$(ج): M_{\infty} = 1.2, \alpha = 7^{\circ}$$

### (ب) نتایج عددی جریان غیر دائم

در این بخش به منظور نشان دادن دقت، کارایی و سرعت الگوریتم استفاده شده در این تحقیق، جریان غیردائم حول مدل های CT1، CT5 و CT6 مورد بررسی قرار گرفته اند.

در مدل های اخیر حرکت نوسانی ایرفویل که حول نقطه یک چهارم وتر صورت گرفته، از نوع نوسان حول محور تاب بوده و تغییرات زاویه ای حمله نسبت به زمان بصورت زیر می باشد.

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t) \quad (36)$$

که در آن  $\alpha_m$  زاویه حمله متوسط،  $\alpha_0$  دامنه ی نوسانات تاب و  $\omega$  سرعت زاویه ای حرکت نوسانی ایرفویل می باشد که با فرکانس کاسته  $K$  دارای رابطه ی زیر است (  $c$  طول وتر ایرفویل و  $U_{\infty}$  سرعت جریان آزاد می باشد).

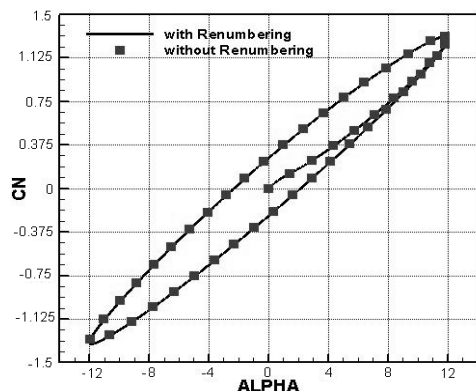
$$k = \frac{\omega c}{2U_{\infty}} \quad (37)$$

پارامترهای جریانی در سه مدل اخیر در جدول (۱) مشاهده می شود.

جدول ۱- پارامترهای جریانی در سه مدل ایرفویل نوسانی

Case	Ma	$\alpha_m$	$\alpha_0$	k
CT1	0.6	2.89	2.41	0.0808
CT5	0.755	0.016	2.51	0.0814
CT6	0.796	0.0	1.01	0.0202

در شکل های ۱۲ (الف تا ج) حلقه تغییرات نیروی قائم نسبت به زاویه حمله برای دو شبکه ریز و درشت با نتایج موجود در مرجع [۲۲] مقایسه شده و تطابق بسیار خوب نتایج با داده های مرجع اخیر بخوبی مشاهده می شود. لازم به ذکر است که درصد اختلاف جزئی که در شکل های (الف و ب) با نتایج موجود در مرجع [۲۲] می تواند ناشی از عدم انطباق شرایط اولیه و محیطی آزمایش تجربی و شبیه سازی عددی باشد نه الگوریتم ارائه شده. همچنین معادلات به کار رفته در



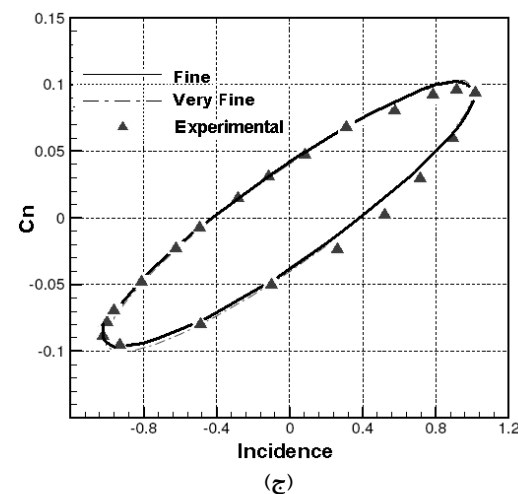
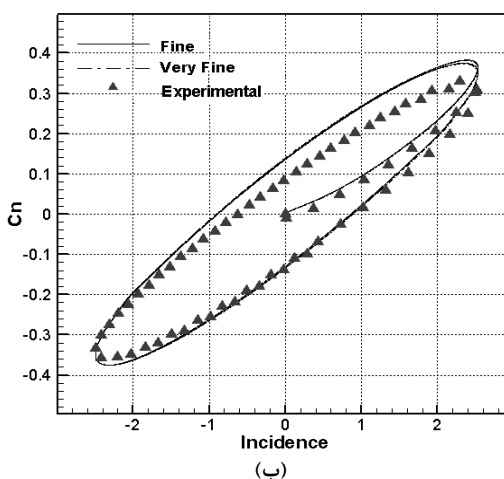
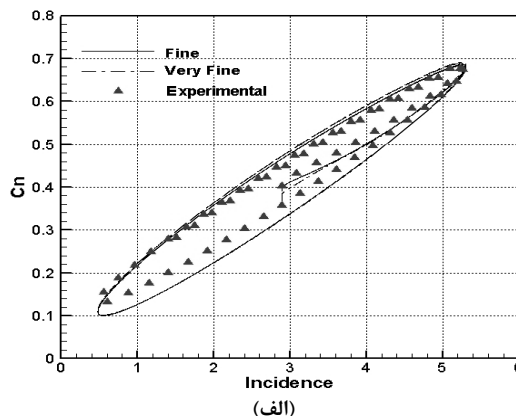
شکل ۱۳- مقایسه حلقه ضریب نیروی قائم به زاویه حمله در دو حالت با اصلاح شماره المان‌ها در لایه تغییر شکل پذیر و بدون آن

### نتیجه گیری

در این تحقیق الگوریتمی ساده و بهبود یافته جهت مدلسازی حرکات نوسانی یا دورانی جسم داخل میدان ارائه شد. از ویژگی‌های مهم شبکه هیبریدی مورد استفاده در این تحقیق می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. اول، تغییر شکل المان‌ها تنها در یک لایه صورت می‌پذیرد که در این لایه نیز اگر کیفیت المان‌ها از دست برود تنها با یک شماره‌گذاری مجدد کیفیت آنها به حالت اول باز می‌گردد. دوم، تعداد نقاط و المان‌ها در کل میدان ثابت باقی می‌ماند. سوم، بدلیل آنکه در حین حرکت جسم، نقطه‌ای جابه‌جا و یا اضافه و کم نمی‌گردد، به میان‌یابی اطلاعات نیز نیازی نمی‌باشد. در این زمینه و با تغییر المان‌های مثلثی در لایه تغییر شکل پذیر به المان‌های چهارضلعی، کارایی حرکت شبکه در مقایسه با مرجع [۱] دوچندان گردید.

علاوه بر این، معادلات دو بعدی، تراکم‌پذیر و گذرای اویلر نیز بر روی شبکه‌ای هیبریدی و با استفاده از روش حجم کنترل بر مبنای المان محدود گسسته شد و با ارائه تکنیکی جدید در ساختار داده‌های روش جیمسون، میدان مورد نظر حل گردید. بدین ترتیب و با توجه به عدم نیاز به ساختار اطلاعاتی مرسوم این روش که مبتنی بر اطلاعات المان‌های همسایه است، ساختار داده‌ای شبکه در حد بسیاری ساده گردید که ویژگی بارز این امر در حل میدان‌های سه‌بعدی بیشتر نمایان می‌شود.

لازم به ذکر است که در مقایسه با مرجع [۱]، حل یک میدان دوبعدی با استفاده از مرجع [۱] حدود ۸ ساعت و در برنامه حاضر در حد ۱۰ دقیقه می‌باشد.



شکل ۱۲- حلقه ضریب نیروی قائم به زاویه حمله برای مدل‌های غیردائم الف) CT1، ب) CT5 و ج) CT6 و مقایسه نتایج حاصله با نتایج موجود در مرجع [۲۲]

Journal, Vol.38, No. 11, November 2000.

در انتها و با حل چند نمونه، کیفیت روش در هر دو زمینه شبکه و متد حل، به اثبات رسید.

- [5] Kallinderis Y., Khawaja A., McMorris H., "Hybrid prismatic/tetrahedral grid generation for Complex geometries", AIAA Journal, 1996;34:2918.

توسعه الگوریتم ارائه شده در این تحقیق در مسائل سه بعدی توسط مولفین صورت گرفته و بزودی ارائه خواهد گردید.

- [6] Zhang L. P., Wang Z. J., "A Block LU-SGS implicit dual time-stepping algorithm for hybrid dynamic meshes", Computers & Fluids 33, pp. 891-916, 2004.

پی نوشت

- [7] Arathi K. Gopinath, Antony Jameson., "Time Spectral Method for Periodic Unsteady Computations over Two- and Three-Dimensional Bodies", 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 10-13, 2005 Reno, Nevada.

- 1 Hybrid
- 2 Control Volume based Finite Element Method (CVFEM)
- 3 Discretization
- 4 Finite Difference
- 5 Finite Element
- 6 Control Volume
- 7 Spectral
- 8 Edge Based
- 9 Cell Center
- 10 Cell Vertex
- 11 Contravariant Velocities
- 12 Cell Based
- 13 Control Volume based Finite Element Method with Edge Based Data Structure
- 14 Geometric Conservation Law
- 15 Surface Conservation Law
- 16 Volume Conservation Law

- [8] Yen Liu, Marcel Vinokur, Z.J. Wang., "Spectral difference method for unstructured grids I: Basic formulation", Elsevier, Journal of Computational Physics, Volume 216, Issue 2, 10 August 2006, Pages 780-801

- [9] R.C Swanson, Eli Turkel; "On central-difference and upwind schemes", Elsevier, Journal of Computational Physics, Volume 101, Issue 2, August 1992, Pages 292-306.

- [10] Eli Turkel; "Improving the accuracy of central difference schemes"; 11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics Lecture Notes in Physics, 1989, Volume 323/1989, 586-591

منابع و مراجع

- [11] Jameson A., Schmidt W. and Turkel E., "Numerical solution of the Euler equations by finite Volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes", AIAA Paper 81-1259, 1981.

- [1] Mirsajedi S.M., Karimian S.M.H., Mani M., "A Multizone Moving Mesh Algorithm for Simulation of Flow Around a Rigid Body With Arbitrary Motion", ASME Journal of Fluids Engineering, March 2006, Vol. 128, pp297-304.

- [۱۲] Jameson A. and Mavriplis D., "Finite Volume solution of the two dimensional Euler equation on a regular triangular mesh", AIAA Journal, Vol. 24, NO.4, April 1986.

- [2] Batina J. T., "Unsteady Euler airfoil solutions Using unstructured dynamic meshes", AIAA Journal, Vol. 28, No. 8, 1990, pp. 1381-1388.

- [۱۳] Tahmasbi V., "3D flow Simulation around a Single Body in General Motion", MS project, Amirkabir University of Technology, Spring 2010.

- [3] Steger J. L., Dougherty F. C., and Benek J. A., "A Chimera grid scheme", advances in grid generation, edited by K. N. Ghia and U. Ghia, FED-Vol. 5, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1983.

- [14] Hadidoolabi M., and Rabani R., "Surveying of Speed and Accuracy of Central Discretization and Upwind Algorithms in Unsteady Flows with moving Boundary", The 11th Iranian Aerospace

- [4] Nakahashi K., Togashi F. and Sharov D., "Intergrid-boundary definition method for overset Unstructured grid approach", AIAA



- Method for Flow at All Speeds”, AIAA J., 33(11), pp. 1611-1618.
- [19] Ilinca A. and Ilinca C., “Geometric conservation laws for three-dimensional unstructured moving grid”, CFD 98.
- [20] Zhang H., Reggio M., Trepanier J. Y. and Camarero R., “Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD schemes”,
- [21] Test cases for inviscid flow field methods, AGARD advisory report No 211.
- [22] Compendium of Unsteady Aerodynamic Measurements, AGARD, R-702, 1982.
- Society Conference - Shahid Sattari Aeronautical Uni. Sci. & Tech., Tehran- Iran- Feb-2012
- R. C. Swanson, E. Turkel, 1985, "A Multistage Time Stepping Scheme for the Navier- Stokes Equations", AIAA Paper 85-0055.
- [15] Jahangirian A., and Hadidoolabi M., “An implicit solution of the unsteady Navier-Stokes equations on unstructured moving grids”, 24th International Congress of the Aeronautical Science, 2004.
- [16] H. Alisadeghi, S. M. H. Karimian, and A. R. Jahangirian., “Simulation of 2D turbulent flows on hybrid dynamic meshes”, The 6th Iranian Aerospace Society Conference- Feb. 2007- K.N.Toosi University of Technology.
- [17] Gaitonde, A. L., and Fiddes, S. P., 1995, “A Comparison of a Cell-Centre Method and a Cell-Vertex Method for the Solution of Two-dimensional Unsteady Euler Equations on a Moving Grid”, Am. Antiq., 209, pp. 203–213.
- [18] Karimian, S. M. H., and Schneider, G. E., 1995, “Pressure-Based Control Volume Finite-Element