

طراحی خودخلبان با استفاده از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_{∞}

معافی مدنی، سید محمد جواد^۱، محمد زمان، ایمان^{۲*}

۱- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مجتمع دانشگاهی برق و الکترونیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

۲- استادیار، مجتمع دانشگاهی برق و الکترونیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

(دریافت مقاله: ۹۰/۰۲/۰۵ تاریخ پذیرش: ۹۰/۱۲/۱۵)

چکیده

در این مقاله خودخلبان مقاوم برای یک رهگیر زمین به هوا برد و ارتفاع کوتاه بدون نیاز به جدول بندی بهره که تضمین کننده پایداری در تمام پوش پروازی رهگیر باشد؛ طراحی شده است. ابتدا با استفاده از ابزار v-gap Metric نقطه کار مناسبی که بتوان با طراحی کنترل کننده مقاوم در آن نقطه، پایداری سیستم حلقه بسته را در تمام پوش پروازی تضمین نمود، انتخاب می شود. سپس دینامیک غیرخطی رهگیر در نقطه انتخاب شده خطی شده و در نهایت کنترل کننده مقاوم شکل دهی حلقه H_{∞} طراحی شده است. همچنین الگوریتمی به منظور کاهش پیچیدگی طراحی وزن های شکل دهی حلقه که توصیف کننده کارایی می باشد، ارائه گردیده که با بهینه سازی این وزن ها حاشیه پایداری مقاوم سیستم را به بیشینه محلی می رساند. نشان داده می شود که حاشیه پایداری مقاوم حاصل شده می تواند پایداری رهگیر را برای تمام پوش پروازی تامین نماید.

واژه های کلیدی: خودخلبان مقاوم، شکل دهی حلقه H_{∞} ، کنترل کننده استاتیکی، بهینه سازی وزن ها، v-gap metric

مقدمه

طراحی خودخلبان رهگیرها از دیرباز یکی از مسایل مورد توجه محققین بوده که علت آن پیچیدگی مساله به خاطر وجود نامعینی، دینامیک غیرخطی و پارامترهای متغیر با زمان در آن می باشد [۱]-[۳]. در رهگیرهای امروزی تنها داشتن قابلیت مانور بالا و یا اجرای سریع دستورات ورودی همزمان با حفظ پایداری کافی نیست. بلکه این رهگیرها باید توانایی خود را در مسیرهای مختلف پروازی حفظ کرده و در برابر تغییرات در پارامترهای سیستم مقاومت خوبی داشته باشند. تغییر در جرم، وجود نامعینی در نمودار سوخت و اثرات نامعینی در سطوح بالکها باعث پدید آمدن رفتارهای پیش بینی نشده و غیرخطی در دینامیک رهگیر می شود.

معمولا در طراحی کنترل کننده برای سیستم های غیرخطی و متغیر با پارامتر و به خصوص سیستم های هوافضایی از جدول بندی بهره استفاده می شود [۳]. مهمترین ویژگی این روش تبدیل مدل غیرخطی متغیر با پارامتر در اطراف نقاط کار به چند مدل خطی محلی است و سپس با فیدبک از شتاب و سرعت زاویه ای رهگیر و با استفاده از کنترل کننده های خطی،

حلقه کنترل طراحی می شود. در نتیجه با این ایده می توان از ابزارهای کنترل خطی که ابزارهای بسیار قدرتمندی هستند، در طراحی کنترل کننده برای سیستم خطی بهره برد. کنترل کننده های مذکور می توانند کارایی و پایداری را در اطراف نقطه کار تضمین کرده و با دور شدن از آن، عملکرد این کنترل کننده کاهش می یابد. این امر به خاطر آن است که مدل خطی رهگیر با فرض تغییرات کوچک مدل غیرخطی در اطراف نقطه تعادل تقریب زده می شود و اگر رهگیر به دلیل مانور و یا افزایش سرعت، دچار تغییرات در پارامترهای جدول بندی بهره شود، دیگر مدل خطی تقریب دقیقی از مدل غیرخطی نخواهد بود و در نتیجه کنترل کننده کلاسیک طراحی شده برای مدل خطی قادر به تامین کارایی و پایداری مدل واقعی نمی باشد. لذا با استفاده از روش های مختلف درون یابی بین کنترل کننده های خطی و سوئیچینگ بین آن ها کنترل کننده مناسب فراگیر برای سیستم غیرخطی طراحی شود [۴]. ولیکن در حالت کلی و پس از درون یابی بین کنترل کننده ها در نقاط کار مختلف، نمی توان پایداری کلی سیستم غیرخطی جدول بندی شده را تضمین نمود [۴]. هرچند جدول بندی بر اساس روش های طراحی

LPV و شبه LPV تضمین کننده پایداری هستند اما دارای پیچیدگی زیاد در طراحی می باشند و منجر به کنترل کننده های محافظه کار خواهند شد [۵]. لذا اگر بتوان خودخلبان را طوری طراحی نمود تا بدون نیاز به جدول بندی بهره و تنها با استفاده از یک کنترل کننده خطی مقاوم بتواند در تمام پوش پروازی عملکرد مناسبی داشته باشد و پایداری را تضمین نماید، می توان از مشکلات استفاده از جدول بندی بهره رهایی یافته و پایداری سیستم حلقه بسته را نیز که یکی از موارد مهم در طراحی خودخلبان می باشد، تضمین نمود. برای نیل به این هدف، بایستی ابتدا نقطه کار مناسب به منظور خطی سازی مدل غیرخطی انتخاب شده و سپس کنترل کننده مقاوم طوری طراحی شود تا حاشیه پایداری سیستم، بیشینه باشد. در این حالت کنترل کننده مقاوم قادر به تضمین پایداری سیستم حلقه بسته خواهد بود.

روش های مختلفی برای طراحی کنترل کننده مقاوم ارائه شده است. از آن جایی که در نظریه کنترل H_{∞} ملاحظات قوام و کارایی به طور همزمان در نظر گرفته می شود، استفاده از این نظریه در طراحی خودخلبان رهگیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۶]-[۷]. در اواخر دهه ۸۰ و اوایل دهه ۹۰ با استفاده از نظریه کنترل H_{∞} روشی به نام روش شکل دهی حلقه H_{∞} ارائه شد که در این روش، نامعینی در فرکانس های پایین و بالا به راحتی مدل شده و بر خلاف روش سنتز μ و ترکیب توابع حساسیت دیگر نیازی به طراحی وزن های پیچیده برای توصیف نامعینی نیست [۸]-[۹]. این روش برای سیستم های ناکمینه فاز، سیستم های چندمتغیره و سیستم های با تزویج بالا بین محورهای مختلف نیز معتبر بوده و در کاربردهای متنوع به خصوص در سیستم های متغیر با پارامتر بسیار مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰]-[۱۳]. ولیکن در این روش درجه کنترل کننده نهایی بالا بوده و برابر مجموع درجه پلانت نامی و درجه وزن های شکل دهی حلقه می باشد که پیاده سازی آن را با مشکل مواجه کرده و کاربرد آن را در سیستم های پروازی نامطلوب می سازد. برای حل این مشکل، تحقیقات فراوان پیرامون طراحی کنترل کننده های فیدبک خروجی H_{∞} با درجه پایین و یا بدون درجه (استاتیکی) که قادر باشند کارایی خوب، پایداری و همچنین یک سطح مشخصی از قوام را برای سیستم به دست آورند، انجام شده است [۱۴]-[۱۹]. در [۱۵] روشی برای طراحی کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_{∞} ارائه

شده که شرایط وجود کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_{∞} بر اساس وجود جواب برای دو نامساوی ماتریسی خطی می باشد. در این روش، کنترل کننده طراحی شده از جنس بهره خالص بوده و درجه کنترل کننده نهایی تنها برابر درجه وزن های شکل دهی حلقه می باشد که بسیار درجه پایینی است و لذا این روش در طراحی کنترل کننده ی سیستم های پروازی مورد توجه قرار گرفته است [۱۷] و [۱۹]. ولیکن در این روش ابتدا باید پلانت نامی توسط وزن های مناسب در حوزه فرکانس، شکل دهی شود، به گونه ای که پلانت شکل دهی شده تمامی معیارهای کارایی را برآورده سازد و پس از طراحی وزن های شکل دهی حلقه، کنترل کننده مقاوم برای پلانت شکل دهی شده طراحی می گردد. اگر حاشیه پایداری مقاوم حاصل شده به اندازه کافی بزرگ نبود، باید طراحی وزن های شکل دهی حلقه دوباره تکرار گردد. علاوه بر آن در صورت کوچک بودن حاشیه پایداری مقاوم، طراح باید به اندازه کافی تجربه داشته باشد تا بتواند تشخیص دهد چه عاملی در وزن های شکل دهی حلقه باعث کاهش حاشیه پایداری مقاوم شده است و سپس بتواند این عامل را بدون آن که کارایی خراب شود اصلاح نماید. این امر کاری پیچیده و زمان بر بوده و ممکن است طراح مجبور باشد تا چندین بار طراحی وزن ها را انجام دهد و علاوه بر آن ممکن است به کارایی و یا حاشیه پایداری مقاوم مطلوب نرسد. در مرجع [۱۱] از الگوریتم PSO، در مرجع [۲۰] یک مساله بهینه سازی و در مرجع [۲۱] از الگوریتم ژنتیک برای آسان سازی طراحی وزن ها در شکل دهی حلقه استاندارد استفاده شده است. ولیکن تا به حال روشی برای طراحی سیستماتیک وزن ها در روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_{∞} ارائه نشده است.

در این مقاله خودخلبان مقاوم با ترکیب الگوریتم بهینه سازی بیان شده در مرجع [۲۰] با کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_{∞} ، طراحی شده و مشکل درجه بالای کنترل کننده مقاوم و پیچیدگی طراحی وزن ها به صورت همزمان برطرف شده است. توسط این الگوریتم وزن های شکل دهی حلقه به صورت همزمان با کنترل کننده استاتیکی مقاوم طراحی شده و همزمان حاشیه پایداری مقاوم سیستم نیز به بهینه محلی می رسد. با استفاده از این ایده کنترل کننده مقاوم با درجه پایین در یک نقطه کار مشخص طراحی می گردد. همان طور که بیان شد به منظور جلوگیری از

بی‌نهایت تابع تبدیل حلقه‌بسته از اغتشاش (w_2, w_1) به خروجی (z_2, z_1) مطابق رابطه زیر کمینه گردد [۲۲]:

$$\min_{\text{stab } k_\infty} \left\| \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right\| \rightarrow \left\| \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \min_{\text{stab } k_\infty} \left\| \begin{bmatrix} k_\infty \\ I \end{bmatrix} (I - G_s k_\infty)^{-1} [I \quad G_s] \right\|_\infty < \gamma \quad (2)$$

عدد γ در رابطه فوق معکوس حاشیه‌پایداری مقاوم سیستم حلقه‌بسته می‌باشد. پلانیت شکل‌دهی شده G_s را می‌توان توسط ضرایب نرمالیزه شده از سمت چپ نسبت به هم اول طبق رابطه زیر توصیف کرد [۲۳]:

$$G_s = \tilde{N}\tilde{M}^{-1} \quad (3)$$

به‌جای اعمال نامعینی روی پلانیت شکل‌دهی شده G_s ، می‌توان نامعینی را روی ضرایب نرمالیزه شده از سمت چپ نسبت به هم اول اعمال کرد. نامعینی روی ضریب \tilde{N} معادل نامعینی ضرب‌شونده و نامعینی روی ضریب \tilde{M} معادل نامعینی ضرب‌شونده معکوس می‌باشد [۲۲]. از آن‌جایی که مدل نامعینی ضرب‌شونده، پایداری مقاوم را در برابر اغتشاشات فرکانس بالا تضمین کرده و مدل نامعینی ضرب‌شونده معکوس، پایداری مقاوم را در برابر اغتشاشات فرکانس پایین تضمین می‌کند می‌توان نتیجه گرفت با استفاده از ضرایب نرمالیزه شده از سمت چپ نسبت به هم اول پلانیت شکل‌دهی شده G_s ، می‌توان پایداری مقاوم را در تمام محدوده فرکانسی تضمین کرد [۲۲]. با استفاده از تحقق فضای حالت پلانیت شکل‌دهی شده G_s می‌توان عبارتی برای توصیف ضرایب \tilde{N}, \tilde{M} به‌دست آورد. تحقق فضای حالت پلانیت شکل‌دهی شده G_s را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G_s = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (4)$$

که در آن $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times n_u}, C \in R^{n_y \times n}, D \in R^{n_y \times n_u}$ می‌باشند. ضرایب نرمالیزه شده از چپ نسبت به هم اول پلانیت G_s را بصورت زیر می‌توان نوشت [۲۳]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+LC & B+LD & L \\ E^{-1/2}C & E^{-1/2}D & E^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

که در آن:

$$L = -(BD^T + ZC^T)E^{-1} \quad (6)$$

$$E = I + DD^T \quad (7)$$

جدول‌بندی بهره، این نقطه باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که کنترل‌کننده طراحی شده در آن نقطه، توانایی تامین پایداری در تمام پوش پروازی را داشته باشد. در این مقاله برای انتخاب نقطه کار از ابزار v -gap metric استفاده شده است. این ابزار بیانگر فاصله بین سیستم نامی و سیستم غیر نامی است و نشان داده می‌شود که رابطه مستقیمی با حاشیه‌پایداری مقاوم سیستم نامی دارد. با استفاده از این ابزار می‌توان پایداری سیستم حلقه‌بسته را در تمام مسیر پروازی آزمود. اگر پایداری سیستم حلقه‌بسته تامین نشد آن‌گاه نقطه کار دیگری انتخاب شده و دوباره فرآیند طراحی کنترل‌کننده مقاوم تکرار می‌گردد. این کار تا جایی انجام می‌گردد که پایداری سیستم حلقه‌بسته در تمام مسیر پروازی تضمین شود.

در نهایت با استفاده از شبیه‌سازی شش‌درجه آزادی راستی آزمایشی طراحی صورت پذیرفته است. نشان داده می‌شود ملاحظات عملی در نظر گرفته شده برای رهگیر به‌خوبی رعایت شده و معیارهای کارایی و قوام مورد انتظار به‌دست می‌آید. علاوه بر آن نشان داده می‌شود علی‌رغم ناکمینه‌فاز بودن سیستم رهگیر و محدودیت‌های ناشی از آن روی سرعت و قوام سیستم، الگوریتم بهینه‌سازی ارائه شده قادر خواهد بود با انتخاب مناسب وزن‌ها این محدودیت‌ها را تا حد ممکن کاهش دهد و در ضمن تا حد زیادی از پیچیدگی طراحی وزن‌ها به‌خاطر این موضوع جلوگیری کند.

کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞

در این قسمت به بیان روابط مورد نیاز و روش طراحی کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ پرداخته شده است. در این روش قبل از طراحی کنترل‌کننده استاتیکی مقاوم، بایستی ابتدا پلانیت نامی G با وزن‌های مناسب W_2, W_1 ، شکل‌دهی شود تا پلانیت شکل‌دهی شده G_s تمامی معیارهای کارایی را داشته باشد. پلانیت شکل‌دهی شده G_s بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$G_s = W_2 G W_1 \quad (1)$$

در شکل ۱ دیگرام بلوکی روش شکل‌دهی حلقه H_∞ نشان داده شده است [۲۲]. پس از طراحی وزن‌های شکل‌دهی حلقه W_2, W_1 ، کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ که با k_∞ نمایش داده می‌شود باید به‌گونه‌ای طراحی شود که نُرم

حلقه H_∞ (k_∞) به گونه‌ای که نرم بی‌نهایت تابع تبدیل حلقه‌بسته از اغتشاش به خروجی مطابق رابطه (۱۰) کمینه گردد؛ وجود دارد، اگر $\gamma > 1$ و ماتریس معین مثبت R وجود داشته باشند بطوریکه دو نامساوی زیر را ارضا نمایند [۱۵]:

$$R(A+LC)^T + (A+LC)R < 0 \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} AR+RA^T - \gamma BB^T & RC^T - \gamma BD^T & -LE^{1/2} \\ CR - \gamma BD^T & -\gamma E & E^{1/2} \\ -E^{1/2}L^T & E^{1/2} & -\gamma n_y \end{pmatrix} < 0 \quad (11)$$

که در روابط فوق L از رابطه (۶) به دست می‌آید و z جواب یک معادله جبری ریکاتی (۸) است.

با توجه به قضیه ۱، کنترل کننده استاتیکی با استفاده از لم کران حقیقی به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۵]:

$$k_\infty = \tilde{k}(I + D\tilde{k})^{-1} \quad (12)$$

که در رابطه فوق \tilde{k} با حل نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{k}\tilde{C} + \tilde{C}^T\tilde{k}^T\tilde{B}^T < 0 \quad (13)$$

و ماتریس‌های \tilde{A} ، \tilde{B} ، \tilde{C} در رابطه (۱۴) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} AR+RA^T & 0 & RC^T & -LE^{1/2} \\ 0 & -\gamma n_u & 0 & 0 \\ CR & 0 & -\gamma n_y & E^{1/2} \\ -E^{1/2}L^T & 0 & E^{1/2} & -\gamma n_y \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ I_{n_u} \\ D \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} CR & 0 & 0 & E^{1/2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

و در نهایت کنترل کننده نهایی با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$k_s = W_2 k_\infty W_1 \quad (17)$$

الگوریتم طراحی همزمان وزن‌ها و کنترل کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞

مطابق مطالب بیان شده در بخش قبل، برای طراحی کنترل کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ ابتدا بایستی پلانت نامی توسط وزن‌های مناسب W_2, W_1 شکل‌دهی شده تا معیارهای کارآیی حاصل گردد. اگر بعد از انتخاب وزن‌ها و بعد

و ماتریس z در رابطه (۶) جواب یک معادله جبری ریکاتی زیر می‌باشد:

$$(8)$$

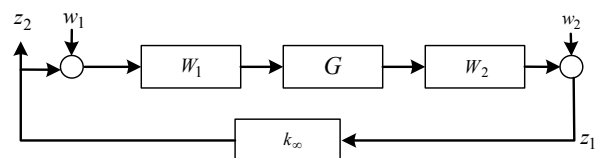
$$(A - BF^{-1}D^T C)Z + Z(A - BF^{-1}D^T C)^T - ZC^T E^{-1} CZ + BF^{-1} B^T = 0$$

که در رابطه فوق $F = I + D^T D$ می‌باشد.

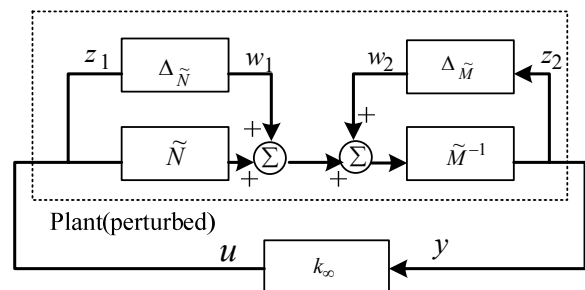
با استفاده از ضرایب نرمالیزه شده از سمت چپ نسبت به هم اول پلانت شکل‌دهی شده G_s ، سیستم حلقه بسته به صورت شکل ۲ می‌باشد. با استفاده از ویژگی‌های ضرایب \tilde{N}, \tilde{M} می‌توان نشان داد رابطه (۲) معادل رابطه زیر است [۲۳]:

$$\min_{stab k_\infty} \begin{pmatrix} \|w_1\| \\ \|w_2\| \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \end{pmatrix} = \min_{stab k_\infty} \left\| \begin{bmatrix} k_\infty \\ I \end{bmatrix} (I - G_s k_\infty)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\| < \gamma \quad (9)$$

با حل روابط (۲) یا (۱۰) با استفاده از معادلات جبری ریکاتی، می‌توان کنترل کننده شکل‌دهی حلقه H_∞ استاندارد را طراحی کرد که درجه این کنترل کننده برابر درجه پلانت شکل‌دهی شده G_s می‌باشد [۲۳]. اما با حل این روابط با استفاده از ویژگی‌های نامساوی ماتریسی خطی، می‌توان درجه کنترل کننده را در طول فرآیند طراحی تحت نظارت قرار داد. در مرجع [۱۵] با استفاده از ویژگی‌های نامساوی ماتریسی خطی شرایط لازم برای وجود کنترل کننده استاتیکی (بدون درجه) شکل‌دهی حلقه H_∞ استخراج شده است. قضیه زیر شرایط کافی برای وجود کنترل کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ برای پلانت شکل‌دهی شده G_s را بیان می‌کند.



شکل ۱- دیاگرام بلوکی روش شکل‌دهی حلقه H_∞



شکل ۲- نامعینی روی ضرایب نرمالیزه شده از سمت چپ نسبت به هم اول

قضیه ۱: تحقق فضای حالت پلانت شکل‌دهی شده G_s را مطابق رابطه (۴) در نظر بگیرید. کنترل کننده استاتیکی شکل‌دهی

فرض کنید $\rho(\gamma, R)$ مجموعه تمام $\gamma > 1$ و ماتریس معین متقارن مثبت R است به گونه ای که جواب دو نامساوی ماتریسی (۱۱) و (۱۲) باشند.

مساله بهینه سازی زیر که از ترکیب مساله بهینه سازی مرجع [۲۰] با روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_∞ حاصل شده است را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \varepsilon_{opt}(G_S) \\ \text{such that:} \quad & \\ \exists W_1, W_2 \in \ell H_\infty, \quad & \gamma, R \in \rho(G_S), k_\infty \in \Psi(G_S) \quad (21) \\ \left| \underline{s}(j\omega) \right| < \sigma_i(G_S(j\omega)) < \left| \bar{s}(j\omega) \right| \quad & \forall i, \omega, \end{aligned}$$

که در آن توابع فرکانسی $\underline{s}(j\omega)$ و $\bar{s}(j\omega)$ به گونه ای انتخاب می شوند که بیانگر محدوده مجاز برای حرکت شکل فرکانسی تابع حلقه باز باشد. با انتخاب مناسب این توابع می توان معیارهای کارایی را تعریف کرد. در حقیقت این مساله بیان می کند کنترل کننده استاتیکی k_∞ و وزن های W_2, W_1 را به گونه ای بیابید که حاشیه پایداری مقاوم بهینه گردد و همزمان معیارهای کارایی نیز ارضا گردند. حال این مساله بهینه سازی باید به گونه ای بیان شود که توسط نرم افزار قابل حل باشد. با استفاده از رابطه (۲۰) مساله بهینه سازی (۲۱) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\min \left\| \left[\begin{array}{c} G_S \\ I \end{array} \right] (I - k_\infty G_S)^{-1} \left[\begin{array}{cc} -k_\infty & I \end{array} \right] \right\|_\infty \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{such that:} \quad & \\ \exists W_1, W_2 \in \ell H_\infty, \quad & \gamma, R \in \rho(G_S), k_\infty \in \Psi(G_S) \\ \left| \underline{s}(j\omega) \right| < \sigma_i(G_S(j\omega)) < \left| \bar{s}(j\omega) \right| \quad & \forall i, \omega \end{aligned}$$

با استفاده از روابط (۱) و (۱۸) مساله بهینه سازی فوق را می توان به صورت زیر نوشت [۲۰]:

$$\min \left\| \left[\begin{array}{cc} W_2 & 0 \\ 0 & W_1^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & G \\ I & k_\infty \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I & G \\ k_\infty & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} W_2^{-1} & 0 \\ 0 & W_1 \end{array} \right] \right\|_\infty \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{such that:} \quad & \\ \exists W_1, W_2 \in \ell H_\infty, \quad & \gamma, R \in \rho(G_S), k_\infty \in \Psi(G_S) \\ \left| \underline{s}(j\omega) \right| < \sigma_i(W_2(j\omega)G(j\omega)W_1(j\omega)) < \left| \bar{s}(j\omega) \right| \quad & \forall i, \omega \end{aligned}$$

مساله بهینه سازی فوق را به سادگی با استفاده از روابط ریاضی می توان به صورت زیر بیان کرد:

از حل نامساوی های (۱۱) و (۱۲) عدد γ به دست آمده (معکوس حاشیه پایداری مقاوم) خیلی بزرگ بود باید انتخاب وزن های W_2, W_1 دوباره تکرار شود. در این حالت ابتدا باید عامل کاهش حاشیه در شکل دهی حلقه طراحی مشخص شده و سپس بایستی این عامل را بدون تحت تاثیر قرار دادن کارایی اصلاح کرد تا حاشیه پایداری افزایش یابد. اما درک رابطه بین وزن ها و حاشیه پایداری مقاوم سخت می باشد. در نتیجه ممکن است لازم باشد برای رسیدن به حاشیه پایداری قابل قبول چندین بار فرآیند طراحی وزن های شکل دهی حلقه تکرار شود و علاوه بر آن با قاطعیت نمی توان گفت حاشیه پایداری بهینه حاصل شده است. در این بخش برای حل این مساله و ساده سازی فرآیند انتخاب وزن های شکل دهی حلقه و همچنین بهینه کردن حاشیه پایداری مقاوم، مساله بهینه سازی معرفی می گردد که مبتنی بر مساله بهینه سازی مرجع [۲۰] است. در مرجع [۲۰] این الگوریتم برای طراحی همزمان وزن ها و کنترل کننده شکل دهی حلقه H_∞ ارائه شده است. اما در این جا این مساله بهینه سازی با کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_∞ ترکیب شده و الگوریتمی حاصل می شود که توسط این الگوریتم فرآیند طراحی وزن ها سیستماتیک و ساده شده و حاشیه پایداری مقاوم بهینه می گردد و در نهایت کنترل کننده نهایی دارای درجه پایینی می باشد.

فرض کنید $\Psi(G_S)$ بیانگر مجموعه تمام کنترل کننده هایی است که سیستم فیدبک نشان داده شده بین G_S و k_∞ در شکل (۱) را پایدار داخلی می کنند. یعنی:

$$\Psi(G_S) = \{k_\infty : [G_S, k_\infty] \text{ is internally stable}\} \quad (18)$$

به سادگی می توان نشان داد که حاشیه پایداری مقاوم با رابطه زیر نیز بیان می شود [۲۰]:

$$\varepsilon[G_S, k_\infty] = \left\| \left[\begin{array}{c} G_S \\ I \end{array} \right] (I - k_\infty G_S)^{-1} \left[\begin{array}{cc} -k_\infty & I \end{array} \right] \right\|_\infty^{-1} \quad (19)$$

بنابراین بیشترین مقدار حاشیه پایداری مقاوم به صورت $\varepsilon_{opt}(G_S) = \sup_{k_\infty} \varepsilon[G_S, k_\infty]$ تعریف می شود. همچنین مجموعه ماتریس های قطری با ابعاد $n \times n$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\Lambda_n = \left\{ \text{diag}(x_i) : x_i \in \mathbb{R} \forall i \right\} \quad (20)$$

۱- قرار دهید $\hat{W}_{1,0} = I_n$, $\hat{W}_{2,0} = I_m$, $i = 0$ (۱) بیانگر شماره تکرار الگوریتم می‌باشد). ماتریس‌های همانی، یک انتخاب اولیه برای وزن‌های شکل‌دهی حلقه می‌باشند.

۲- پلانیت شکل‌دهی شده $G_{s,i} = \hat{W}_{2,i} G_i \hat{W}_{1,i}$ را محاسبه کنید. برای پلانیت شکل‌دهی شده $G_{s,i}$ ماتریس $R_i > 0$ و متغیر عددی γ_i را که جواب دو نامساوی (۱۱) و (۱۲) هستند پیدا کنید. اگر این دو نامساوی قابل حل نبودند الگوریتم متوقف می‌شود و دیگر قادر به ادامه نخواهد بود. در غیر این صورت با استفاده از R_i و γ_i به دست آمده کنترل کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ را توسط رابطه (۱۳) و کنترل کننده نهایی k_s را توسط رابطه (۱۸) بیابید. علاوه بر آن حاشیه‌پایداری $\hat{\epsilon}_i = 1/\gamma_i$ را محاسبه کنید. اگر $i > 1$ و در ضمن $\hat{\epsilon}_i$ به اندازه کافی بزرگ بود از برنامه خارج شوید. در غیر این صورت به گام سوم بروید.

۳- مساله بهینه‌سازی شبه‌محدب (۲۷) را در هر فرکانس ω حل کنید. $A_{2\omega}$ ، $A_{1\omega}$ مقادیری از $A_{2\omega}$ و $A_{1\omega}$ هستند که به‌ازای آن می‌نیمم مقدار γ_ω در مساله بهینه‌سازی (۲۷) در هر فرکانس ω حاصل شود.

۴- قرار دهید $i = i + 1$.

۵- ماتریس‌های توابع تبدیل قطری $\hat{W}_{2,i}(s)$, $\hat{W}_{1,i}(s)$ را در ℓH_∞ با منطبق کردن توابع تبدیل می‌نیمم فاز روی مقادیر روی قطر اصلی $(\hat{A}_{1\omega})^{-1/2}$, $(\hat{A}_{2\omega})^{1/2}$ به ترتیب بدست آورید و به گام دوم برگردید. در شکل ۳ نمودار گردشی الگوریتم ارائه شده، نشان داده شده است.

مدل دینامیکی رهگیر

مدل ریاضی بیان شده در این بخش، توصیف کننده دینامیک یک رهگیر آیرودینامیکی TST^۲ زمین به هوا با کنترل دم در سه محور رول، پیچ و یاو می‌باشد. هدف از طراحی خودخلبان آن است که رهگیر مورد نظر بتواند با تغییر زاویه بالک الویتور، رادر و ایلرون $(\delta_e, \delta_r, \delta_a)$ ، دستورات متغیر شتاب در محورهای پیچ و یاو (a_{y_r}, a_{z_r}) را به خوبی تعقیب نموده و علاوه بر آن سرعت زاویه‌ای کانال رول را صفر کند. تابع تبدیل عملگر بالک‌ها بصورت زیر می‌باشند:

$\min \gamma_\omega^2$ at each ω

such that :

$\exists W_1, W_2 \in \ell H_\infty$, $\gamma, R \in \rho(G_s)$, $k_\infty \in \Psi(G_s)$

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & G \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} W_2^* W_2 & 0 \\ 0 & W_1^{-*} W_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G \\ 0 & I \end{bmatrix} \leq \quad (24)$$

$$\gamma_\omega^2 \begin{bmatrix} I & G \\ k_\infty & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} W_2^* W_2 & 0 \\ 0 & W_1^{-*} W_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & G \\ k_\infty & I \end{bmatrix} \forall \omega,$$

$$(b) |\underline{s}(\omega)|^2 (W_1^{-*} W_1^{-1}) < G^* (W_2^* W_2) G < |\bar{s}(\omega)|^2 (W_1^{-*} W_1^{-1}) \forall \omega$$

از آن جایی که وزن‌های W_2, W_1 قطری هستند توابع $W_1^{-*} W_1^{-1}$ و $W_2^* W_2$ نیز قطری بوده که به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$A_{1\omega} = W_1^{-*} W_1^{-1} \in \Lambda_n \quad (25)$$

$$A_{2\omega} = W_2^* W_2 \in \Lambda_m$$

با در اختیار داشتن $\Lambda_{2\omega}$ و $\Lambda_{1\omega}$ می‌توان به سادگی توابع W_2, W_1 را روی ℓH_∞ با منطبق کردن توابع تبدیل می‌نیمم فاز روی قطر اصلی $(\Lambda_{2\omega})^{1/2}$ و $(\Lambda_{1\omega})^{-1/2}$ بدست آورد. با جایگذاری $\Lambda_{2\omega}$ و $\Lambda_{1\omega}$ از رابطه (۲۶) در مساله (۲۵) می‌توان نوشت:

$\min \gamma_\omega^2$ at each ω

such that :

$\exists A_{1\omega} \in \Lambda_n$, $A_{2\omega} \in \Lambda_m$

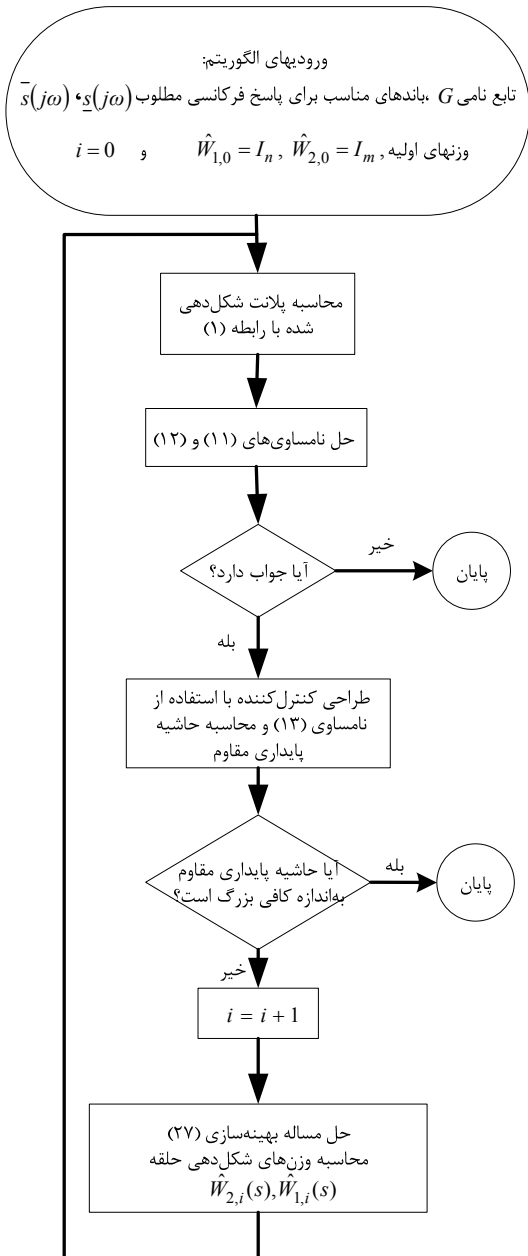
$\gamma, R \in \rho(G_s)$, $k_\infty \in \Psi(G_s)$ (۲۶)

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & G \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A_{2\omega} & 0 \\ 0 & A_{1\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G \\ 0 & I \end{bmatrix} \leq$$

$$\gamma_\omega^2 \begin{bmatrix} I & G \\ k_\infty & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A_{2\omega} & 0 \\ 0 & A_{1\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & G \\ k_\infty & I \end{bmatrix} \forall \omega,$$

$$(b) |\underline{s}(\omega)|^2 (A_{1\omega}) < G^* (A_{2\omega}) G < |\bar{s}(\omega)|^2 (A_{1\omega}) \forall \omega$$

مساله بهینه‌سازی فوق دارای سه متغیر $A_{2\omega}$ و $A_{1\omega}$ و k_∞ می‌باشد و چون این مساله برای تمام متغیرها محدب نیست باید از تکنیکی مشابه روش بازگشتی DK برای حل آن استفاده کرد. ورودی‌های این الگوریتم پلانیت نامی G و توابع فرکانسی $\bar{s}(j\omega)$ و $\underline{s}(j\omega)$ هستند که بیانگر محدوده مجاز برای پاسخ فرکانسی تابع حلقه‌باز شکل‌دهی شده می‌باشد. مراحل الگوریتم پیشنهادی به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۳- نمودار گردش الگوریتم بهینه سازی ارائه شده

همچنین تابع تبدیل کانال پیچ بصورت زیر می باشد [۲۴]:

$$\frac{q_\delta(s)}{\delta_\delta(s)} = \frac{M_{\delta\delta}s + (Z_{\delta\delta}M_\alpha - Z_\alpha M_\delta)}{s^2 - (M_q + Z_\alpha/V)s + ((Z_\alpha M_q - M_\alpha Z_q)/V - M_\alpha)} \quad (۳۳)$$

$$\frac{a_z(s)}{q_\delta(s)} = \frac{Z_\delta s^2 + (M_\delta Z_q - Z_\delta M_q)s + (Z_\alpha M_\delta - Z_{\delta\alpha} M_\alpha)}{s^2 - (M_q + Z_\alpha/V)s + ((Z_\alpha M_q - M_\alpha Z_q)/V - M_\alpha)} \quad (۳۴)$$

که در این روابط:

$$\frac{\delta(s)}{\delta_c(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (۲۷)$$

که در آن فرکانس طبیعی عملگر برابر 200 rad/sec و ضریب میرایی برابر 0.7 می باشد. با فرض تقارن آیرودینامیکی در کانال غلت و کوچک بودن نرخ تغییر زاویه غلت (p) ، معادلات شش درجه آزادی رهگیر در دستگاه بدنی به صورت زیر می باشد [۲۴]:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} (\dot{U} + QW - RV) \\ (\dot{V} + RU) \\ (\dot{W} - QU) \end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} \dot{P} \\ I_{yy} \dot{Q} \\ I_{zz} \dot{R} \end{bmatrix} \quad (۲۹)$$

نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی در روابط بالا به صورت زیر تعیین می شوند [۲۴]:

$$Y = QS \left(C_{y\beta} \beta + C_{y\delta_r} \delta_r + C_{y_r} \cdot \frac{D}{2U} R \right) \quad (۳۰)$$

$$Z = QS \left(C_{z\alpha} \alpha + C_{z\delta_e} \delta_e + C_{z_q} \cdot \frac{D}{2U} Q \right)$$

$$L = QSD \left(C_{l\delta_a} \delta_a + C_{l_p} \cdot \frac{D}{2V} P \right)$$

$$M = QSD \left(C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta_e} \delta_e + C_{m_q} \cdot \frac{D}{2U} Q \right) \quad (۳۱)$$

$$N = QSD \left(C_{n\beta} \alpha + C_{n\delta_r} \delta_r + C_{n_r} \cdot \frac{D}{2U} R \right)$$

از آن جایی که کنترلی روی شتاب در راستای محور X بدنی رهگیر صورت نمی پذیرد، نیروی وارد بر راستای X بدنی، در رابطه (۳۰) تحلیل نشده است.

پس از خطی سازی معادلات (۲۸) و (۲۹) و ساده سازی می توان توابع تبدیل کانال های رول، پیچ و یاو را بدست آورد. برای اختصار تنها توابع تبدیل کانال های رول و پیچ نشان داده می شوند زیرا تابع تبدیل کانال سمت مشابه کانال پیچ می باشد. تابع تبدیل کانال رول بصورت زیر می باشد [۲۴]:

$$\frac{p_\delta(s)}{\delta_\delta(s)} = \frac{L_{\delta A}}{sI_x - L_p} \quad (۳۲)$$

و $\tilde{N}_2, N_1, \tilde{M}_2, M_1$ ضرایب نرمالیزه شده نسبت به هم اول پلانتهای P_1, P_2 بوده و $\text{wno det } \theta(s)$ برابر تعداد چرخش تابع $\theta(s)$ در جهت عقربه‌های ساعت حول مبدأ می‌باشد که در نمودار نایکوئیست مشخص است. قضیه زیر بیان‌گر شرایطی است که اگر کنترل‌کننده‌ای بتواند پلانتهای G را به صورت مقاوم پایدار کند، آن‌گاه خواهد توانست پلانتهای غیر نامی G_Δ را نیز پایدار کند [۲۵]:

قضیه ۲: پلانتهای G داده شده است و $\beta \leq \alpha < \varepsilon_{opt}(G)$ است. برای کنترل‌کننده داده شده K و برای تمام پلانتهای غیر نامی که دارای ویژگی $\delta_v(G, G_\Delta) \leq \beta$ هستند، رابطه زیر برقرار است:

$$\arcsin \varepsilon[G, K] > \arcsin \alpha - \arcsin \beta \quad (39)$$

اگر و فقط اگر: $\varepsilon[G, K] > \alpha$.

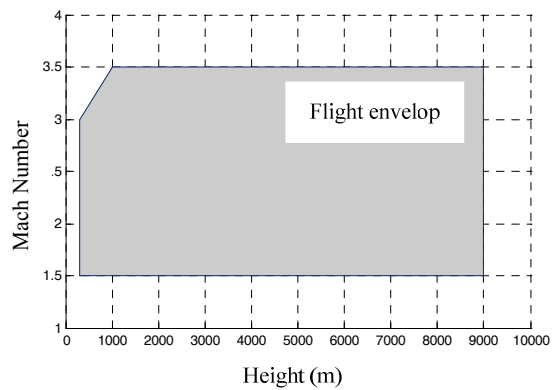
قضیه فوق بیان می‌کند که اگر کنترل‌کننده K بتواند پلانتهای نامی G را با حاشیه‌پایداری مقاوم β پایدار کند، می‌تواند هر پلانتهای که فاصله v -gap آن از پلانتهای نامی، کمتر از β باشد را نیز پایدار نماید [۲۵].

این قضیه از آن جهت حائز اهمیت است که اگر بتوان در ناحیه پروازی رهگیر، پلانتهای نامی G مناسبی یافت به گونه‌ای که فاصله v -gap آن با سایر پلانتهای دیگر درون ناحیه پروازی، کمتر از حاشیه‌پایداری مقاوم $\varepsilon[G, K]$ باشد آن‌گاه می‌توان مطمئن بود که کنترل‌کننده K تمامی پلانتهای موجود درون ناحیه پروازی رهگیر را نیز پایدار خواهد کرد. برای پیدا کردن پلانتهای نامی مناسب درون ناحیه پروازی رهگیر از تجربه طراح و روش سعی و خطا استفاده شده است. ابتدا یک نقطه درون ناحیه پروازی رهگیر انتخاب شده و کنترل‌کننده مقاوم K برای آن طراحی می‌شود. سپس فاصله v -gap بین پلانتهای نامی و سایر پلانتهای درون ناحیه پروازی محاسبه می‌شود. اگر بیشترین فاصله به دست آمده از حاشیه‌پایداری مقاوم پلانتهای شکل‌دهی شده نامی کمتر بود آن‌گاه کنترل‌کننده مقاوم K پایدار سایر پلانتهای درون ناحیه پروازی را تضمین کرده و در غیر این صورت نقطه جدیدی انتخاب می‌شود و همین فرآیند دوباره تکرار می‌گردد.

در نهایت در این مقاله نقطه کار مناسب به صورت $M=1.625, h=2000m$ انتخاب شده است. برای این نقطه کار وزن‌های W_2, W_1 و کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞

$$\begin{aligned} L_{\delta A} &= QSDC_{l_{\delta A}} \\ L_p &= QSDC_{l_p} \left(\frac{D}{2V} \right) \\ Z_\delta &= \frac{SQDC_{z_\delta}}{m} \\ Z_\alpha &= \frac{SQDC_{z_\alpha}}{m} \\ Z_q &= \frac{SQDC_{z_q}}{m} \\ M_\delta &= \frac{SQDC_{m_\delta}}{I_y} \\ M_\alpha &= \frac{SQDC_{m_\alpha}}{I_y} \\ M_q &= \frac{SQD^2 C_{m_q}}{I_y V} \end{aligned} \quad (35)$$

ناحیه پروازی رهگیر زمین به هوای برد و ارتفاع کوتاه که در این مقاله در نظر گرفته شده است مطابق شکل ۴ می‌باشد.



شکل ۴- ناحیه پروازی رهگیر

طراحی خودخلبان مقاوم با استفاده از الگوریتم پیشنهادی

به منظور طراحی خودخلبان مقاوم با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و به منظور عدم استفاده از جدول بندی بهره، ابتدا بایستی نقطه کار مناسب را انتخاب کرده و تابع تبدیل مدل خطی را در اطراف نقطه کار بدست آورد. به منظور انتخاب نقطه کار از ابزار v -gap metric استفاده شده است. ابزار v -gap metric برای بیان فاصله بین دو سیستم LTI مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف: v -gap metric به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$$\delta_v(P_1, P_2) = \begin{cases} \|\Psi(P_1, P_2)\|_\infty, & \det \theta(j\omega) \neq 0 \quad \forall \omega, \text{ wno det } \theta(s) = 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (36)$$

که در آن:

$$\Psi(P_1, P_2) =: -\tilde{N}_2 M_1 + \tilde{M}_2 N_1 \quad (37)$$

$$\theta(s) =: \tilde{N}_2 N_1 + \tilde{M}_2 M_1 \quad (38)$$

در روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_∞ پاسخ فرکانسی تابع حلقه باز رهگیر (G)، باید به گونه ای مناسب توسط وزن های W_2, W_1 شکل دهی شود (

شکل ۵). در این بخش برای طراحی وزن های W_2, W_1 از الگوریتم ارائه شده در مقاله استفاده می شود.

با استفاده از این الگوریتم دیگر نیازی به طراحی وزن های شکل دهی حلقه به صورت تجربی نیست و مقدار زیادی از پیچیدگی طراحی وزن های شکل دهی حلقه کاسته می شود. در ابتدا باید محدوده های فرکانسی $\underline{s}(j\omega)$ و $\bar{s}(j\omega)$ را به گونه ای مناسب تعیین کرد. این توابع مشخص کننده چگونگی حرکت پاسخ فرکانسی تابع شکل دهی شده می باشد. با تعریف مناسب این توابع می توان تمامی معیارهای کارایی و مقاومت را به خوبی تعریف کرد.

با توجه به معیارهای کارایی و مقاومت و اصول ذکر شده در شکل دهی حلقه، محدوده های فرکانسی $\underline{s}(j\omega)$ و $\bar{s}(j\omega)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\underline{s}(j\omega) = \frac{3(s+40)(s+3000)}{(s+0.00001)(s+100)(s+200)(s+1000)} \quad (41)$$

$$\bar{s}(j\omega) = \frac{10(s+40)(s+3000)}{(s+0.00001)(s+100)(s+200)(s+1000)}$$

شکل ۶ پاسخ فرکانسی تابع حلقه باز نامی G و محدوده های فرکانسی $\underline{s}(j\omega)$ و $\bar{s}(j\omega)$ را نشان می دهد. حال می توان مساله طراحی وزن های شکل دهی حلقه را به این صورت بیان کرد که توابع W_2, W_1 را به گونه ای بیابید که با ضرب این توابع در تابع حلقه باز نامی G ، تابع شکل دهی شده G_s (رابطه (۱))، درون ناحیه نشان داده شده در شکل ۶ قرار گیرد. از آنجایی که محدوده های نشان داده شده در شکل ۶ به خوبی بیانگر معیارهای کارایی و معیار دوم مقاومت هستند می توان مطمئن بود که تابع شکل دهی شده G_s تمامی معیارهای کارایی را دارا می باشد.

تابع حلقه باز نامی G به همراه محدوده های فرکانسی $\underline{s}(j\omega)$ و $\bar{s}(j\omega)$ ، به عنوان ورودی به الگوریتم پیشنهادی داده می شوند. تابع وزنی W_1 برای سادگی برابر یک انتخاب شده و الگوریتم بهینه سازی اجرا می شود. محدوده فرکانسی انتخاب شده برای الگوریتم از 10^{-4} تا 10^4 است که به صورت لگاریتمی به ۱۰۰ نقطه تقسیم شده است. در هر بار تکرار الگوریتم به ازای این ۱۰۰ نقطه، نامساوی های ماتریسی خطی حل شده و مقدار وزن

طراحی می شود. به منظور داشتن پاسخ گذرای مناسب در حلقه خودخلبان، از حلقه داخلی سرعت زاویه ای استفاده می شود. با استفاده از ژيروسکوپ نرخ و با فیدبک گرفتن از سرعت زاویه ای کانال پیچ می توان به سادگی کنترل کننده تناسبی k_q را مطابق شکل ۴ طراحی کرد. این مقدار برابر $k_q = -0.45$ انتخاب شده است. سپس برای تابع حلقه باز نامی G که به صورت خط چین در

شکل ۵ نشان داده شده است، وزن های W_2, W_1 و کنترل کننده مقاوم طراحی می گردد. تابع حلقه باز نامی G برای نقطه کار انتخابی مطابق رابطه زیر به دست می آید:

$$G = \frac{k_q \cdot G_a \cdot q\delta / \delta_{e\delta}}{1 + k_q \cdot G_a \cdot q\delta / \delta_{e\delta}} \cdot az / q\delta \quad (40)$$

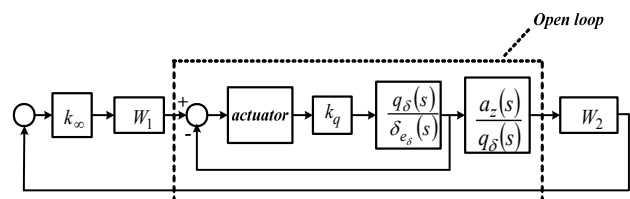
$$G = \frac{863878246(s-30)(s+25)}{(s+121)(s+3)(s^2+20+7933)}$$

در شکل ۶ پاسخ فرکانسی تابع G در نقطه کار انتخابی نشان داده شده است. خودخلبان بایستی طوری طراحی شود تا توانایی حفظ پایداری و کارایی مطلوب را داشته باشد. با توجه به مشخصات مورد نیاز، معیارهای پایداری و کارایی که در این مقاله تعریف شده به صورت زیر می باشد:

معیار نخست کارایی: $t_r < 0.65 \text{ sec}$, $OV < 10\%$, $e_{ss} < 0.01$
معیار دوم کارایی: بیشینه نرخ تغییر زاویه بالک های رادر و الویتور ($\delta_{e\delta}, \delta_{r\delta}$) برای دستور پله ۱g، از ۲۸ deg/sec کمتر باشد.

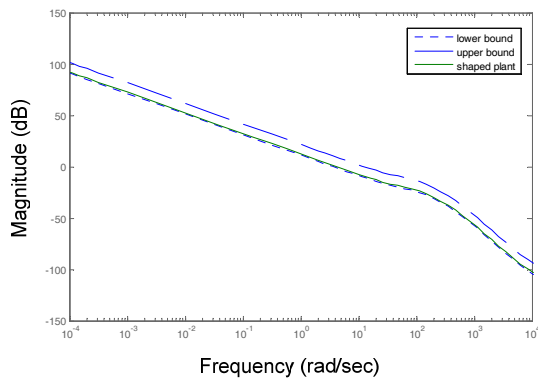
معیار نخست مقاومت: رهگیر باید علی رغم ۲۵٪ تغییر در ضرایب آیرودینامیکی و در تمام مسیر پرواز، پایداری مقاوم داشته باشد.

معیار دوم مقاومت: بهره سیستم حلقه باز در فرکانس 300 rad/sec باید ۲۵ dB تضعیف گردد (به منظور حذف دینامیک های فرکانس بالای عملگر و همچنین حذف نویز).



شکل ۵. دیاگرام بلوکی مدل خطی رهگیر در کانال پیچ به همراه عملگر و وزن های شکل دهی حلقه و کنترل کننده مقاوم

موشک به سه متغیر فشار دینامیکی، عدد ماخ و زاویه حمله بستگی دارد.



شکل ۷- پاسخ فرکانسی تابع حلقه‌باز شکل‌دهی شده درون ناحیه‌های فرکانسی طراحی شده قرار گرفته است

فشار دینامیکی وابسته به عدد ماخ و ارتفاع می‌باشد. چنانچه عدد ماخ را به‌عنوان یک متغیر جدول‌بندی بهره انتخاب شود، می‌توان به‌جای فشار دینامیکی از ارتفاع به‌عنوان متغیر دیگر جدول‌بندی بهره استفاده نمود. با توجه به بررسی انجام شده از آن‌جا که محدوده زاویه حمله کوچک می‌باشد، تغییرات زاویه حمله در این رهگیر تاثیر چندانی در رفتار غیرخطی سیستم نخواهد داشت و می‌توان از آن به‌عنوان پارامتر جدول‌بندی بهره صرف‌نظر نمود.

برای این کار ابتدا ناحیه پروازی معین‌شده در شکل ۴ به‌صورت مناسبی شبکه‌بندی می‌شود. سپس تابع حلقه‌باز G_i که به‌صورت خط‌چین در

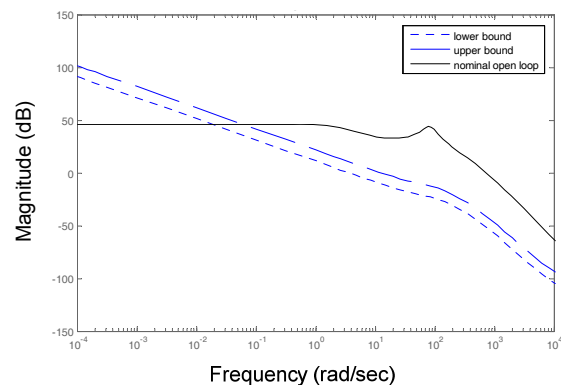
شکل ۵ نشان داده شده است به‌ازای تمام \dot{A} نقطه موجود درون این ناحیه محاسبه شده و سپس با استفاده از وزن طراحی شده تمامی این توابع شکل‌دهی می‌شوند. در نتیجه \dot{A} تابع شکل‌دهی $G_{s,i}$ حاصل می‌شود. آن‌گاه فاصله v-gap بین تمام $G_{s,i}$ ها با تابع شکل‌دهی شده نامی G_s مطابق شکل ۹ محاسبه می‌شود. اگر ماکزیمم فاصله بین پلانتهای شکل‌دهی شده $G_{s,i}$ با پلانتهای شکل‌دهی شده نامی G_s ، از حاشیه‌پایداری مقاوم به‌دست آمده برای نقطه نامی کمتر بود آن‌گاه طبق قضیه ۲، کنترل‌کننده استاتیکی k_∞ طراحی شده برای این نقطه کار تضمین‌کننده پایداری در تمام ناحیه مشخص‌شده در شکل ۴ خواهد بود. همان‌گونه که از شکل ۹ مشخص است، ماکزیمم v-gap به‌دست آمده در پوش پروازی برای این نقطه کار برابر 0.5 می‌باشد که کوچکتر از حاشیه‌پایداری مقاوم به‌دست‌آمده در

W_2 در 100 نقطه فرکانسی به‌دست می‌آید. با منطبق کردن یک تابع تبدیل کمینه‌فاز روی مقادیر به‌دست آمده در این 100 نقطه می‌توان تابع تبدیل W_2 را به‌دست آورد. این الگوریتم تا جایی تکرار می‌شود که حاشیه‌پایداری مقاوم حاصل شده به می‌نیم خود برسد. خروجی این الگوریتم تابع تبدیل W_2 به همراه کنترل‌کننده استاتیکی مقاوم k_∞ می‌باشد.

شکل ۷ پاسخ فرکانسی تابع تبدیل حلقه‌باز شکل‌دهی شده G_s را در نقطه کار به همراه محدوده‌های فرکانسی $\underline{s}(j\omega)$ و $\bar{s}(j\omega)$ نشان می‌دهد. همان‌گونه که انتظار می‌رفت وزن W_2 به‌گونه‌ای انتخاب شده است که پاسخ فرکانسی تابع حلقه‌باز شکل‌دهی شده G_s ، درون محدوده‌های فرکانسی $\underline{s}(j\omega)$ و $\bar{s}(j\omega)$ قرار می‌گیرد. حال می‌توان با اطمینان گفت که تابع G_s تمام معیارهای کارایی را برآورده می‌کند. شکل ۸ حاشیه‌پایداری مقاوم حاصل شده در هر بار تکرار الگوریتم را در نقطه کار نشان می‌دهد. همان‌گونه که از این شکل مشخص است حاشیه‌پایداری مقاوم حاصل شده از این الگوریتم بعد از پنج‌بار تکرار به مقدار 0.5346 می‌رسد. در نهایت تابع وزنی W_2 و همچنین کنترل‌کننده استاتیکی مقاوم k_∞ به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$W_2 = \frac{0.006s^3 + 0.21s^2 + 42.6s + 126.6}{s^3 + 231.5s^2 + 3823s + 0.4} \quad (42)$$

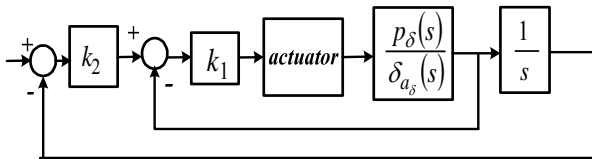
$$k_\infty = -0.8$$



شکل ۶- پاسخ فرکانسی تابع حلقه‌باز نامی به همراه ناحیه‌های طراحی شده برای بیان معیارهای کارایی

حال با استفاده از ابزار v-gap metric پایداری سیستم حلقه‌بسته در تمام مسیر پروازی سنجیده می‌شود. همان‌گونه که از روابط (۳۱) - (۳۶) مشاهده می‌شود معادلات دینامیکی

شود و در غیر این صورت تزویج بین کانال‌های پیچ و یاورخ خواهد داد.



شکل ۱۰- دیاگرام بلوکی مدل خطی رهگیر در کانال رول به همراه حلقه فیدبک

شبیه‌سازی شش درجه آزادی

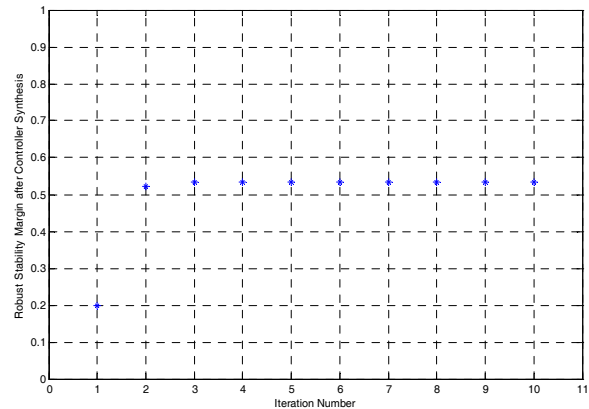
بعد از طراحی کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ و وزن‌های شکل‌دهی حلقه W_2, W_1 در حالت خطی، به‌منظور اطمینان از عملکرد سیستم بایستی آن‌را به شبیه‌سازی شش درجه آزادی غیر خطی اعمال نمود.

هدف از شبیه‌سازی شش درجه آزادی این است که نشان داده شود کنترل‌کننده طراحی شده قادر است معیارهای کارایی و پایداری که در بخش قبل بیان شد را برای سیستم غیرخطی حفظ کند. برای آن که کارایی کنترل‌کننده مقاوم نشان داده شود، دستور شتاب ورودی به‌صورت پله در شش نقطه مطابق شکل ۱۱ به سیستم اعمال می‌شود و معیارهای کارایی در این نقاط بررسی می‌شوند. شکل ۱۱ شتاب خروجی رهگیر در کانال Z را به همراه دستور ورودی نشان می‌دهد. همان‌گونه که بیان شد ابتدا می‌بایست نرخ زاویه‌ای حلقه رول صفر گردد. این کار مطابق شکل ۱۲ به خوبی انجام شده است. در شکل ۱۳ سیگنال کنترلی ورودی به عملگر نشان داده شده است. همچنین در شکل ۱۴ نرخ تغییرات سیگنال کنترلی نشان داده شده است. در جدول ۱ کارایی به‌دست آمده در نقاط مختلف آمده است. با توجه به معیارهای کارایی بیان شده، همان‌گونه که از نتایج جدول ۱ مشاهده می‌شود در تمامی نقاط کارایی مطلوبی برآورده شده است. در شکل ۱۴ و ۱۵ نیز زاویه حمله و سرعت زاویه‌ای کانال پیچ نشان داده شده است.

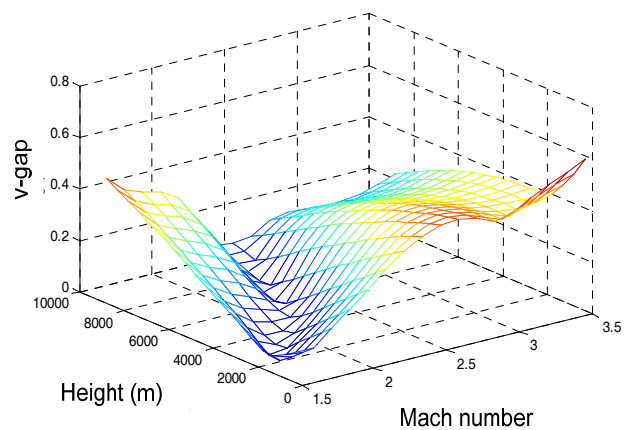
تحلیل نتایج در حالت اغتشاش یافته

به‌منظور تحلیل پایداری سیستم حلقه‌بسته در برابر نامعینی در ضرایب آیرودینامیکی، آزمون مونت کارلو به‌صورت زیر انجام می‌گیرد. تمامی ضرایب آیرودینامیکی به‌صورت تصادفی و به‌اندازه ۲۵٪ تغییرات حول مقدار نامی تغییر داده شده و این

نقطه کار انتخابی می‌باشد. بنابراین طبق قضیه ۲، کنترل‌کننده طراحی‌شده قادر به تضمین پایداری برای تمام ناحیه پروازی می‌باشد.



شکل ۸- حاشیه پایداری مقاوم حاصل‌شده بعد از هر بار تکرار الگوریتم

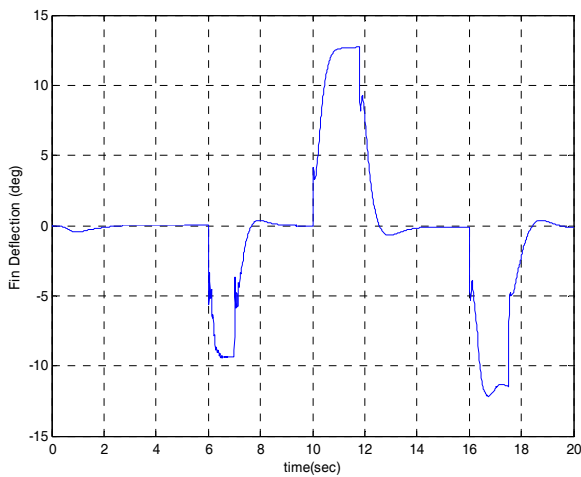


شکل ۹- v-gap بین توابع حلقه‌باز شکل‌دهی‌شده در تمام ناحیه پروازی نسبت به حالت نامی

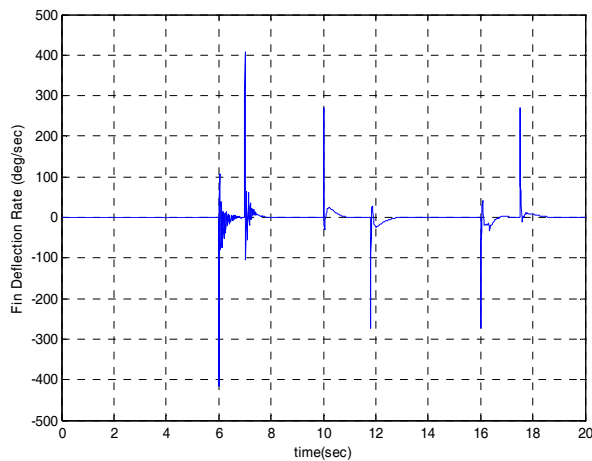
در ادامه به طراحی خودخلبان رهگیر به‌منظور صفر کردن نرخ زاویه‌ای حلقه رول پرداخته می‌شود. از آنجایی که در به‌دست آوردن معادلات خطی رهگیر به‌منظور جلوگیری از تزویج بین کانال‌های پیچ و یاور، فرض شده است که سرعت زاویه‌ای کانال رول صفر باشد پس باید سرعت زاویه‌ای کانال رول را با طراحی یک کنترل‌کننده فیدبک ساده مطابق شکل ۱۰ صفر کرد.

ضرایب k_2, k_1 به‌صورت $k_2 = 10, k_1 = -0.27$ طراحی می‌شوند به‌گونه‌ای که پهنای باند سیستم حلقه‌بسته در کانال رول در شکل ۱۰ بزرگتر از پهنای باند کانال‌های پیچ و یاور باشد. زیرا سرعت زاویه‌ای کانال رول باید سریعتر از کانال‌های دیگر صفر

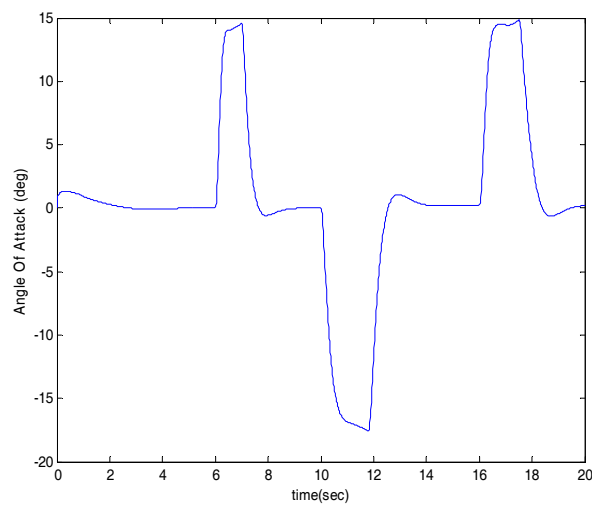
تغییرات تصادفی در ضرایب آیرودینامیکی ۲۰۰ بار تکرار می‌شود. مطابق شکل ۱۷، تعقیب شتاب ورودی توسط شتاب رهگیر به خوبی در هر ۲۰۰ بار تکرار انجام می‌شود. در شکل ۱۸ سرعت زاویه‌ای حلقه رول، شکل ۱۹ زاویه حمله، شکل ۲۰ سیگنال ورودی به عملگر و سرعت زاویه‌ای کانال پیچ در حالت اغتشاش یافته نمایش داده شده است. برای بررسی تضعیف بهره سیستم در فرکانس‌های بالا (۳۰۰ rad/sec) ۶۰ نقطه کاری درون پوش پروازی رهگیر به صورت تصادفی انتخاب شده و پاسخ فرکانسی سیستم حلقه‌باز نهایی برای این ۶۰ نقطه عملکرد ترسیم می‌شود. مطابق شکل ۲۲، بهره سیستم‌های حلقه‌باز در فرکانس ۳۰۰ rad/sec بین ۲۲db تا ۳۴db تضعیف می‌شود که با توجه به معیار کارایی بیان شده، مقدار قابل قبولی می‌باشد.



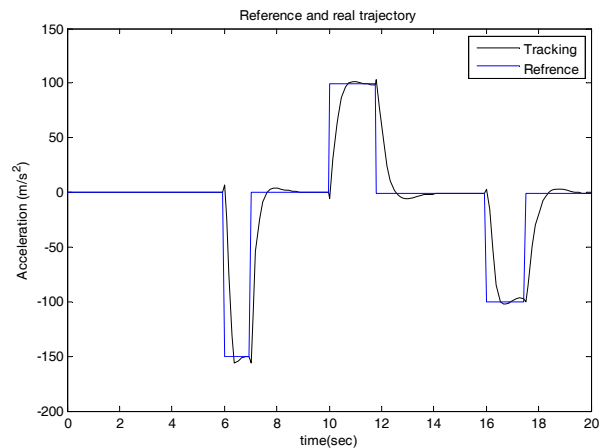
شکل ۱۳. سیگنال کنترلی ورودی به عملگر



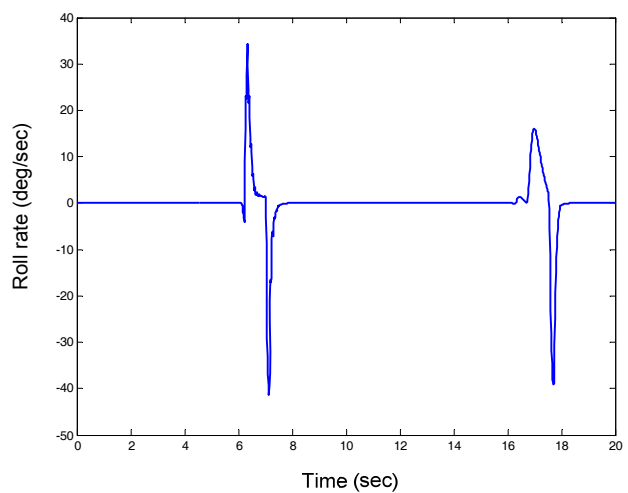
شکل ۱۴- مشتق سیگنال ورودی به عملگر



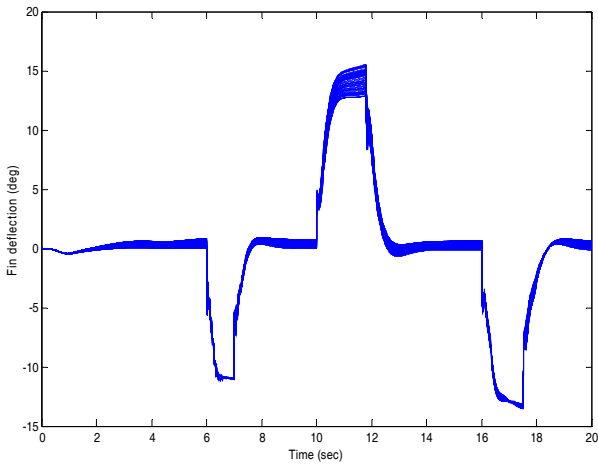
شکل ۱۵- زاویه حمله



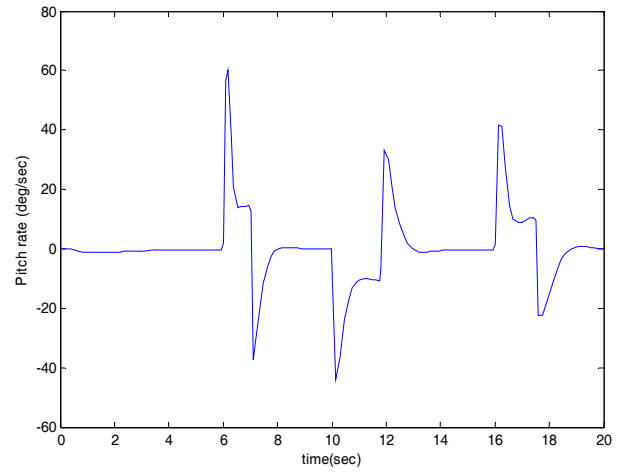
شکل ۱۱- شتاب ورودی و شتاب رهگیر در کانال z



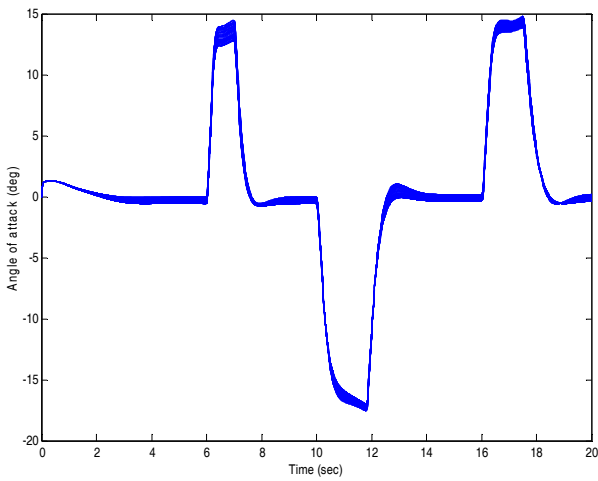
شکل ۱۲- سرعت زاویه‌ای حلقه رول



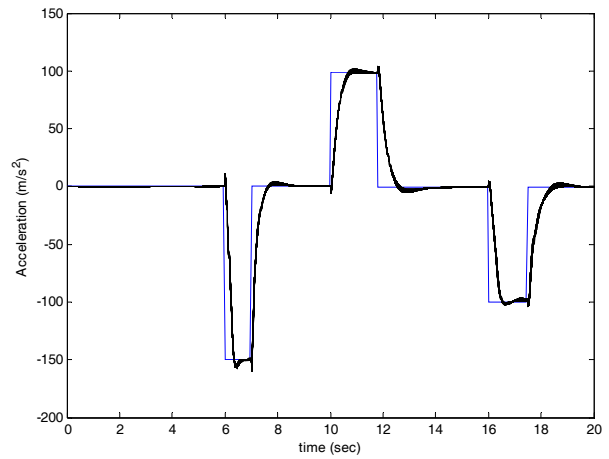
شکل ۱۹- زاویه حمله در حالت اغتشاش یافته



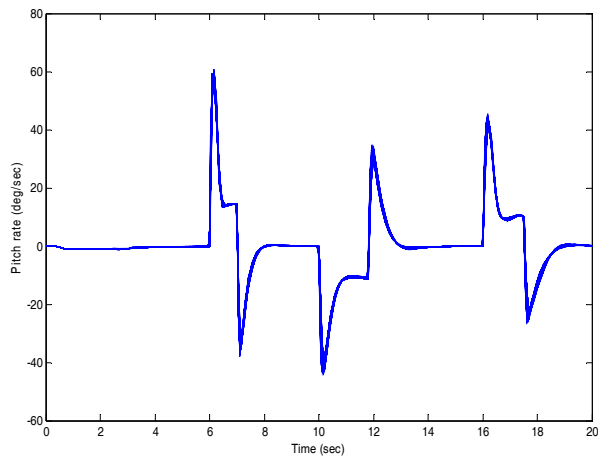
شکل ۱۶- سرعت زاویه‌ای کانال پیچ



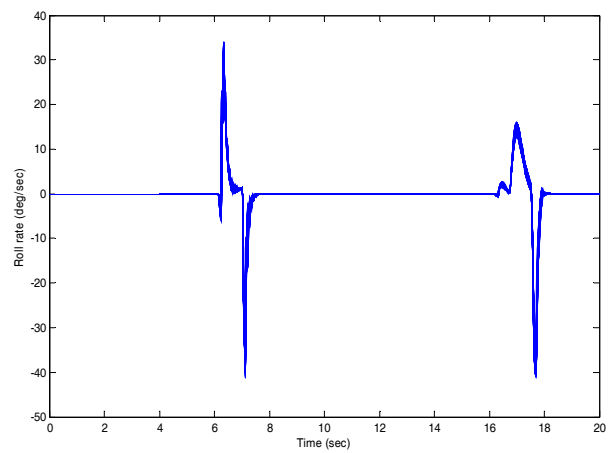
شکل ۲۰- سیگنال کنترلی ورودی به عملگر در حالت اغتشاش یافته



شکل ۱۷- شتاب ورودی و شتاب رهگیر به‌ازای ۲۵٪ تغییر در ضرایب آیرودینامیکی و برای ۲۰۰ بار تکرار

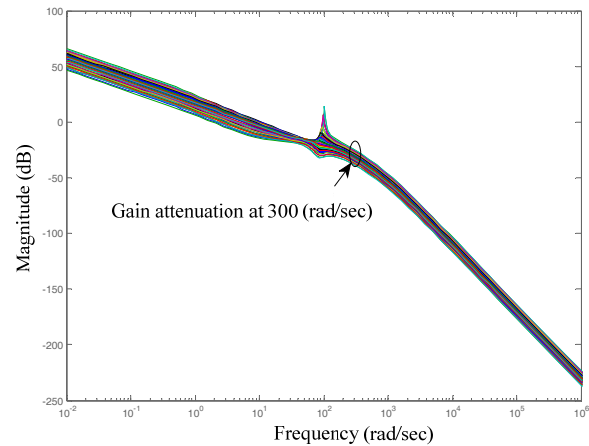


شکل ۲۱- سرعت زاویه‌ای کانال پیچ در حالت اغتشاش یافته



شکل ۱۸- سرعت زاویه‌ای حلقه رول در حالت اغتشاش یافته

پایداری ابتدا یک نقطه کار مناسب درون پوش پروازی رهگیر انتخاب شده و سپس مدل خطی رهگیر در آن نقطه استخراج گردید. برای طراحی کنترل کننده مقاوم از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_∞ استفاده شد. طراحی کنترل کننده استاتیکی مقاوم و همچنین طراحی وزن های شکل دهی حلقه با ارائه الگوریتمی جدید انجام شد. با این الگوریتم مشکل پیچیدگی طراحی وزن های شکل دهی حلقه برطرف گردیده و علاوه بر آن حاشیه پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته نیز به بهینه محلی خود رسید. علاوه بر آن کنترل کننده نهایی نیز درجه بسیار پایینی دارد که پیاده سازی و کاربرد آن را مطلوب می سازد. برای اثبات پایداری از ابزار v -gap metric استفاده شد. در این حالت اگر حاشیه پایداری مقاوم حاصل شده از الگوریتم ارائه شده، از بیشترین v -gap بین سیستم های حلقه باز درون پوش پروازی با سیستم حلقه باز نامی بیشتر باشد، آن گاه کنترل کننده مقاوم طراحی شده برای نقطه نامی، پایداری را برای تمام نقاط درون پوش پروازی تامین می نماید. در نهایت شبیه سازی شش درجه آزادی انجام شده و نشان داده شد که خودخلبان طراحی شده معیارهای کارایی و مقاومت را تامین می نماید.



شکل ۲۲- تضعیف بهره پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز در فرکانس 300 rad/sec برای 60 نقطه کاری تصادفی درون پوش پروازی رهگیر

جمع بندی و نتیجه گیری

در این مقاله خودخلبان مقاوم برای یک رهگیر زمین به هوای برد و ارتفاع کوتاه بدون نیاز به جدول بندی بهره طراحی شد. نشان داده شد که خودخلبان طراحی شده پایداری رهگیر را در تمام پوش پروازی به خوبی تضمین می نماید. به منظور تضمین

جدول ۱- نمایش کارایی خودخلبان مقاوم در نقاطی که پله به سیستم اعمال شده است

| نقطه اول | نقطه دوم | نقطه سوم | نقطه چهارم | نقطه پنجم | نقطه ششم |
|----------|----------|----------|------------|-----------|----------|
| ۰/۳۶ | ۰/۶۴ | ۰/۶۹ | ۰/۷۵ | ۰/۵۳ | ۰/۸۳ |
| ٪۴ | ٪۳ | ٪۲ | ٪۶ | ٪۳ | ٪۳ |
| ٪۱ | ٪۱ | ٪۱ | ٪۱ | ٪۱/۵ | ٪۱ |
| ۲۷/۵ | ۲۷/۵ | ۲۷/۵ | ۲۷/۵ | ۲۷/۵ | ۲۷/۵ |

فهرست علائم لاتین

| | |
|------------------------------|----------------------------------------------|
| $[P \ C]$ | فیدبک استاندارد بین پلانت P و کنترل کننده |
| C | فضای توابع کسری حقیقی محدود و آنالیتیک |
| $\Re H_\infty$ | فضای توابعی که در $\Re H_\infty$ یکه باشند. |
| $\Im H_\infty$ | بزرگترین مقدار تکین ماتریس |
| $\bar{\sigma}(\cdot)$ | کوچکترین مقدار تکین ماتریس |
| $\underline{\sigma}(\cdot)$ | |
| $\ \cdot\ _\infty$ | نرم بی نهایت ماتریس |
| $\varepsilon[G_s, k_\infty]$ | حاشیه پایداری مقاوم سیستم $[G_s \ k_\infty]$ |
| γ | معکوس حاشیه پایداری مقاوم |
| Q | فشار دینامیکی |
| S | سطح مرجع |
| D | قطر |

پی نوشت

- ۱ Normalized Coprime Factor
۲ Skid To Turn

منابع و مراجع

- [۱] M. A. Sharbafi, A. Mohammadinejad, J. Roshanian, A. Kh. Sedigh, "Stability proof of gain scheduling controller for skid-to-turn missile using kharitonov theorem", JAST, Vol. ۶, No. ۲, pp. ۷۱-۷۸, ۲۰۰۹.
- [۲] علی اکبرزاده کلات، حمیدرضا مومنی، "طراحی کنترل کننده اتوپیلوت موشک به روش جدول بندی بهره فازی"، نشریه مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر ایران، سال ۵، شماره ۲، تابستان ۱۳۸۶، صفحه ۵۹-۶۸
- [۳] D. J. Stilwell, "State-space interpolation for a gain-scheduled autopilot", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. ۲۴, No. ۳, pp. ۴۶۰-۴۶۵, ۲۰۰۱.
- [۴] D.J. Stilwell, "Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers". Automatica, Vol. ۳۶, pp. ۶۶۵-۶۷۱, ۲۰۰۰.
- [۵] W.J. Rugh, J.S. Shamma, "Research on gain scheduling". Automatica, Vol. ۳۶, pp. ۶۶۵-۶۷۱, ۲۰۰۰.
- [۶] G. A. Gracia, S. Keshmiri, R. D. Colgren, "Advanced H infinity Trainer autopilot", AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference, August ۲۰۱۰, Toronto, Canada.
- [۷] S. Kang, H.J. Kim, J.I. Lee, B.E. Jun, and M.J. Tahk, "Roll-pitch-yaw integrated robust autopilot design for a high angle-of attack missile", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. ۳۲, No. ۵, pp. ۱۶۲۲-۱۶۲۸, ۲۰۰۹.
- [۸] C.F. McFarlane, K. Glover, "A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. ۳۷, No. ۶, pp. ۷۵۹-۷۶۹, ۱۹۹۲
- [۹] K. Glover, and D. McFarlane, "Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with H_∞ -bounded uncertainty," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.

| | |
|----------------------|------------------------------------------|
| I: | ماتریس همانی |
| V: | سرعت رهگیر |
| X: | نیروی وارد بر رهگیر در راستای X بدنی |
| Y: | نیروی وارد بر رهگیر در راستای Y بدنی |
| Z: | نیروی وارد بر رهگیر در راستای Z بدنی |
| L: | گشتاور حول محور رول |
| M: | گشتاور حول محور پیچ |
| N: | گشتاور حول محور یاو |
| P: | سرعت زاویه ای حول محور X بدنی |
| Q: | سرعت زاویه ای حول محور Y بدنی |
| R: | سرعت زاویه ای حول محور Z بدنی |
| δ : | زاویه بالک |
| $C_{l_{\delta a}}$: | ضریب گشتاور رول ناشی از جابجایی الویتور |
| C_{l_p} : | ضریب گشتاور رول ناشی از نرخ غلت |
| $C_{z_{\delta e}}$: | ضریب نیروی Z ناشی از جابجایی الویتور |
| $C_{z_{\alpha}}$: | ضریب نیروی Z ناشی از تغییرات زاویه حمله |
| C_{z_q} : | ضریب نیروی Z ناشی از تغییرات Q |
| $C_{m_{\delta e}}$: | ضریب گشتاور M ناشی از جابجایی الویتور |
| $C_{m_{\alpha}}$: | ضریب گشتاور M ناشی از تغییرات زاویه حمله |
| C_{m_q} : | ضریب گشتاور M ناشی از تغییرات Q |

زیر نویس ها

| | |
|------------|----------------------|
| r: | سیگنال مرجع |
| c: | سیگنال دستور |
| δ : | متغیر دیفرانسیلی |
| ss: | حالت دائم |
| -: | سمت چپ محور موهومی |
| +:: | سمت راست محور موهومی |

بالا نویس ها

| | |
|----------------|-----------------------|
| $m \times n$: | ابعاد ماتریس |
| ∧: | پاسخ بهینه |
| T: | ترانهاده ماتریس |
| *: | ترانهاده مزدوج ماتریس |
| -: | معکوس ماتریس |

- [۱۸] S. Patra., S. Sen., and G. Ray, "Design of static H_∞ loop shaping controller in four-block framework using LMI". *Automatica*, Vol. ۴۴, pp. ۲۲۱۴-۲۲۲۰, ۲۰۰۸
- [۱۹] S. Theodoulis, G. Duc, "Missile autopilot design: Gain scheduling and the gap metric" *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. ۳۲, No. ۳, pp. ۹۸۶-۹۹۶, ۲۰۰۹.
- [۲۰] A. , Lanzon, "Weight optimization in H_∞ loop shaping" *Automatica*, Vol. ۴۱, No. ۷, pp. ۱۲۰۱-۱۲۰۸, ۲۰۰۵
- [۲۱] M. Ejaz, M. Arbab, "Automativ weight selection in H_∞ loop shaping using genetic algorithm", In: ICET '۰۶ international conference on emerging technologies, ۱۳-۱۴ November, pp.۳۳۴-۳۴۲, ۲۰۰۶
- [۲۲] G. Papageorgiou, K. Glover., H_∞ loop shaping: Why is it a sensible procedure for designing robust flight controllers? AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. ۱۹۹۹, pp. ۱۱۴.
- [۲۳] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover, "Robust and optimal control", Prentice Hall, first edition, ۱۹۹۶.
- [۲۴] G.M. Siouris, "Missile guidance and control systems", New York, Springer-verlag, Inc., ۲۰۰۴.
- [۲۵] Vinnicombe. G "Frequency Domain Uncertainty and the Graph Topology". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.۳۸, No.۹, pp. ۱۳۷۱-۱۳۸۳, ۱۹۹۳.
- [۱۰] J. Petrich, D.J. Stilwell, "Robust control for an autonomous underwater vehicle that suppresses pitch and yaw", *Ocean Engineering*, Vol. ۳۸, pp. ۱۹۷-۲۰۴, ۲۰۱۱.
- [۱۱] S. Kaitwanidvilai, P. Olanthichachat, "Robust loop shaping-fuzzy gain scheduling control of servo-pneumatic system using particle swarm optimization approach" *Mechatronics*, volume. ۲۱, pp. ۱۱۲۱, ۲۰۱۱.
- [۱۲] G. Papageorgiou., K. Glover, and R.A. Hyde. *Robust Flight Control: A Design Challenge*, GARTEUR, volume ۲۲۴ of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapter ۲۹, pages ۴۶۴-۴۸۳. Springer-Verlag, ۱۹۹۷.
- [۱۳] Hiert, G. Duc, P. Friang, and D. Farret, "Linear parameter varying/loop shaping h infinity synthesis for missile autopilot design", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.۲۴, No. ۵, pp. ۸۷۹-۸۸۶, ۲۰۰۱.
- [۱۴] J. Gadewadikar, F.L. Lewis, L. Xie., V. Kucera., and M. Abu-Khalaf, "Parametrization of all stabilizing H_∞ static state-feedback gains: Application to output feedback design". *Automatica*, Vol. ۴۳, pp. ۱۵۹۷-۱۶۰۴, ۲۰۰۷
- [۱۵] E. Prempain, I. Postlethwaite, "Static H_∞ loop shaping control of a fly-by-wire helicopter" *Automatica*, Vol. ۴۱, pp. ۱۵۱۷-۱۵۲۸, sept. ۲۰۰۵
- [۱۶] J. Gadewadikar, F.L. Lewis, and M. Abu-Khalaf, "Necessary and sufficient conditions for H_∞ static output-feedback control" *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. ۲۹, No. ۴, pp. ۹۱۵-۹۲۰, ۲۰۰۶
- [۱۷] S. Ricardo., P. Sanches, K.R, Phalguna, B, Dario, "New results on Linear time invariant and parameter varying static output feedback", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. ۳۱, No. ۵, pp. ۱۲۳۰-۱۲۳۸, ۲۰۰۸