

# مدل سازی عددی رفتار صفحه دارای درجه آزادی چرخشی و بررسی پدیده هیستریزیس آیرودینامیکی

حسن عیسوند<sup>1\*</sup>، رسول کشوری<sup>2</sup>

1- استادیار، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

2- کارشناس ارشد، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

(دریافت مقاله: 1388/10/25 تاریخ پذیرش: 1389/9/9)

## چکیده

در این مقاله به بررسی رفتار یک صفحه تخت، تحت جریان هوا و با درجه آزادی چرخشی پرداخته شده است. به دلیل اثر متقابل مابین جریان هوا و صفحه در حال دوران، ناپایداری جریان، همچنین الگوی پیچیده جریان گردابه‌ای، هیچ‌گونه روش تحلیلی مناسبی برای حل مسئله وجود ندارد. همچنین استفاده از روش‌های عددی - محاسباتی که مبتنی بر معادلات ناویر - استوکس و رینولدز است، نیز بسیار مشکل می‌باشد. بنابراین از روش گردابه گسسته بهینه شده برای محاسبه ضریب نیروی عمودی و گشتاور حاصل از نیروهای آیرودینامیکی استفاده گردیده است. مدل سازی در دو حالت دوران اجباری و دوران آزاد انجام شده است. ضریب نیروی عمودی و ضریب گشتاور، بر حسب زاویه جسم نسبت به جریان در حالت ایستایی و در دو حالت دوران اجباری و دوران آزاد (نوسان آزاد) محاسبه گردیده است. همچنین برای ارزیابی نتایج حاصل شده از مدل سازی عددی، آزمایش‌هایی بر روی صفحه مذکور در تونل باد صورت گرفته و رفتار صفحه به صورت تجربی مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که تحت دوران اجباری، به دلیل پدید آمدن تغییرات ساختاری در جریان گردابه‌ای (در مقایسه با حالت ایستایی) هیستریزیس دینامیکی برای نیروی عمودی و نیز برای گشتاور دورانی رخ می‌دهد. این هیستریزیس با افزایش عدد استروهال تقویت می‌شود. اگر صفحه‌ای با درجه آزادی چرخشی تحت جریان قرار گیرد، ممکن است وارد رژیم دوران آزاد گردد. این حالت در صورتی رخ می‌دهد که گشتاور لختی بی‌بعد در محدوده 5 - 1/43 بوده و نیز زاویه حمله به اندازه کافی کوچک باشد. در مقادیر دیگری از گشتاور لختی، صفحه وارد رژیم نوسان آزاد (یا میرا) می‌شود.

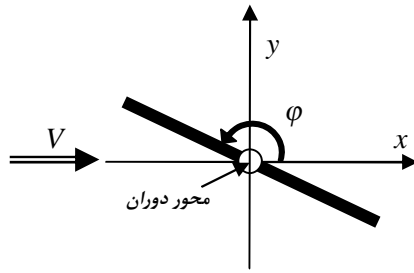
واژه‌های کلیدی: گردابه، دوران اجباری، رژیم دورانی و نوسانی، عدد استروهال، هیستریزیس

## مقدمه

اجسام غیر آیرودینامیکی و اجزاء آنهاست. لایه گردابه به وجود آمده در دنباله اجسام با دهانه محدود در پرواز، نمونه‌ای از گردابه‌های حلقوی است. بال‌های با پسگرایی زیاد و لبه‌های تیز، اجسام نازک و پیکره‌هایی با هندسه پیچیده در زوایای حمله نسبتاً بالا دارای میدان جریان گردابه‌ای پیچیده‌ای حول جسم و دنباله آن می‌باشند. عکس‌العمل گردابه‌ها با سطوح کنترلی از مسائل جدی در کنترل است. بنابراین مسئله مدل سازی جریان‌های گردابه‌ای از مسائل مهم عملی و قابل توجه است که بسیاری از تحقیقات را به خود اختصاص داده است. در این حالت کاربرد مستقیم روش‌های مدل سازی عددی بسیار مشکل بوده ولی روش‌های گردابه یا انجام آزمایش مناسب می‌باشد.

در حوزه فناوری‌های هوافضایی، مطالعه جریان غیردائم حول اجسام و صفحات در حال چرخش یا نوسان (آنتن‌ها، فرفره‌ها، اجسام پرنده دارای دم) از اهمیت خاصی برخوردار است. به منظور تأمین الزامات عملکردی این گونه وسایل، لازم است رفتار آنها تحت درجات آزادی مختلف و با مشخصات هندسی گوناگون بررسی و نیز جهت گیری آنها در جریان به دقت پیش‌بینی گردد. از خصوصیات این گونه اجسام، ایجاد توزیع پیچیده گردابه‌های حاصل از جدایی جریان در لبه‌های تیز و همچنین از دست دادن پایداری لایه‌های گردابه‌ای است [5]. به علاوه تأثیر متقابلی مابین جریان و خود جسم در حال حرکت نیز وجود دارد. تولید، توسعه و اثر متقابل لایه‌های گردابه آزاد از معضلات بسیاری از جریان‌های آیرودینامیکی حول بال‌ها،

\* نویسنده پاسخگو، پست الکترونیک: [isvand71@gmail.com](mailto:isvand71@gmail.com)



شکل 1- صفحه با درجه آزادی چرخشی تحت جریان هوا

$$\text{div} \mathbf{V}^* = 0 \quad (2)$$

معادله حرکت جریان تراکم ناپذیر (بدون اعمال نیروی وزن) در حالت بی بعد نیز به صورت زیر می باشد:

$$\frac{d\mathbf{V}^*}{dt^*} = -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \nabla^2 \mathbf{V}^* \quad (3)$$

فرض کنیم  $r^*$  مختصات بی بعد محلی بوده و در راستای طول صفحه باشد. بنابراین معادله دوران آزاد به صورت زیر خواهد بود:

$$J^* = M_{z^*} = \int_{-1}^1 r^* \Delta p^*(r^*) dr^* \quad (4)$$

$J^*$  - زاویه بین بردار سرعت جریان آزاد و نیم صفحه شاخص است.  $M_{z^*}$  - گشتاور آیرودینامیکی بی بعد اعمالی بر روی صفحه بوده و به صورت زیر است:

$$M_{z^*} = \frac{M_z}{L^2 r U^2 / 2} \quad (5)$$

$J^*$  - گشتاور لختی بی بعد صفحه در واحد طول بوده و به صورت زیر است:

$$J^* = \int_{-1}^1 \rho_{t^*}(r^*) r^{*2} dr^* \quad (6)$$

$\Gamma_{t^*}$  - چگالی بی بعد صفحه بوده و به شکل زیر می باشد:

$$\rho_{t^*}(r^*) = \frac{\rho_w h(r^*)}{\rho L} \quad (7)$$

تحقیق چنین مسائلی از گذشته های دور شروع شده است. هلمهلتز در سال 1858 مدل سازی جریان پیوسته را با استفاده از خطوط گردابه بنیانگذاری نموده [8] و روش های متنوعی نیز برای حل جریان از زمان ون کارمن در سال 1911 و روزن هید در سال 1922 ابداع گردیده است. بسیاری از نتایج به دست آمده را که امروزه در حکم علم در خصوص روش های گردابه ای شناخته می شود، می توان با مروری بر کارهای دانشمندان چون کلمنت و مائل در سال 1975 [5]، فینک و سوح در سال 1974 [6]، سافمن و بیکر در سال 1979 [17]، سافمن در سال 1981 [16]، لئونارد در سال های 1980 و 1985 [12] و 13 و 14 و 15] و عارف در سال 1983 [1] پیدا نمود. در سال 1948 ژوکوفسکی مسئله سقوط صفحه تخت مستطیلی را در هوا، همچنین مسئله چرخش فرقه به شکل صفحه تخت را در جریان هوا مورد بررسی قرار داده است [10]. ماسیف و همکارانش در سال های 1987 تا 1983 آزمایش های متعددی در بررسی جریان روی آنتن های گردان انجام داده اند.

### تشریح مسئله و روش مدل سازی

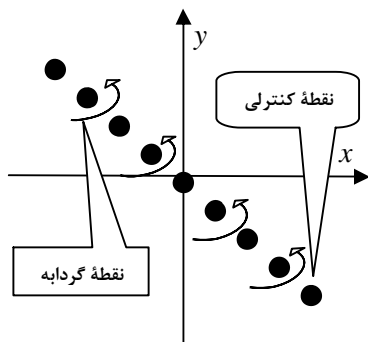
برای حل جریان روی یک صفحه تخت، با درجه آزادی چرخشی، از روش گردابه گسسته استفاده می شود. در این مقاله دو رژیم حرکتی زیر در نظر گرفته شده است:

- 1- چرخش اجباری با سرعت زاویه ای ثابت
  - 2- دوران آزاد تحت گشتاور آیرودینامیکی حاصل از شار جریان و عکس العمل صفحه تخت نسبت به آن
- دستگاه مختصات  $(x, y)$  را بر مرکز صفحه مستقر کرده به گونه ای که  $x$  در برای جریان باشد (شکل 1). متغیرهای بی بعد زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{U}; \quad v^* = \frac{v}{U}; \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}; \quad \Gamma^* = \frac{\Gamma}{UL} \\ t^* &= \frac{U}{L} t; \quad x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{L} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $\Gamma$  - قدرت گردابه،  $L$  - طول نیم صفحه،  $U$  - سرعت ماکزیمم در بی نهایت،  $\Gamma$  - چگالی جریان آزاد،  $t$  - زمان،  $v$  - مؤلفه سرعت جریان در راستای محور  $y$ ،  $p$  - فشار و اندیس \* به معنای بی بعد بودن متغیرها است. شرط تراکم ناپذیری جریان در حالت بی بعد به صورت زیر است:

عملاً ناپایا است. حل چنین مسئله‌ای با استفاده از روش‌های مدل‌سازی عددی معمولی که بر اساس معادلات ناویر-استوکس و رینولدز می‌باشد، بسیار مشکل است. روش‌های عددی دیگری از جمله روش گردابه گسسته بهینه شده برای مدل‌سازی جریان تراکم‌ناپذیر وجود داشته که بر اساس قضیه هلمهولتز بنا نهاده شده است [7 و 18]. طبق این فرضیه، گردابه در جریان ایده‌آل همواره با ذرات مادی حرکت می‌کند. مناسب‌تر است برای حل این مسائل از روش لاگرانژ بهره برد. اگر توزیع گردابه به‌دست آید در نتیجه میدان سرعت که حاصل از برابری سرعت‌های القایی تمامی گردابه‌هاست به‌دست خواهد آمد.



شکل 2- گسسته‌سازی صفحه با نقاط کنترلی و نقاط گردابه چسبیده

در روش گردابه گسسته سطح جسم توسط یک لایه گردابه جایگزین شده (شکل 2) و گردابه‌های چسبیده به جسم و گردابه‌های آزاد (در زمان و مکان) و نیز شرایط مرزی گسسته‌سازی می‌شوند. گردابه‌های چسبیده با صفحه حرکت کرده و قدرت آنها وابسته به زمان است و میزان قدرت آنها از شرایط عدم نفوذ در نقاط کنترلی انتخاب شده، به‌دست می‌آیند. گردابه‌های آزاد به همراه جریان حرکت کرده و قدرت آنها در جریان ایده‌آل ثابت فرض می‌شود (طبق تئوری هلمهولتز). در جریان لزج در حالت عمومی ممکن است قدرت گردابه‌ها در برخورد با جسم صلب کاهش یابد. شایان ذکر است که در صورت عدم وجود مرز صلب در جریان لزج صرف‌نظر از وجود استهلاك گردابه، مجموع قدرت گردابه‌ها ثابت باقی می‌ماند [2 و 4]. بنابراین در حالت جدایی گردابه در جریان لزج، امکان استهلاك و کاهش قدرت آن وجود دارد. در روش مدل‌سازی، جریان غیرلزج در نظر گرفته شده سپس برای بهینه نمودن روش گردابه و در نظر گرفتن پدیده ناپدید شدن

$-h$  ضخامت محلی صفحه،  $\Gamma_{\infty}$  - چگالی ماده تشکیل‌دهنده صفحه و  $\Gamma$  - چگالی جریان آزاد است. در ادامه برای ساده‌نویسی از اندیس \* صرف‌نظر گشته و ضخامت صفحه نیز صفر فرض می‌شود. شرایط اولیه مسئله به‌صورت زیر است:

$$\forall (x, y), t = 0 \quad \mathbf{a} \quad v = 0, u = 0 \quad (8)$$

در زمان اولیه  $t = 0$  جریان جاری می‌شود و در نتیجه معادله سرعت به‌صورت زیر است:

$$u_{\infty} = u_{\infty}(t); \quad v_{\infty} = 0 \quad (9)$$

در حالت دوران اجباری صفحه، سرعت دورانی را تحت شرایط  $t > 0$  برابر مقدار ثابت قرار داده، لذا مقدار بی‌بعد آن برابر یک است.

در حالت دوران آزاد به دلیل اینکه بار ناگهانی به صفحه وارد نشود تغییرات سرعت بی‌بعد را از صفر تا ماکزیمم مقدار آن که یک است بر اساس فرمول (10) تنظیم نموده و سپس مقدار آن را ثابت در نظر می‌گیریم.

$$u_{\infty}(t) = 1 - (1 - t)^2 \quad (10)$$

زاویه اولیه نیم‌صفحه شاخص با جریان آزاد را  $\beta_0$  می‌نامیم. سرعت زاویه‌ای اولیه صفحه  $\dot{\beta}_0$  بوده که آن را صفر فرض می‌کنیم. در حالت دوران اجباری، سرعت زاویه‌ای اولیه صفحه تخت را از ابتدا برابر با سرعت زاویه‌ای دلخواه مورد نظر قرار می‌دهیم. اما در حالت دوران آزاد مقدار آن تابعی از عملکرد جریان روی سطح صفحه در طول زمان است. شرط مرزی عدم نفوذ به‌صورت زیر است:

$$(\dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}_v) = |r^*| \dot{\beta} \quad (11)$$

که در آن  $\mathbf{n}_v$  بردار عمود بر سطح در نقطه مورد نظر می‌باشد.

## روش حل

قابل توجه است که بر خلاف سادگی ظاهر مسئله هیچ‌گونه روش تحلیلی برای حل آن وجود ندارد که این به‌دلیل اثرات جریان آزاد بر روی صفحه و اثر متقابل صفحه در حال حرکت بر روی جریان است. بنابراین لازم است به‌طور هم‌زمان رفتار جریان و صفحه را مدل‌سازی نمود. همچنین جریان مد نظر

می‌شود. این نقاط در میانه گردابه‌های چسبیده و همچنین در گوشه‌ها (لبه‌ها) در نظر گرفته شده‌اند. در نهایت دستگاه معادلات جبری خطی زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \Gamma_i^k [-u_{ij}^{k1} \sin \varphi + v_{ij}^{k1} \cos \varphi] + \\ & \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^M \delta_l^k [-u_{ij}^{k1} \sin \varphi + v_{ij}^{k1} \cos \varphi] = -u_\infty \sin \varphi + |r_j^1| \Phi \\ & \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \Gamma_i^k [u_{ij}^{k2} \sin \varphi - v_{ij}^{k2} \cos \varphi] + \\ & \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^M \delta_l^k [u_{ij}^{k2} \sin \varphi - v_{ij}^{k2} \cos \varphi] = -u_\infty \sin \varphi + |r_j^2| \Phi \\ & \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \Gamma_i^k [-u_i^{k0} \sin \varphi + v_i^{k0} \cos \varphi] \\ & + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^M \delta_l^k [-u_i^{k0} \sin \varphi + v_i^{k0} \cos \varphi] = -u_\infty \sin \varphi \\ & (j = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (14)$$

در اینجا  $u_{ij}^{km}$  و  $v_{ij}^{km}$  به ترتیب مؤلفه سرعت طولی و عرضی هستند. اندیس  $k=1$  مربوط به گردابه آزاد شده از لبه نیم‌صفحه شاخص و  $k=2$  مربوط به گردابه رها شده از نیم‌صفحه دیگر است.  $m=1$  نشان‌دهنده نقطه کنترلی در نیم‌صفحه شاخص و  $m=2$  نقطه کنترلی در سمت دیگر صفحه است.  $m=0$  نقطه کنترلی در مرکز صفحه و  $i$  - تعداد گردابه‌های روی صفحه می‌باشد که از مرکز به سمت بیرون شمرده می‌شود.  $j$  - تعداد نقاط کنترلی بوده که آن هم از مرکز به سمت بیرون شمرده می‌شود.  $l$  - تعداد گردابه‌های آزاد و  $l=1$  مربوط به گردابه‌ای است که در قدم زمانی فعلی تولید می‌شود.  $m$  - تعداد قدم‌های زمانی،  $\Gamma$  - قدرت گردابه‌های چسبیده،  $d$  - قدرت گردابه‌های آزاد و  $r_j^m$  - فاصله نقطه کنترلی تا مرکز صفحه است. به منظور حل دستگاه معادلات از معادله کمکی زیر استفاده می‌شود:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \Gamma_i^k + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^M \delta_l^k = 0 \quad (15)$$

این شرط بدین معنی است که مجموع قدرت کلی گردابه‌ها با گذشت زمان ثابت باقی مانده و مقدار آن همواره برابر صفر است.

معادله (14) و (15) یک دستگاه معادلات جبری را تشکیل می‌دهد که دارای  $2n+2$  معادله و  $2n+2$  مجهول است:

$$d_1^1, d_1^2 \text{ و } (\Gamma_i^k : k = 1, 2; i = 1, \dots, N) \quad (16)$$

گردابه‌ها از روش نیمه تجربی افت گردابه بهره‌گیری شده است [11]. در هر قدم زمانی از هر کدام از گوشه‌های تیز صفحه تخت (به دلیل جدایی جریان) یک گردابه آزاد رها می‌شود. بنابراین تعداد گردابه‌های آزاد به مرور زمان افزایش می‌یابد. برای محاسبه سرعت القایی حاصل از گردابه‌ها از قانون بیوساوار استفاده می‌شود. بر اساس این قانون سرعت القایی در مرکز گردابه به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و با افزایش فاصله از مرکز سرعت کاهش می‌یابد. لذا نقطه منفرد در مرکز وجود دارد که با تدابیری می‌باید مرتفع گردد.

برای حل این مسئله در مقاله حاضر از روش منطقه مجزا استفاده شده است. بدین صورت که پیرامون مرکز گردابه، منطقه‌ای به شعاع  $r_c$  در نظر گرفته می‌شود (منطقه مجزا) که در داخل آن سرعت از صفر (در مرکز دایره) تا حداکثر آن (روی مرز دایره) تغییر می‌کند. در خارج از این منطقه (بدون ناپیوستگی در مرز) از قانون بیوساوار استفاده می‌شود. در این حالت میدان سرعت معادله پیوستگی را ارضاء می‌کند و مسئله کوشی برای حرکت گردابه‌ها صحیح خواهد بود حتی اگر حل ناپایدار باشد [3].

پارامتر  $r_c$  شعاع منطقه مجزا نامیده می‌شود. سرعت القایی حاصل از یک رشته گردابه در یک نقطه دلخواه از روابط زیر به دست می‌آید:

$$V_\Theta = \frac{\Gamma}{2p} : r > r_c, \quad V_\Theta = \frac{\Gamma}{2p} \frac{r}{r_c^2} : r < r_c, \quad V_r = 0 \quad (12)$$

که در آن  $V_\Theta$  - سرعت مماسی،  $V_r$  - سرعت شعاعی،  $\Gamma$  - قدرت گردابه و  $r$  - شعاع نقطه مورد نظر تا گردابه است. برای محاسبه اثرات استهلاك گردابه‌های آزاد از روش نیمه تجربی افت گردابه استفاده می‌شود [9]. بر این اساس، قدرت  $i$ -امین گردابه که تابعی از زمان است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\delta_i(t) = \delta_{0i} \{1 - \exp[-k/(4(t - t_{0i}))]\} \quad (13)$$

که در آن  $d_{0i}$  - قدرت  $i$ -امین گردابه در زمان تولد آن،  $k$  - یک ثابت تجربی که شاخص سرعت استهلاك گردابه بوده و  $t_{0i}$  - زمان تولد  $i$ -امین گردابه است. مقدار بهینه ضریب  $k$  برابر 40 می‌باشد.

برای تعیین قدرت مجموع تمامی گردابه‌های چسبیده و دو گردابه رها شده از گوشه‌ها در قدم زمانی جاری، از شرط نفوذناپذیری (شرایط لایه مرزی) در نقاط کنترلی استفاده

گردابه چسبیده در دو طرف صفحه، در قدم زمانی قبلی است. با استفاده از فرمول (4) گشتاور دورانی بی بعد اعمالی بر روی صفحه محاسبه گشته که بدین منظور از روش انتگرال گیری عددی بهره گیری می شود. با مشخص شدن گشتاور دورانی و تکانه لختی بی بعد صفحه، با استفاده از معادله (4) می توان شتاب زاویه ای بی بعد را در قدم زمانی فعلی به دست آورد. همچنین با به دست آوردن شتاب زاویه ای و سرعت زاویه ای فعلی، می توان سرعت زاویه ای و زاویه چرخش صفحه را در قدم زمانی بعدی از فرمول های زیر به دست آورد:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \dot{\phi}_n \Delta t; \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \dot{\varphi}_n \Delta t \quad (22)$$

اندیس  $n$  نمایانگر قدم زمانی فعلی و اندیس  $n+1$  نشانگر قدم زمانی بعدی است. اگر در هنگام جابه جایی صفحه (طبق فرمول 22) و حرکت گردابه ها (طبق فرمول 19) تعدادی گردابه به صفحه نزدیک شوند به گونه ای که فاصله آنها نسبت به صفحه از فاصله بین نقاط کنترلی کمتر باشد این گردابه ها از صفحه دور می شوند. این عمل به خاطر تنظیم میدان سرعت در اطراف صفحه و با هدف حذف نفوذ غیر فیزیکی گردابه ها در صفحه تخت انجام می شود.

### نتایج

محاسبات در زوایای حمله مختلف و در حالت های ایستایی و دینامیکی انجام شده است. تعداد گردابه ها روی نیم صفحه به میزان  $n$  و فاصله بین گردابه های چسبیده برابر  $r=1/n$  انتخاب گردیده است. قدم زمانی برابر با  $dt=0.1$  و زمان محاسبه 80 قدم زمانی انتخاب گردیده است. به ازاء تعداد نقاط گردابه چسبیده مختلف بر روی صفحه آنالیز صورت گرفته است. نتایج حاصل به ازاء حداقل 5 گردابه چسبیده بر روی هر نیم صفحه ( $n=5$ ) همگرا شده و افزایش بیشتر تعداد گردابه تأثیری بر روی نتایج ندارد. تنها اثر آن بر روی مدت زمان اجرای برنامه بوده در حالی که نتایج یکسان می باشد. لذا تعداد گردابه ها روی نیم صفحه 10 عدد ( $n=10$ ) در نظر گرفته شده است. در فرایند محاسبه، ضریب نیروی عمودی  $C_y$ ، ضریب نیروی محوری  $C_x$  و ضریب گشتاور دورانی  $M_z$  بر حسب زاویه صفحه محاسبه شده است.

دستگاه معادلات با استفاده از روش های مختلف از جمله روش حذفی گوس قابل حل است. برای تعیین میزان سرعت در دستگاه مختصات ساکن باید سرعت حاصل از کلیه گردابه های آزاد و چسبیده را با سرعت جریان آزاد به صورت برداری جمع نمود. لذا سرعت در نقطه ای با مختصات  $r$  به صورت زیر به دست می آید:

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \Gamma_i^k u_i^k(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n \delta_l^k u_l^k(\mathbf{r}_l^k, \mathbf{r}) + u_\infty(t) \quad (17)$$

$$v(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \Gamma_i^k v_i^k(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n \delta_l^k v_l^k(\mathbf{r}_l^k, \mathbf{r}) \quad (18)$$

برای پیدا کردن موقعیت گردابه های آزاد در قدم زمانی بعدی، از معادله حرکتی هر کدام از گردابه ها بر اساس روش اولر انتگرال گیری می شود، لذا:

$$\mathbf{r}_{j+1}^{in+1} = \mathbf{r}_j^{in} + \mathbf{V}^n(\mathbf{r}_j^{in}) \Delta t \quad (19)$$

$$(i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n)$$

در اینجا  $\mathbf{r}_j^{in} = (x_j^{in}; y_j^{in})$  -  $n$  - قدم زمانی فعلی،  $i$  - شاخص سمت صفحه،  $\Delta t$  - نشان دهنده قدم زمانی و  $j$  - عدد گردابه آزاد است که با رها شدن هر گردابه در هر قدم زمانی یک شماره به آن اضافه می شود. افت فشار در نقطه کنترلی  $i$  ام روی نیم صفحه شاخص از فرمول زیر به دست می آید:

$$\Delta p_i^1 = (u_i^1 \cos \phi + v_i^1 \sin \phi) \frac{\Gamma_i^1 + \Gamma_{i-1}^1}{2} \frac{1}{\Delta r} - [\delta_1^1 + \sum_{k=i}^N (\Gamma_k^1 - \Gamma_k^{1p})] / \Delta t \quad (20)$$

و در سمت دیگر صفحه از فرمول زیر به دست می آید:

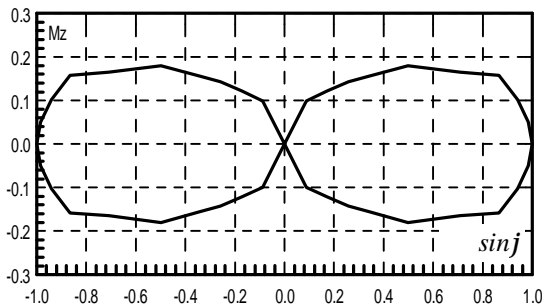
$$\Delta p_i^2 = (u_i^2 \cos \phi + v_i^2 \sin \phi) \frac{\Gamma_i^2 + \Gamma_{i-1}^2}{2} \frac{1}{\Delta r} + [\delta_1^2 + \sum_{k=i}^N (\Gamma_k^2 - \Gamma_k^{2p})] / \Delta t \quad (21)$$

که  $u_i^{1(2)}$  و  $v_i^{1(2)}$  - مؤلفه های سرعت در جهت  $x$  و  $y$  در نقطه کنترلی  $i$  - ام در دو سوی صفحه است.  $\Gamma_i^{1(2)}$  - قدرت  $i$  امین گردابه آزاد و  $d_1^{1(2)}$  - قدرت گردابه آزاد ایجاد شده در دو سمت صفحه، در قدم زمانی فعلی است.  $\Gamma_k^{1(2)p}$  - قدرت  $k$  - امین

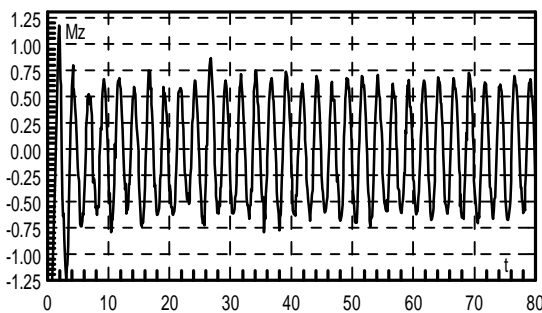
که صفحه دارای حرکت چرخشی است، درباره مقدار هیستریزیس دینامیکی می‌توان بر اساس اختلاف منحنی‌های ضریب نیروی عمودی، ضریب نیروی محوری و ضریب گشتاور نسبت به حالت ایستایی واقع در شکل‌های (3) و (4) قضاوت نمود.

در ادامه دوران اجباری صفحه، در خلاف حرکت عقربه ساعت، چگونگی رفتار صفحه با سرعت‌های زاویه‌ای مختلف بررسی می‌شود. شاخص این نوع حرکت عدد استروهمال ( $Sh=2Lf/V$ ) است که در آن  $f$ - فرکانس دورانی صفحه (تعداد دور در واحد زمان)،  $L$ - نصف طول صفحه و  $V$ - سرعت جریان می‌باشد. در این حالت ضریب نیروی عمودی، محوری و ضریب گشتاور، بر حسب زمان و  $\sin\phi$  همچنین توزیع مکانی گرده‌های آزاد در پایان زمان و نیز منحنی اختلاف فشار در زوایای مختلف محاسبه گردیده است.

محاسبات در عددهای  $Sh = 0.05, 0.1, 0.4$  و سرعت‌های زاویه‌ای  $\omega = 0.05\pi, 0.1\pi, 0.4\pi$  انجام گردید و نتایج در عدد  $Sh=0.4$  مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. در  $Sh = 0.4$  و  $\omega = 0.4\pi$  ضرایب نیروی عمودی و گشتاور بر حسب زمان به ترتیب در شکل‌های (5) و (6) ارائه شده است.



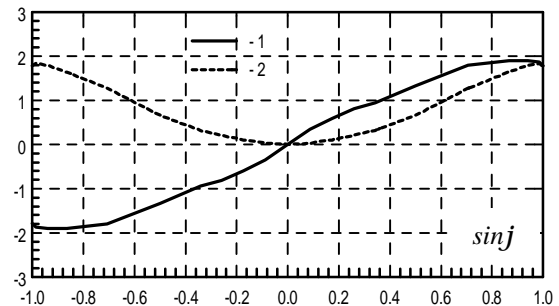
شکل 4- تغییرات ضریب گشتاور دورانی با  $\sin j$  در حالت استاتیکی



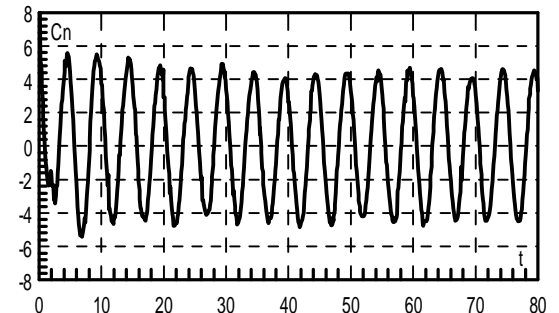
شکل 6- ضریب گشتاور بر حسب زمان تحت دوران اجباری صفحه به ازای  $Sh=0.4$

شکل (3) منحنی ضریب نیروی عمودی و نیروی محوری را بر حسب زاویه صفحه با جریان ( $\sin\phi$ ) در حالت ایستایی نشان می‌دهد. دیده می‌شود ضریب نیروی عمودی به صورت تابع فردی از  $\sin\phi$  و ضریب نیروی محوری تابع زوجی از آن می‌باشد. با افزایش مقدار سینوس ضریب نیروی عمودی افزایش می‌یابد، اما در محدوده زاویه  $p/2$  بدین صورت نمی‌باشد. افزایش میزان این ضریب به دلیل رشد جدایی جریان با افزایش زاویه حمله بوده و افت این ضریب در محدوده  $p/2$  به دلیل عدم تقارن جریان است.

در شکل (4) رابطه ضریب گشتاور دورانی با افزایش  $\sin\phi$  ارائه شده است (در حالتی که سرعت زاویه‌ای صفر می‌باشد). به دلیل تقارن صفحه مقادیر گشتاور به ازای یک مقدار معین از زاویه  $\phi$  با یکدیگر برابر بوده ولی دارای علامت مخالف می‌باشند. همچنین به دلیل تقارن مقادیر سینوس، مقادیر گشتاور نیز یکسان هستند. اگر زاویه حمله در محدوده صفر تا  $90$  درجه تغییر کند، میزان گشتاور مثبت بوده و از ابتدا تا مقدار  $\sin\phi=0.5$  افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد. در حالات  $j = 0$  و  $j = p/2$ ، به دلیل تقارن، گشتاور صفر است. در این حالات هیستریزیس آیرودینامیکی وجود ندارد. در حالتی

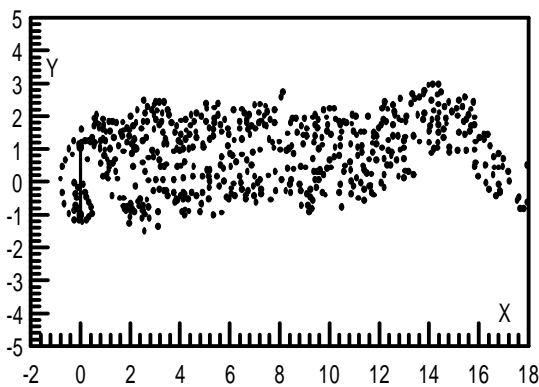


شکل 3- تغییرات ضریب نیروی عمودی (خط پر) و محوری (خط چین) با  $\sin j$



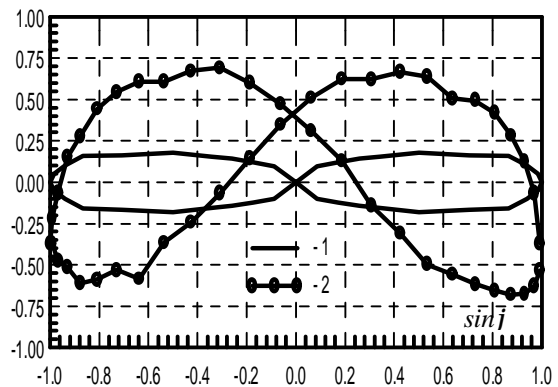
شکل 5- ضریب نیروی عمودی بر حسب زمان تحت دوران اجباری صفحه به ازای  $Sh=0.4$

اثرات به‌خاطر ساختار گردابه‌ای به‌وجود آمده در جریان است. در حالتی که صفحه تحت نیروهای آیرودینامیکی می‌تواند حول محور دوران آزادانه حرکت کند (که این حرکت ممکن است به‌صورت نوسانی یا دوران کامل باشد) محاسبات انجام شده است. برای حل مسئله لازم است به‌صورت هم‌زمان جریان و چرخش صفحه را مدل‌سازی نمود. برای حل به شرایط اولیه یعنی  $j_0$  و سرعت زاویه‌ای اولیه یعنی  $\dot{\theta}_0$  نیاز داریم. سرعت زاویه‌ای اولیه صفر فرض شده و زاویه حمله اولیه را  $5p/6$  در نظر می‌گیریم. در فرایند محاسبه، زاویه صفحه، سرعت زاویه‌ای، ضریب نیروی عمودی و ضریب گشتاور بر حسب زمان به ازای گشتاورهای لختی بی‌بعد محاسبه می‌گردد. همچنین توزیع مکانی گردابه‌های آزاد در پایان زمان محاسبه به‌دست می‌آید.

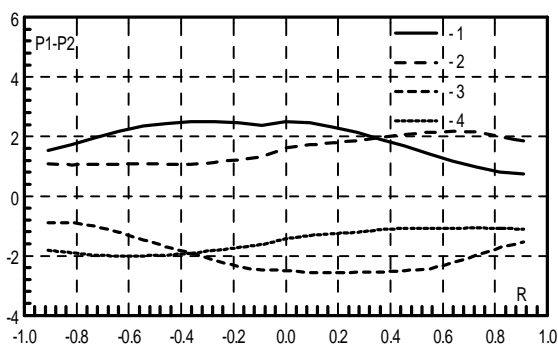


شکل 8- توزیع گردابه‌ها در آخرین قدم زمان ( $Sh=0.4$  و  $j=90^\circ$ )

در شکل (7) ضریب گشتاور در حالت ایستایی و نیز در حالت دوران اجباری (به ازای  $Sh=0.4$ ) مقایسه شده است. در شکل (8) توزیع گردابه به ازای  $Sh=0.4$  در قدم زمانی نهایی (که در آن زاویه صفحه 90 درجه است) نشان داده شده و شکل (9) نشان‌دهنده توزیع گردابه‌ها در زاویه صفر درجه می‌باشد. توزیع فشار (اختلاف فشار) اعمالی به صفحه در زوایای مختلف به ازای  $Sh=0.4$  در شکل (10) رسم شده است. بر اساس نتایج فوق در مدل‌سازی عددی دوران اجباری صفحه هیستریزیس دینامیکی مشاهده می‌گردد که با افزایش عدد استروهال از 0.05 تا 0.5 افزایش می‌یابد. ضریب گشتاور متوسط به ازای  $0.1 \leq Sh \leq 0.05$  افزایش، به ازای  $0.1 \leq Sh \leq 0.4$  کاهش و به ازای  $Sh > 0.2$  منفی می‌گردد. این

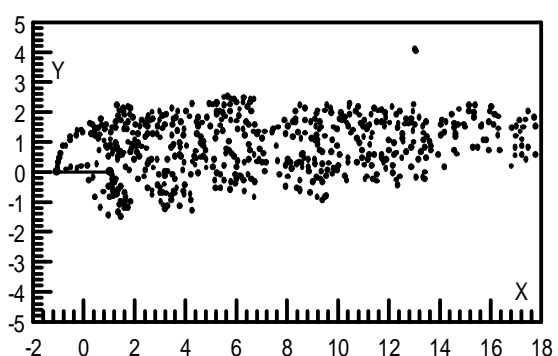


شکل 7- ضریب گشتاور در حالت ایستایی (خط پر) و دوران اجباری به ازای  $Sh=0.4$  (خط مربع)



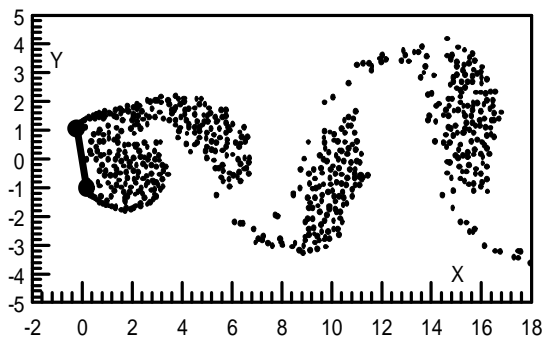
شکل 10- اختلاف فشار در طول صفحه به ازای  $Sh=0.4$

$$j = 0 \quad (1), \quad j = \frac{p}{2} \quad (2), \quad j = p \quad (3), \quad j = \frac{3p}{2} \quad (4)$$



شکل 9- توزیع گردابه‌ها در آخرین قدم زمان ( $Sh=0.4$  و  $j=0^\circ$ )

افزایش می‌یابد و این به‌خاطر تولید گشتاور مثبتی است که انرژی دورانی لازم را در مقابل مقاومت محیط ایجاد می‌کند. شکل (13) توزیع مکانی گردابه‌های آزاد را در حالت نوسان آزاد و در آخرین قدم زمانی نشان می‌دهد. در این شکل دیده می‌شود که مسیر گردابه‌های کارمن به‌وجود آمده و به‌دلیل سرعت زاویه‌ای کم، توده گردابه‌هایی با علائم مختلف در دو طرف صفحه ایجاد شده است. ساختار گردابه‌ای منظمی در دنباله ایجاد می‌گردد که باعث ثبات نیروی عمودی و کاهش دامنه نوسان به مرور زمان می‌شود. برای ارزیابی نتایج مدل‌سازی عددی، رفتار صفحات تخت با ابعاد  $20 \times 20$  و  $30 \times 20$  سانتی‌متر تحت جریان با سرعت  $15/5$  متر بر ثانیه در حالت دوران آزاد مورد آزمایش قرار گرفته است.

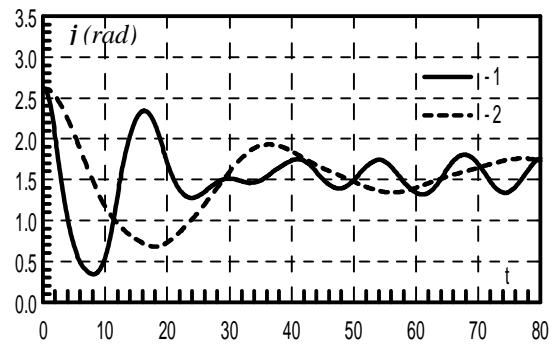


شکل 13- توزیع مکانی گردابه‌های آزاد در آخرین قدم زمان در حالت نوسان آزاد به ازای  $J=1$ ، و تحت زاویه اولیه  $\alpha = \frac{5p}{6}$

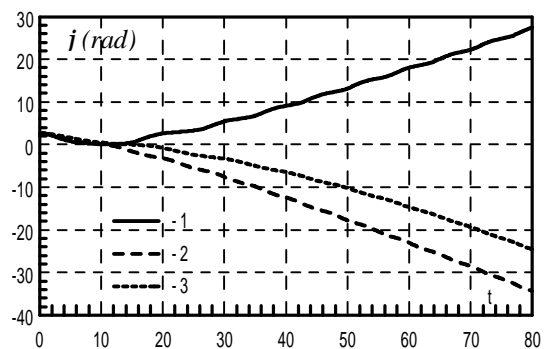
آزمایش‌هایی در تونل باد مادون صوت آزمایشگاه آیرودینامیک دانشگاه شهید ستاری صورت پذیرفته است. تونل باد فوق از نوع مدار بسته با اتاق آزمون باز و دارای سطح مقطع دایره‌ای با قطر 50 سانتی‌متر می‌باشد. سرعت جریان از صفر تا 50 متر بر ثانیه قابل تغییر است. در شکل‌های (14) و (15) رفتار صفحات فوق ارائه گردیده است. صفحات در زوایای حمله مختلف بر روی نگهدارنده نصب و رفتار آنها مورد بررسی قرار گرفت. دیده می‌شود که برای یک صفحه با گشتاور لختی و اندازه معین صفحه در محدوده زوایای حمله کوچک وارد رژیم دوران آزاد شده و به محض رسیدن به یک زاویه حمله معین وارد رژیم نوسانی (میرا) حول 90 درجه می‌گردد.

در شکل (14) رفتار صفحه با ابعاد  $20 \times 20$  سانتی‌متر نشان داده شده است. صفحه مذکور در زاویه حمله 24 درجه

تحقیقات نشان می‌دهد که تحت شرایط اولیه مختلف و گشتاور لختی بی‌بعد در محدوده  $1.43 \leq J \leq 5$  رژیم دوران آزاد رخ می‌دهد. اگر گشتاور لختی خارج از این محدوده قرار گیرد صفحه وارد رژیم نوسان آزاد حول زاویه  $p/2$  می‌گردد. در شکل (11) تغییرات زاویه دوران صفحه بر حسب زمان در حالت نوسان آزاد و در شکل (12) در حالت دوران آزاد نشان داده شده است. در شکل (11) دیده می‌شود که به ازای میزان گشتاور لختی‌های بزرگ، نوسان آزاد میرا با دوره تناوب زیاد و در گشتاور لختی‌های کوچک، نوسان آزاد با دامنه ثابت و دوره تناوب کوچک اتفاق می‌افتد که به دلیل مقدار گشتاور آیرودینامیکی ایجاد شده در مقایسه با گشتاور لختی است. در هر دو حالت، رژیم نوسان آزاد رخ داده و دامنه نوسان ابتدا کاهش می‌یابد سپس در مقدار ثابتی تثبیت می‌گردد.



شکل 11- تغییرات زاویه صفحه بر حسب زمان در حالت دوران آزاد به ازای گشتاور لختی بی‌بعد  $J=1$  (خط پر) و  $J=10$  (خط چین).

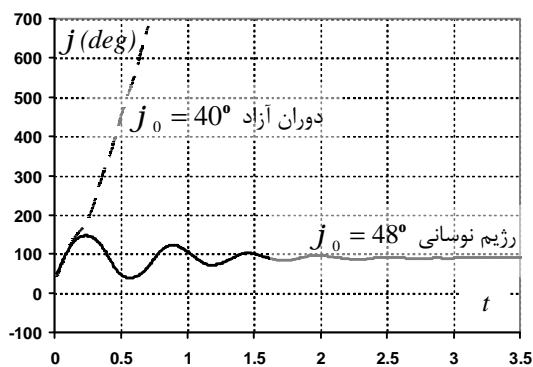


شکل 12- تغییرات زاویه صفحه بر حسب زمان به ازای (1)  $J=1.43$ ، (2)  $J=2.5$ ، (3)  $J=5$

در شکل (12) دیده می‌شود که رژیم دوران آزاد رخ می‌دهد و زاویه بدون هیچ‌گونه محدودیتی، با افزایش زمان



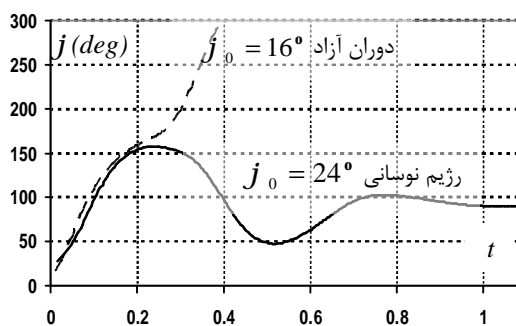
آیرودینامیکی به وجود آمده بر روی صفحات است. وقتی که یک کمیت فیزیکی اندازه‌گیری می‌شود، نباید انتظار داشت که مقدار به دست آمده دقیقاً با مقدار حقیقی برابر باشد. اما به "دقت" یا اعتبار این اندازه‌گیری‌ها باید اشاره نمود. از جمله مهمترین خطاهای موجود، خطای وسایل اندازه‌گیری است که به خطای بایاس (سامانمند) معروف است. یکی دیگر از خطاهای مهم موجود، خطای تصادفی است. خطای دستگاه اندازه‌گیری طول صفحات، اغتشاشات جریان هوای تونل باد و دقت زمان‌سنج مورد استفاده سبب بروز خطا در مقدار عدد استروهل به دست آمده در هر آزمایش می‌گردد. با توجه به فاکتورها و عوامل مختلف اثرگذار در آزمایش‌ها، مقدار خطای عدد استروهل حدود  $\pm 0.001$  برآورد شده است.



شکل 15- رفتار صفحه با ابعاد  $30 \times 20$  سانتی‌متر تحت جریان با سرعت  $15/5$  متر بر ثانیه

$Sh=0.1$  افزایش یافته، سپس کاهش می‌یابد و تحت مقدار  $Sh>0.2$  منفی می‌گردد. گشتاور چند مقدره مرتبط با ساختار گردابه‌ای جریان بوده، خصوصاً مرتبط با تلفیق توده گردابه‌ای در منطقه دنباله جسم و همچنین تغییرات برای جدایی جریان است. در هنگامی که صفحه با درجه آزادی چرخشی تحت جریان هوا قرار گیرد ممکن است وارد رژیم دوران آزاد گردد. این حالت زمانی رخ می‌دهد که گشتاور لختی بی‌بعد در محدوده  $5 - 1/43$  بوده و زاویه حمله به اندازه کافی کوچک باشد (سرعت زاویه‌ای اولیه صفر). در این حالت صفحه تحت تأثیر گشتاور شتاب‌دهنده قرار دارد و گشتاور حاصل به‌گونه‌ای است که بر گشتاور کاهنده محیط غلبه می‌کند. تحت مقادیر دیگری از گشتاور لختی، صفحه وارد رژیم نوسان آزاد (با میراشونده) می‌شود. عدد استروهل متوسط تحت دوران آزاد (با

وارد رژیم نوسان میراشونده حول  $90$  درجه شده و پیش از رسیدن به این زاویه وارد رژیم دوران آزاد می‌گردد. در شکل (15) رفتار صفحه با ابعاد  $30 \times 20$  ترسیم گردیده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد، زاویه ورود صفحه به رژیم نوسانی میراشونده برای این صفحه  $48$  درجه بوده و قبل از رسیدن به این زاویه حمله، صفحه وارد رژیم دوران آزاد می‌گردد. بررسی نتایج عددی و شکل‌های (11) و (12) نشان می‌دهد که افزایش طول صفحه و به تبع آن افزایش گشتاور لختی، سبب افزایش محدوده زاویه حمله وقوع رژیم دوران آزاد و به دنبال آن، افزایش زاویه ورود صفحه به رژیم نوسانی میراشونده می‌شود. این پدیده با نتایج حاصل شده از آزمایش تطابق داشته و دلیل وقوع آن تقویت گشتاور شتاب‌دهنده



شکل 14- رفتار صفحه با ابعاد  $20 \times 20$  سانتی‌متر تحت جریان هوا با سرعت  $15/5$  متر بر ثانیه

### نتیجه‌گیری

مدل‌سازی عددی دوران اجباری یک صفحه تخت در جریان تراکم‌ناپذیر تحت سرعت‌های زاویه‌ای مختلفی انجام گردید. همچنین مدل‌سازی دوران آزاد و نوسانی صفحه، ناشی از گشتاور آیرودینامیکی انجام پذیرفته است. در مدل‌سازی از روش بهینه‌شده گردابه گسسته استفاده گردیده که در آن اثر استهلاك گردابه (در میدان سرعت دنباله جسم) اعمال شده است. دیده می‌شود که تحت دوران اجباری، به دلیل تغییرات ساختاری جریان گردابه‌ای در مقایسه با حالت ایستایی، هیستریزس دینامیکی برای نیروی عمودی و گشتاور دورانی رخ می‌دهد. این هیستریزس با افزایش عدد استروهل تقویت می‌شود. گشتاور دورانی متوسط با رشد عدد استروهل به‌طور چند مقدره تغییر می‌کند. بدین‌صورت که ابتدا تا مقدار

- Flow*", Moscow, Mash
- [8] Helmholtz. H (1858), "*Über Integral der Hydrodynamischen Gleichungen Welch den wirbelewungen entsprechen*", journal für diereine and angewandte mathematic
- [9] Isvand H., Andronov P. R (2002), "*Numerical and Experimental Investigation of Rotational Plate in the Flow*", Report № 4607, IMEC-MSU
- [10] Joukovski N. E (1948), "*Attached Vortex*", vol 2, gas mechanic
- [11] Kiya M., Arie M. (1980), "*Discrete-vortex simulation of unsteady separated flow behind a nearly normal plate*". Bull. JSME, vol. 23, №183, pp. 1451-1458.
- [12] Leonard. A (1980 a), "*Vortex methods for flow simulation, journal of computational physics*"
- [13] Leonard. A (1980 b)" *Vortex simulation of three Dimensional spot like Disturbances in a Laminar Boundary Layer*", journal of computational physics
- [14] Leonard. A (1985), "*Computing three dimensional Incompressible flows with vortex Elements*", journal of fluid mechanic
- [15] Leonard. A and Conet. B (1985), "*Two studies in three dimensional vortex Dynamics: A perturbed Round jet and an Inhomogeneous Mixing layer*", the Norwegian Inst
- [16] Saffman. P. G (1981), "*Dynamic of vorticity*", journal of fluid mechanic
- [17] Saffman. P. G and Baker. G. R (1979), "*Vortex interaction*", journal of fluid Mechanic
- [18] Sarpkaia T. (1089), "*Computational Methods with Vortices-The 1988 Freeman Scholar Lecture*", Mashinactraenie, №10

توجه به گشتاور لختی) در محدوده 0/166 و 0/186 می‌باشد. ساختار گردابه‌ای تحت نوسان اجباری صفحه نسبت به دوران آزاد منظم‌تر می‌باشد که باعث کاهش دامنه نوسان گشتاور دورانی می‌گردد. در دوران آزاد، یک ساختار گردابه‌ای همانند حالت دوران اجباری (ساختار گردابه‌ای کارمن) در دنباله جسم ایجاد می‌گردد. محاسبات نشان می‌دهد که استهلاک گردابه‌های آزاد در دنباله جسم تأثیر زیادی روی نتایج محاسباتی در محدوده عدد استروهال مد نظر ندارد که نشان‌دهنده نقش دینامیک ناپایای توده گردابه‌هاست.

#### منابع و مراجع

- [1] Aref. H (1983), "*Integrable chaotic and Turbulent vortex motion in two Dimensional flows*", journal of fluid mechanic
- [2] Bilaserkobski C. M (1978), "*Attach and Detached of Thin Layer Flow*", Moscow, Nauka
- [3] Bilaserkobski C. M (1986), "Fundamental of Discrete\_vortex method: proceeding TR", AH CCCP
- [4] Bilaserkobski C. M (1995), "*The Numerical Modeling of Turbulence Layer and Wave by Discrete Vortex Layer*", Phys-Math
- [5] Clement. R. R and Maull. D. J (1975), "*The representation of sheets of Vorticity by Discrete Vortices*", Prog Aerospace Sci
- [6] Fink. P. T and Soh. W. K (1974), "*Calculation of Vortex Sheets in Unsteady Flow and Applications in ship Hydrodynamics*", Symp on Naval Hydrodynamic
- [7] Goman O. G (1993), "*Numerical Modeling of Asymmetrical Separation at Incompressible*